Appunti di Trigonometria

Paolo Ciampanelli

29 agosto 2005

Copyright

Indice

1 Angoli e loro misura **13**
1.1 Definizione di angolo . . . 13
1.2 Archi orientati . . . 14
1.3 Unità di misura degli angoli . . . 15
1.3.1 Sistema sessadecimale . . . 15
1.3.2 I radianti . . . 17
1.4 Passaggio da un'unità di misura all'altra . . . 18

2 Funzioni goniometriche **19**
2.1 Definizione di funzione, funzioni pari e dispari, funzioni periodiche . 19
2.1.1 Proprietà grafiche delle funzioni pari, dispari e periodiche . . 20
2.2 Funzioni goniometriche fondamentali: $\sin$ e $\cos$ . . . 20
2.3 Proprietà di $\sin$ e $\cos$ . . . 21
2.4 Funzioni goniometriche derivate da $\sin$ e $\cos$ . . . 24
2.4.1 Tangente . . . 24
2.4.2 Cotangente . . . 25
2.4.3 Secante . . . 25
2.4.4 Cosecante . . . 25
2.5 Proprietà delle funzioni goniometriche derivate da $\sin$ e $\cos$ . . . 26
2.5.1 Proprietà della Tangente . . . 26
2.5.2 Proprietà della Cotangente . . . 28
2.5.3 Proprietà della Secante . . . 29
2.5.4 Proprietà della Cosecante . . . 30
2.6 Valori notevoli delle funzioni goniometriche . . . 31
2.7 Relazioni notevoli tra le funzioni goniometriche . . . 31
2.8 Funzioni goniometriche inverse . . . 32
2.8.1 La funzione $\arcsin$ . . . 33
2.8.2 La funzione $\arccos$ . . . 33
2.8.3 La funzione $\arctan$ . . . 34

3 Archi associati **37**
3.1 Definizioni preliminari . . . 37
3.2 Relazioni per gli angoli associati . . . 38
3.2.1 Angoli supplementari . . . 38
3.2.2 Angoli esplementari . . . 39
3.2.3 Angoli opposti . . . 39
3.2.4 Angoli complementari . . . 39
3.3 Tabella riassuntiva . . . 39

4 Formule di addizione, sottrazione, bisezione, duplicazione e prostaferesi 41
4.1 Formule di addizione e sottrazione . . . 41
4.2 Formule di duplicazione . . . 44
4.3 Formule parametriche . . . 45
4.4 Formule di bisezione . . . 46
4.5 Formule di prostaferesi . . . 47
4.6 Formule di Werner . . . 49
4.7 Tabelle riassuntive . . . 49

5 Equazioni goniometriche 51
5.1 Definizioni generali . . . 51
5.2 Equazioni elementari . . . 51
5.3 Equazioni quadratiche in una funzione goniometrica . . . 52
5.4 Equazioni con più funzioni goniometriche . . . 53
5.5 Equazioni lineari in seno e coseno . . . 54
5.5.1 Equazioni lineari non omogenee . . . 55

6 Disequazioni goniometriche 59
6.1 Definizioni generali . . . 59
6.2 Segno delle funzioni goniometriche . . . 59
6.3 Disequazioni goniometriche elementari . . . 60

7 Teoremi sui triangoli 63
7.1 Definizioni generali . . . 63
7.2 Teoremi sul triangolo rettangolo . . . 64
7.3 Teoremi su un triangolo qualunque . . . 65
7.4 Formule di Briggs . . . 68
7.4.1 Applicazione delle formule di Briggs . . . 69
7.5 Tabelle riassuntive . . . 69

A GNU Free Documentation License 71

Elenco delle tabelle

1.1 Valori notevoli per gradi e radianti 18

2.1 Tabella degli angoli notevoli 31

3.1 Tabella riassuntiva per gli archi associati 40

4.1 Tabella riassuntiva delle formule di addizione, sottrazione, duplicazione, bisezione e prostaferesi. 50

6.1 Segni delle funzioni goniometriche quadrante per quadrante 60

7.1 Formule di Briggs 68

7.2 Tabella riassuntiva dei teoremi sui triangoli. 70

Elenco delle figure

1.1 *I due angoli piani definiti dalle due semirette* $\mathbf{r}$ *e* $\mathbf{s}$ 13
1.2 *Orientamento stabilito tra le rette* $\mathbf{r}$ *ed* $\mathbf{s}$ 14
1.3 *Circonferenza e raggi che formano un angolo* 15

2.1 *Definizione di* $\sin$ *e* $\cos$ 21
2.2 *Grafico della funzione seno* 22
2.3 *Grafico della funzione coseno* 23
2.4 *Il seno é una funzione dispari* 24
2.5 *Il coseno é una funzione pari* 25
2.6 *Grafico della funzione tangente* 26
2.7 *Grafico della funzione cotangente* 27
2.8 *Grafico della funzione secante* 28
2.9 *Grafico della funzione cosecante* 29
2.10 *Arcoseno dell'angolo* 34
2.11 *Arcocoseno dell'angolo* 35
2.12 *Arcotangente dell'angolo* 36

4.1 *Coseno della differenza tra due angoli* 42

6.1 *Divisione del piano cartesiano in quadranti* 60

7.1 *Nomi di vertici, angoli e lati nel nostro triangolo generico* 63
7.2 *Triangolo rettangolo* 64
7.3 *Triangolo scaleno* 65
7.4 *Triangolo generico* 66
7.5 *Triangolo generico* 66
7.6 *Corda in una circonferenza e angoli che insistono su essa* 67

Progetto EDU di OS3

Cos'è il Progetto EDU

EDU e la divulgazione

Scopo principale del Progetto EDU è di mettere a disposizione del più vasto pubblico possibile libri di contenuto scientifico ed umanistico che abbiano contenuti didattici e che possano essere utilizzati come veri e propri libri di testo nelle scuole medie e superiori.

EDU e il modello del *Software Libero*

I libri del progetto EDU sono creati e distribuiti seguendo una filosofia molto nota, ormai, nell'ambito informatico, che si è pensato di estendere anche ai libri di vario contenuto culturale.
Tale filosofia è la filosofia di distribuzione libera del software della *Free Software Foundation*.
I prodotti *free* sono messi a disposizione gratuitamente in ogni loro parte e sono dunque utilizzabili gratuitamente da chiunque ne abbia bisogno.

La licenza di distribuzione di EDU

La distribuzione di beni *free software* è gratuita, ma con ciò non significa che non sia regolamentata.
I prodotti *free software* sono infatti sempre accompagnati da una licenza d'uso che ne regolamente i termini di utilizzo.
Chi scarica ed usa prodotti *free software* implicitamente accetta questa licenza.
La licenza di utilizzo di tutti i libri disponibili nel progetto EDU è la licenza **FDL (Free Documentation License)** scaricabile dal sito *www.gnu.org* ed interamente riportata alla fine di ogni libro.

I perchè del Progetto EDU

Costi dei libri di testo

Come chiunque abbia un figlio da mandare a scuola sa, il costo dei libri di testo incide in maniera consistente sul bilancio familiare.
La presenza di libri di testo gratuiti, scaricabili liberamente via internet, aiuta decisamente le famiglie.

Consultazione di parti di libro e fotocopie

Uno dei problemi più grossi che si incontrano nel corso di studi è quello di dover integrare con varie parti di altri libri il proprio libro di testo principale.
Infatti, in linea teorica, una persona dovrebbe acquistare tutto il libro di appoggio anche se poi ne utilizzerà solo una parte, con evidente spreco di risorse economiche.
I libri del progetto EDU, distribuiti sotto licenza FDL, possono invece essere fotocopiati liberamente in ogni loro parte, rendendo così possibile ed immediata qualsiasi tipo di integrazione si renda necessaria per comprendere meglio un argomento.

Nuove edizioni delle case editrici

Spesso, per evitare il fenomeno della compra-vendita di libri usati, le casa editrici pubblicano nuove versioni e ristampe di libri i cui contenuti non sono sostanzialmente cambiati: ciò fa sì che lo studente non possa utlizzare un libro usato della vecchia edizione perchè quella adottata dal professore è differente.
I libri sotto licenza FDL del Progetto EDU sono, invece, disponibili gratuitamente sia nelle vecchie che nelle nuove versioni. In tal modo, inoltre, comprare un libro usato non si rende più necessario.

Contributi esterni al progetto EDU

Per rendere più veloce ed efficiente il servizio di aggiornamente e correzione dei libri pubblicati per il Progetto EDU è previsto che contenuti esterni, non solo siano accettati, ma siano addirittura i benvenuti ed incoraggiati.
Per contribuire con un proprio libro di testo da distribuire sotto licenza FDL o per segnalare errori riscontrati nei testi già distribuiti basta mandare una mail all'indirizzo:

edu@os3.it

Ogni nuovo libro e correzione verranno esaminati e, se ritenuti validi, pubblicati sul sito internet mantenendo inalterato il nome dell'autore originale del lavoro.

Sito ufficiale del Progetto EDU

Il sito ufficiale del *Progetto EDU* dove é possibile scaricare tutte le ultime versioni dei libri resi disponibili é il seguente:

http://edu.os3.it

Consultate il sito per conoscere l'esistenza di eventuali mailing-list di discussione legate ad un singolo libro.
Per contattarci direttamente scrivete all'indirizzo di e-mail:

edu@os3.it

L’azienda OS3

Open Source Software Solutions (OS3) è un’azienda di sviluppo informatico con sede a Novara.
Geograficamente, l’attività di OS3 si estende prevalentemente al nord Italia, specialmente in Piemonte e Lombardia. Per la realizzazione di particolari progetti, tuttavia, i nostri consulenti ed esperti estendono il raggio delle loro attività fino al Lazio.

Da un punto di vista tecnico e informatico, l’attività principale di OS3 è incentrata nello sviluppo di applicazioni middleware ed ad hoc per i propri clienti, anche se il reparto di Ricerca e Sviluppo (R&D) di OS3 è sempre alla ricerca di nuove soluzioni software e sperimenta le ultimissime tecnologie rilasciate nel mondo Open Source.

Come si può facilmente intuire dal nome stesso, OS3 è molto attenta al mondo del software libero e dell’Open Source e supporta attivamente ed economicamente alcuni progetti Open Source italiani.

Inoltre, grazie al forte team di sviluppatori presenti in OS3, l’azienda è stata in grado di realizzare progetti rilasciati attualmente con licenze aperte come GPL o LGPL.

Per maggiori informazioni sulle attività dell’azienda e sugli ultimi prodotti realizzati consultate il sito internet dell’azienda:

http://www.os3.it

Capitolo 1

Angoli e loro misura

1.1 Definizione di angolo

Nonostante tutti noi nella vita quotidiana abbiano a che fare con il termine angolo praticamente in ogni momento, difficilmente qualcuno saprebbe dire esattamente cosa è un angolo in senso generale.

In questa sezione cercheremo di dare un'idea strettamente matematica del concetto di angolo premesso che, per ora, ci occuperemo solo di **angoli piani** e cioè di angoli ristretti ad una superficie piana.
La definizione per angoli in 3 dimensioni, ovvero, **angoli solidi** è facilmente intuibile data quella per **angoli piani**.

Senza dilungarci ulteriormente introduciamo ora il concetto di angolo piano dal punto di vista strettamete matematico. Diamo perciò la seguente definizione:

Definizione di angolo

Def. 1.1.1 (Angolo piano) *Si condieri una superficie piana, è detta* ***angolo*** *ciascuna delle due parti di piano delimitate da due semirette uscenti da uno stesso punto appartenente alla superficie.*

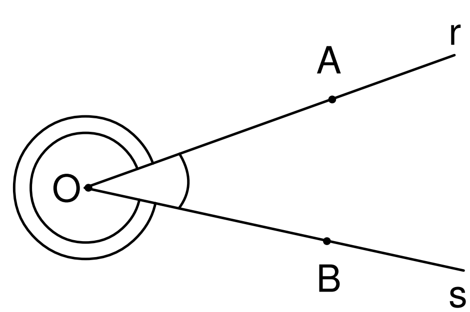

Figura 1.1: *I due angoli piani definiti dalle due semirette* **r** *e* **s**

La definizione 1.1.1 ne implica immediatamente un'altra:

Origine dell'angolo

Def. 1.1.2 (Origine dell'angolo) *Si dice **origine** dell'angolo piano il punto di intersezione delle due semirette che generano l'angolo stesso.*

Come si vede dalla definizione 1.1.1 la presenza di due semirette che si incontrano in un punto non definisce un solo angolo, ma ben due, in generale un **angolo acuto** e un **angolo ottuso**.

Risulta quindi evidente l'ambiguità che ne deriva quando ci si riferisce all'angolo formato da due semirette $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$. Infatti riferendoci all'angolo $\widehat{AOB}$ di Fig. 1.1 è impossibile stabilire se ci si riferisca all'angolo ottuso o acuto.
Per ovviare a questa ambiguità si stabilisce un orientamento per l'angolo come spiegato nella sezione seguente.

1.2 Archi orientati

Stabilire un **orientamento** per un arco significa, date due semirette e un punto di origine, stabilire un verso in cui vanno letti i punti nella dicitura $\widehat{AOB}$. Per far ciò si stabilisce una semiretta di partenza e un verso da essa, un po' come se una semiretta andasse sull'altra con un giro orario o antiorario a scelta.
Il verso comunemente scelto è quello **antiorario** di una retta sull'altra.

In Fig. 1.2 si può vedere come si sia stabilito un orientamento antiorario tra le rette

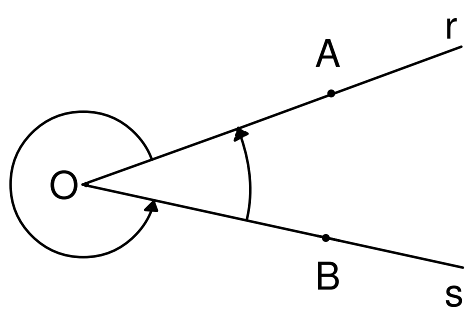

Figura 1.2: *Orientamento stabilito tra le rette* $\mathbf{r}$ *ed* $\mathbf{s}$

$\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$.
Dato questo orientamento cade la precedente ambiguità nella scrittura $\widehat{AOB}$, infatti, essendo A sulla retta r e B sulla retta s, l'angolo a cui ci si riferisce è quello ottuso.

Scivendo invece $\widehat{BOA}$ ci si riferisce all'angolo acuto definito dalle semirette $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$.

In definitiva stabilendo un ordinamento diviene importante l'ordine con cui vengono scritte le lettere sotto il simbolo di angolo, ovvero:

$$\widehat{AOB} \neq \widehat{BOA} \tag{1.1}$$

Esiste dunque ora una **corrispondenza biunivoca** tra semirette incidenti nel punto di origine O e angolo corrispondente. È importante ora quantificare il concetto di angolo dopo averlo definito. La sezione 1.3 introduce appunto il concetto di misura di un angolo.

1.3 Unità di misura degli angoli

Volendo dare un formalismo matematico al concetto di angolo è necessario trovare un modo per quantificare cosa si intende *per parte di piano* e stabilire un ordinamento tra queste *parti di piano*, in modo da saper dire con certezza quando e di quanto una è maggiore dell'altra.

Il modo di misurare un angolo non è unico, infatti vi sono alcune equivalenti unità di misura. Qui di seguito ne introdurremo due tra le più importanti. Tali unità di misura sono introdotte inscrivendo l'angolo in una circonferenza il cui centro O sia l'origine dell'angolo.
Se tale circonferenza ha raggio unitario prende il nome di **circonferenza goniometrica**.

1.3.1 Sistema sessadecimale

Si condiderino una circonferenza di raggio $\mathbf{R}$ e due raggi $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ uscenti dal suo centro $\mathbf{O}$, come in Fig. 1.3.

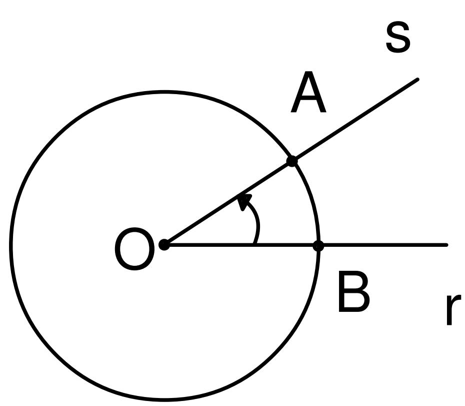

Figura 1.3: *Circonferenza e raggi che formano un angolo*

Siano inoltre $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ i punti di intersezione dei raggi con la circonferenza stessa. Si scelga un orientamento antiorario del tipo $r \rightarrow s$, si definisce così internamente alla circonferenza un angolo che sottende un arco AB.
Dato l'arco sotteso possiamo introdurre una prima unità di misura per l'angolo:

Grado

Def. 1.3.1 (Grado) *Si definisce grado l'ampiezza di un angolo che sottende un arco di circonferenza pari ad* $1/360$ *della lunghezza totale della circonferenza stessa.*

Il simbolo utilizzato per esprimere i gradi è un piccolo cerchio in alto a destra del valore numerico, ad esempio $37°$è un angolo di 37 gradi.

Dalla def. 1.3.1 si ricavano automaticamente alcune considerazioni:

- **Angolo Giro:**
  nel caso in cui la semiretta $\mathbf{r}$ vada a coincidere con la semiretta $\mathbf{s}$ dopo un

intero giro, l'angolo $\widehat{AOB}$ occupa tutto il piano e dunque l'arco da esso sotteso è tutta la circonferenza. Tale angolo è detto **angolo giro** e, secondo la Def. 1.3.1, misura $360°$.

- **Equivalenza a meno di giri:**
dalla def. 1.3.1 si capisce che l'angolo massimo possibile, ovvero l'angolo giro sopra definito, misura $360°$. Questo non significa, però, che angoli con valore superiore a $360°$ non esistano. Semplicemente angoli superiori a $360°$ sono equivalenti, dal punto di vista della porzione di piano che li forma, ad un angolo compreso tra 0 e $360°$, infatti aggiungere ad un angolo un angolo giro non varia l'ampiezza dell'angolo stesso, come meglio si può capire guardando la Fig 1.3.

- **Primi e Secondi:**
Il grado non è l'unità di misura fondamentale in questo sistema, infatti l'angolo di un grado ($\alpha = 1°$) può essere esso stesso diviso in 60 parti uguali, ciascuna delle quali è detta un angolo di un **primo di grado** (indicato con $'$), o, più semplicemente **angolo di un primo**.

  L'angolo di un primo non è ancora l'unità di misura fondamentale, infatti è esso stesso suddiviso in 60 parti ciascuna delle quali è chiamata angolo di un **secondo di grado** (indicato con $''$), o **angolo di un secondo**.
Un angolo più piccolo di un secondo si esprime con decimali di secondo, ad esempio $37,3''$.

  Riassumendo tra gradi, primi e secondi valgono le seguenti relazioni:

  - **Realazioni tra primi e gradi**
  $$\alpha = 1' \Rightarrow \alpha = (1/60)° \quad \wedge \quad \beta = 60' \Rightarrow \beta = 1° \tag{1.2}$$
  - **Relazioni tra primi e secondi**
  $$\alpha = 1'' \Rightarrow \alpha = (1/60)' \quad \wedge \quad \beta = 60'' \Rightarrow \beta = 1' \tag{1.3}$$
  - **Relazioni tra secondi e gradi**
  $$\alpha = 1'' \Rightarrow \alpha = (1/3600)° \quad \wedge \quad \beta = 3600'' \Rightarrow \beta = 1° \tag{1.4}$$

Angolo con gradi primi e secondi

Es. 1.3.1 (Angolo con gradi, primi e secondi)

$$\widehat{AOB} = 167°\, 12^{'}\, 24^{''} \tag{1.5}$$

Per convenienza futura è utile imparare a passare dalla forma in *gradi, primi e secondi* di un angolo ad una **forma decimale dei gradi** , ovvero ad una forma che esprima l'angolo con una parte intera che rappresenta i suoi gradi e una parte decimale equivalente alla parte di primi e secondi. L'Es. 1.3.2 mostra un esempio per effetturare questo passaggio.

Forma decimale per i gradi

Es. 1.3.2 (Forma decimale per i gradi) *Sia dato l'angolo di* $37°\, 22'\, 23''$ *lo si trasformi in un'espressione coi soli gradi.*
Si ha:

$$34°\, 22^{'}\, 23^{''} = \left(34 + \frac{22}{60} + \frac{23}{3600}\right)^{\circ} \simeq 34,373°$$

Dunque per un generico angolo vale la formula 1.6:

$$a^\circ\, b^{'}\, c^{''} = \left(a + \frac{b}{60} + \frac{c}{3600}\right)^\circ \tag{1.6}$$

1.3.2 I radianti

Mentre i *gradi* sono l'unità di misura più comunemente utilizzata dalle persone nella vita di tutti i giorni, i **radianti** sono l'unità di misura per angoli unanimemente adottata per testi e pubblicazioni scientifiche.
Questo fa di questa unità di misura quella più importante ai fini di un testo di matematica come questo.

Per definire un radiante si parte sempre dalla circonferenza di Fig. 1.3 con centro O nell'origine dell'angolo e si sfrutta ancora una volta l'arco di circonferenza sotteso dall'angolo stesso.

Radiante

Def. 1.3.2 (Radiante) *Si dice misura in radianti di un angolo il rapporto tra la lunghezza dell'arco di circonferenza sotteso dall'angolo e il raggio della circonferenza stessa. Siano, dunque, α l'angolo da misurare, L la lunghezza dell'arco corrispondente e R il raggio della circonferenza vale l'importante relazione:*

$$\alpha = \frac{L}{R}. \tag{1.7}$$

Si noti che, per come è stato definito, il radiante è il *rapporto tra due lunghezze* e quindi è una quantità **adimensionale**, cioè, nel comune sistema $MKSA$ utilizzato in fisica, non ha alcuna dimensione.

Data la Def. 1.3.2 si ottengono le seguenti importanti relazioni:

- **Angolo giro:**
  il valore dell'angolo giro in radianti è presto ricavato data la Def. 1.3.2.
  L'arco sotteso da un angolo giro corrisponde a tutta la circonferenza e dunque ha lunghezza pari a $L = 2\pi R$ dove R è il raggio della circonferenza, dalla definizione si ha:

$$\alpha_{giro} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{giro} = 2\pi \tag{1.8}$$

- **Equivalenza a meno di giri:**
  Come detto anche nelle considerazioni sui gradi, il fatto che l'angolo massimo possibile sia di 2π radianti non è vero che non ha senso parlare di angoli superiori a 2π. Angoli superiori a 2π radianti sono equivalenti ad angoli tra 0 e 2π radianti dal punto di vista della porzione di piano occupata.
  Si veda come sempre la Fig. 1.3.

- **Lunghezza dell'arco di circonferenza:**
  La lunghezza di un arco di circonferenza è immediatamente ricavabile quando si lavora con gli angoli misurati in radianti; infatti, sempre data la Def. 1.3.2, si ottiene:

$$L = \alpha R \tag{1.9}$$

  Dunque dato l'angolo sotteso dall'arco e il raggio della circonferenza un semplice *prodotto* ci porta ad avere la lunghezza d'arco corrispondente.
  Una relazione così semplice ed immediata è impossibile con l'uso dei gradi.

1.4 Passaggio da un'unità di misura all'altra

È conveniente dare un metodo di passaggio da un sistema di unità di misura ad un altro. Tale metodo consiste in una semplice proporzione che si basa sul fatto che è noto il *valore dell'angolo giro* sia in **gradi** che in **radianti**. La proporzione è la seguente:

$$\alpha_{rad} : 2\pi = \alpha_{gradi} : 360^{\circ} \tag{1.10}$$

L'angolo α_{gradi} è espresso in gradi nella loro forma decimale data dalla formula 1.6.

Passaggio da gradi a radianti

Es. 1.4.1 (Passaggio da gradi a radianti) *Si trasformi da gradi a radianti l'angolo*

$$\alpha = 34^{\circ}\, 22^{'}\, 23^{''}.$$

Come ricavato nell'es. 1.3.2 la forma decimale di questo angolo è:

$$\alpha = 34,373^{\circ}$$

Dall'eq. 1.10 si ottiene il suo corrispondente in radianti:

$$\alpha = 34,373^{\circ} = \left(\frac{34,373}{360}\,2\pi\right)\,rad \simeq 0,6\,rad$$

Passaggio da radianti a gradi

Es. 1.4.2 (Passaggio da radianti a gradi) *Si trasformi in gradi il seguente angolo in radianti:*

$$\beta = \frac{\pi}{8}\,rad.$$

Dall'eq. 1.10 si ottiene:

$$\beta = \frac{\pi}{8}\,rad = \left(\frac{\pi/8}{2\pi}\,360\right)^{\circ} = 141.37^{\circ}$$

Le relazioni notevoli tra gradi e radianti sono riassunte in Tab. 1.1.

Gradi	**Radianti**
0	0
30°	$\pi/6$
45°	$\pi/4$
60°	$\pi/3$
90°	$\pi/2$
180°	π
270°	$3\pi/2$
360°	2π

Tabella 1.1: Valori notevoli per gradi e radianti

Capitolo 2

Funzioni goniometriche

2.1 Definizione di funzione, funzioni pari e dispari, funzioni periodiche

Prima di descrivere le funzioni fondamentali che variano a seconda del variare di un dato valore angolare è opportuno ricordare che cos'è esattamente una funzione.
A tal fine introduciamo la definizione 2.1.1:

Funzione

Def. 2.1.1 (Funzione) *una funzione è una legge che mette in relazione due insiemi, siano $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, in modo che ad un elemento di $\mathbb{A}$ corrisponda uno e un solo elemento di $\mathbb{B}$. Tale legge si scrive:*

$$f(x) : \mathbb{A} \to \mathbb{B} \quad x \in \mathbb{A} \tag{2.1}$$

Nelle funzioni spiegate qui di seguito l'insieme $\mathbb{A}$ sarà quello dei *possibili valori di un angolo* mentre l'insieme $\mathbb{B}$ varierà caso per caso.

Per convenienza futura introduciamo ora due proprietà notevoli che le funzioni possono soddisfare. Tali proprietà, per come sono definite,**non** possono verificarsi contemporaneamente; inoltre *è possibile, anzi, generalmente è la norma, che una funzione non verifichi nessuna delle due proprietà sotto elencate*.

Funzione pari

Def. 2.1.2 (Funzione pari) *Una funzione si dice pari se non varia al variare del segno del proprio argomento x. Ovvero se vale la seguente relazione:*

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{D} \tag{2.2}$$

dove con $\mathbb{D}$ abbiamo indicato il dominio della funzione.

Potenze pari di x

Es. 2.1.1 (Potenze pari di x) *Tutte le potenze pari di x sono* ***funzioni pari****, infatti:*

$$f(x) = x^{2k} \Rightarrow f(-x) = (-x)^{2k} = (-1)^{2k}x^{2k} = x^{2k} = f(x) \quad k \in \mathbb{Z}$$

dove la penultima uguaglianza è data dal fatto che il -1 è elevato ad una potenza pari.

Funzione dispari

Def. 2.1.3 (Funzione dispari) *Una funzione si dice dispari se varia solo per un segno meno $(-)$ globale al variare del segno del proprio argomento x. Ovvero se vale la seguente relazione:*

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{D} \tag{2.3}$$

dove con $\mathbb{D}$ abbiamo indicato il dominio della funzione.

Potenze dispari di x

Es. 2.1.2 (Potenze dispari di x) *Tutte le potenze dispari di x sono **funzioni dispari**, infatti:*

$$f(x) = x^{2k+1} \Rightarrow f(-x) = (-x)^{2k+1} = (-1)^{2k+1}x^{2k+1} = -x^{2k+1} = -f(x) \quad k \in \mathbb{Z}$$

dove la penultima uguaglianza è data dal fatto che il -1 è elevato ad una potenza dispari.

Un'ulteriore definizione legata a una proprietà particolare di una funzione è data nella seguente definizione:

Funzione periodica

Def. 2.1.4 (Funzione periodica) *Una funzione $f(x)$ si dice periodica se verifica la seguente proprietà:*

$$f(x + kT) = f(x) \quad k \in \mathbb{Z} \tag{2.4}$$

*per un dato valore della costante T che prende il nome di **periodo** della funzione.*

La caratteristica fondamentale di una funzione periodica è, dunque, che assume gli stessi valori ogni qual volta il proprio argomento aumenta o diminuisce di un periodo T.

2.1.1 Proprietà grafiche delle funzioni pari, dispari e periodiche

I grafici delle funzioni che verificano una tra le proprietà introdotte dalle Def. 2.1.2, 2.1.3 e 2.1.4 hanno delle particolarità grafiche notevoli, che, da un lato, ci permettono di disegnare più facilmente il grafico di una data funzione, dall'altro lato consentono di verificare se una funzione è pari, dispari o periodica semplicemente osservandone il grafico.

2.2 Funzioni goniometriche fondamentali: $\sin$ e $\cos$

In questa sezione introdurremo le due funzioni che stanno alla base di tutta la trigonometria e da cui sono normalmente derivate tutte le altre funzioni goniometriche.

Tali funzioni goniometriche fondamentali sono chiamate $\sin$ letto **seno** e $\cos$ letto **coseno**.
La definizione di queste due funzioni è data a partire da una *circonferenza* $\mathscr{C}$ il cui centro O sia anche l'origine di un sistema di assi cartesiani x e y.
Sia dato un *angolo* α con origine in O e formato da due semirette di cui una coincidente con l'asse x e l'altra che interseca la circonferenza nel punto P come Fig. 2.1, posso costriure le due proiezioni del punto P sull'asse x e y, tali proiezioni corrisponderanno rispettivamente all'*ascissa* e all'*ordinata* del punto P.

Grazie a tali proiezioni possiamo definire:

Seno

Def. 2.2.1 (Seno) *il seno dell'angolo α, indicato con $\sin\alpha$, è il **rapporto** tra il segmento $\overline{RO}$, proiezione del punto P sull'asse y, e il raggio della circonferenza $\overline{PO}$. Ovvero:*

$$\sin\alpha = \frac{RO}{PO} \tag{2.5}$$

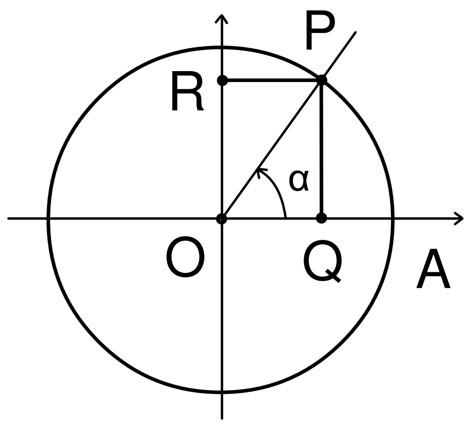

Figura 2.1: *Definizione di* sin *e* cos

Def. 2.2.2 (Coseno) *il coseno dell'angolo α, indicato con $\cos\alpha$, è il* ***rapporto*** *tra il segmento $\overline{QO}$, proiezione del punto Q sull'asse x, e il raggio della circonferenza $\overline{PO}$. Ovvero:*

$$\sin\alpha = \frac{QO}{PO} \tag{2.6}$$

E' da notare che se la circonferenza è di **raggio unitario** ovvero se $\mathbf{R = 1}$ (**circonferenza goniometrica**) le precedenti relazioni si riducono a:

$$\sin\alpha = RO \quad \wedge \quad \cos\alpha = QO \tag{2.7}$$

Dunque in questo caso particolare $\sin$ e $\cos$ sono esattamente uguali alle proiezioni del punto P sugli assi cartesiani scelti.

L'andamento grafico del $\sin$ in funzione del suo argomento è dato in Fig. 2.2, mentre quello della funzione $\cos$ è quello di Fig. 2.3.

2.3 Proprietà di $\sin$ e $\cos$

Dalle Def. 2.2.1 e 2.2.2 risultano subito chiare alcune proprietà che accomunano $\sin$ e $\cos$.
Tali proprietà sono:

- Non vi sono valori che un angolo non può assumere, siano essi positivi o negativi, inoltre dato qualsiasi angolo è sempre possibile costruire le proiezioni RO e QO di Fig. 2.1, il dominio sia di $\sin$ che di $\cos$ è dunque tutto l'asse reale, sia α il generico argomento della funzione si può quindi avere:

$$\alpha \in \mathbb{R} \tag{2.8}$$

- $\sin$ **e** $\cos$ **sono funzioni periodiche:** questo significa che assumono gli stessi valori periodicamente all'aumentare della loro variabile indipendente, chiamiamola

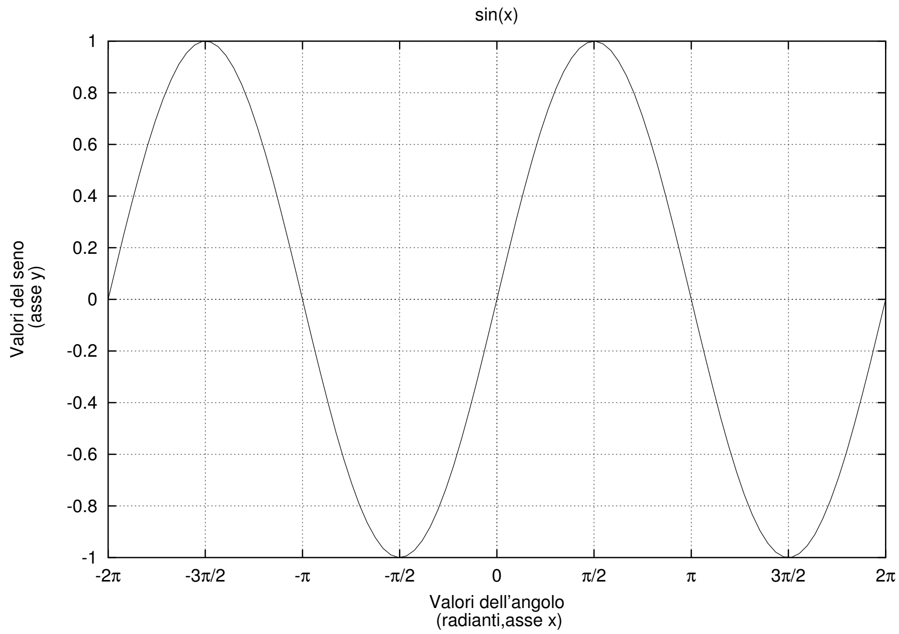

Figura 2.2: *Grafico della funzione seno*

α.
Questo è chiara conseguenza del fatto che angoli che *differiscono di un angolo giro* sono in realtà equivalenti dal punto di vista delle proiezioni generate come quelle in Fig. 2.1.
Il periodo vale dunque un angolo giro, ovvero (in radianti): $T = 2\pi$
Valgono, dunque, le relazioni:

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha \quad k \in \mathbb{N} \tag{2.9}$$

$$\cos(\alpha + 2h\pi) = \cos\alpha \quad h \in \mathbb{N} \tag{2.10}$$

Teorema fondamentale della trigonometria

- Vale il seguente teorema:

Th. 2.3.1 (Teorema fondamentale della trigonometria) *Dato un angolo α qualsiasi tra il suo* sin *e il suo* cos *vale la relazione:*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{2.11}$$

Dimostrazione:
Si guardi sempre la Fig.2.1 e si considerino le Def 2.2.1 e 2.2.2. Da tali definizioni si ricava che:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{RO^2 + QO^2}{PO^2}$$

per il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo POQ e notando che $RO \equiv PQ$ vale la relazione:

$$RO^2 + QO^2 = PO^2.$$

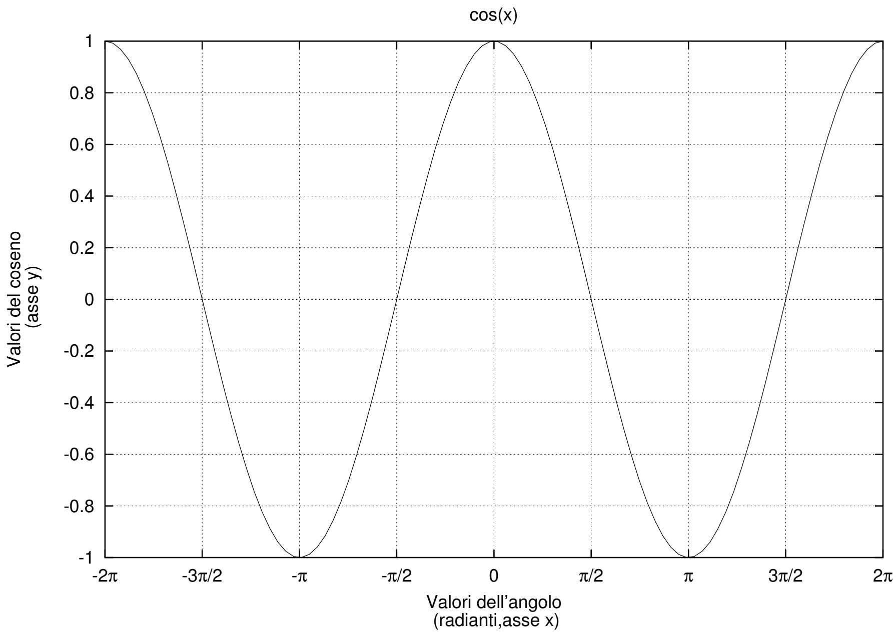

Figura 2.3: *Grafico della funzione coseno*

In definitiva si ottiene:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{PO^2}{PO^2} \equiv 1$$

Q.E.D.

- $\sin$ **e** $\cos$ **sono funzioni limitate**, ovvero i valori che possono assumere sono limitati ad un **intervallo** dell'asse reale $\mathbb{R}$. Nel nostro caso l'intervallo sarà anche chiuso, ovvero conterrà i suoi estremi. In particolare vale il seguente teorema:

Limitatezza di $\sin$ e $\cos$

Th. 2.3.2 (Limitatezza di $\sin$ **e** $\cos$**)** *Il* $\sin$ *e il* $\cos$ *sono funzioni limitate e in particolare il loro modulo non puó mai essere superiore all'unità, ovvero (sia* α *il generico angolo argomento delle funzioni):*

$$|\sin \alpha| \leq 1 \quad \wedge \quad |\cos \alpha| \leq 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \tag{2.12}$$

Dimostrazione: questo teorema è conseguenza diretta del Th. 2.3.1 dimostrato in precedenza. In particolare se la somma di due numeri non negativi (positivi o nulli) è uguale a 1 si dovrà per forza avere:

$$\sin^2 \alpha \leq 1 \quad \wedge \quad \cos^2 \alpha \leq 1$$

da cui la tesi.

Q.E.D.

- Il $\sin$ è una **funzione dispari**, ovvero, qualunque sia il suo argomento, vale la relazione:
$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \tag{2.13}$$
Infatti come si può vedere dalla Fig. 2.4 passando da un angolo α ad un angolo $-\alpha$ l'ordinata del punto P sulla circonferenza goniometrica non cambia in modulo, ma cambia solo nel segno passando da $+$ a meno per angoli tra 0 e π, e da $-$ a $+$ per angoli tra π e 2π.
Questo giustifica l'eq.2.13 che é esattamente la proprietà che una funzione dispari deve verificare.

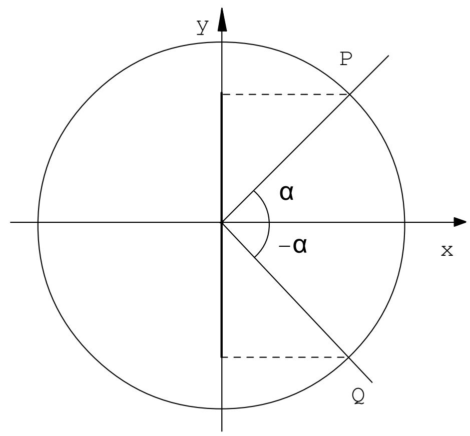

Figura 2.4: *Il seno é una funzione dispari*

- Il $\cos$ è una **funzione pari**, ovvero, qualunque sia il suo argomento, vale la relazione:
$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \tag{2.14}$$
Infatti cambiando di segno un generico angolo α passando da α a $-\alpha$ l'ascissa del punto P sulla circonferenza goniometrica non camobia nè in modulo nè in segno (si veda Fig.2.5). Questo fa sì che per il seno valga l'eq.2.14 e che esso sia dunque dispari su tutto il proprio dominio $\mathbb{R}$.

2.4 Funzioni goniometriche derivate da $\sin$ e $\cos$

Le funzioni $\sin$ e $\cos$, come detto, possono considerarsi le funzioni fondamentali della trigonometria, da esse possono ricavarsi altre funzioni utili in alcune applicazioni della matematica.
Tali funzioni sono descritte nelle seguenti sottosezioni.

2.4.1 Tangente

Tangente

Def. 2.4.1 (Tangente) *Si definisce tangente dell'angolo α il rapporto tra il* $\sin$ *e il* $\cos$ *dell'angolo stesso. In formula questa relazione si esprime con:*
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \tag{2.15}$$

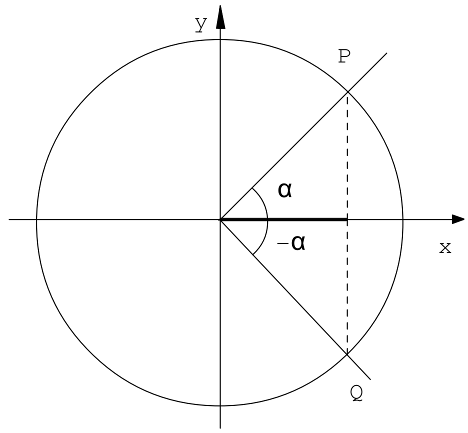

Figura 2.5: *Il coseno é una funzione pari*

Il grafico della tangente al variare del proprio argomento è quello mostrato in Fig. 2.6.

2.4.2 Cotangente

Cotangente

Def. 2.4.2 (Cotangente) *Si definisce cotangente dell'angolo α il rapporto tra il* $\sin$ *e il* $\cos$ *dell'angolo stesso, ovvero l'inverso della tangente dell'angolo come definita in Def. 2.4.1. In formula si ha:*

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \tag{2.16}$$

Il grafico della cotangente è quello mostrato in Fig. 2.7.

2.4.3 Secante

Secante

Def. 2.4.3 (Secante) *Si definisce secante dell'angolo α l'inverso del* $\sin$ *dell'angolo stesso, ovvero:*

$$\sec\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \tag{2.17}$$

Il grafico della secante è quello mostrato in Fig. 2.8.

2.4.4 Cosecante

Cosecante

Def. 2.4.4 (Cosecante) *Si definisce cosecante dell'angolo α l'inverso del* $\cos$ *dell'angolo stesso, ovvero:*

$$\csc\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \tag{2.18}$$

Il grafico della cosecante è quello mostrato in Fig. 2.9.

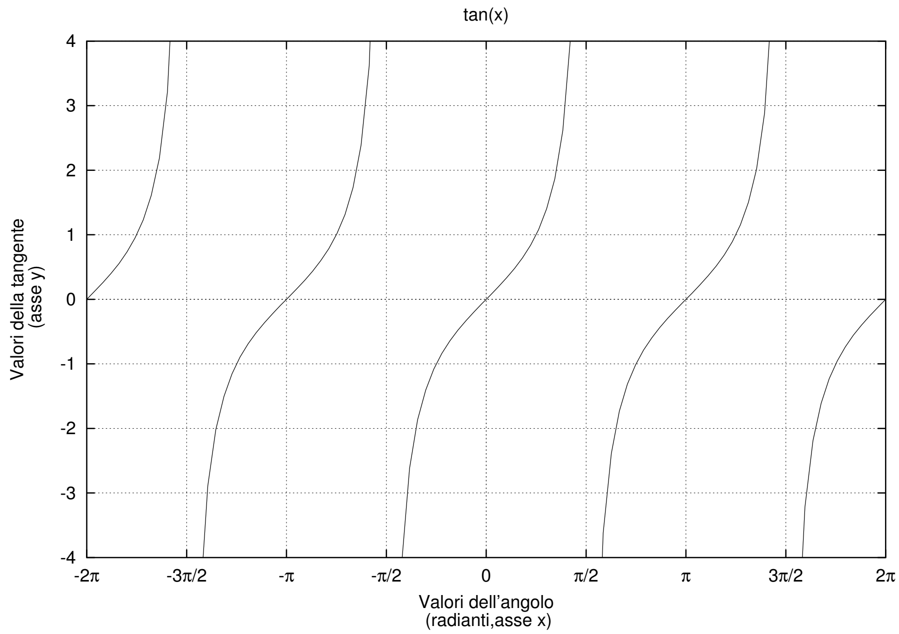

Figura 2.6: *Grafico della funzione tangente*

2.5 Proprietà delle funzioni goniometriche derivate da $\sin$ e $\cos$

2.5.1 Proprietà della Tangente

Le proprietà della tangente di un angolo sono direttamente ricavabili dalle Def. 2.4.1 e dalle proprietà di $\sin$ e $\cos$. Tali proprietà sono:

- **Dominio:** il dominio della funzione tangente non è tutto l'asse reale, infatti i punti in cui $\cos\alpha = 0$ sono singolarità del denominatore e mandano a ∞ la funzione.
  Tali angoli vanno esclusi dal dominio.
  In definitiva il **dominio** della funzione tangente risulta:

  $$\mathbb{D}_{\tan\alpha} = \{\alpha \,|\, \alpha \neq \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \tag{2.19}$$

  Gli assi paralleli all'asse y per cui la funzione tangente va a ∞ sono detti **asintoti** della funzione tangente.
  Dunque la tangente ha un numero infinito di asintoti di equazione:

  $$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \tag{2.20}$$

- **Periodicitá:** anche la funzione $\tan$ come le funzioni $\sin$ e $\cos$ è una funzione periodica nel suo argomento α. In particolare vale il seguente teorema:

Periodicità della tangente

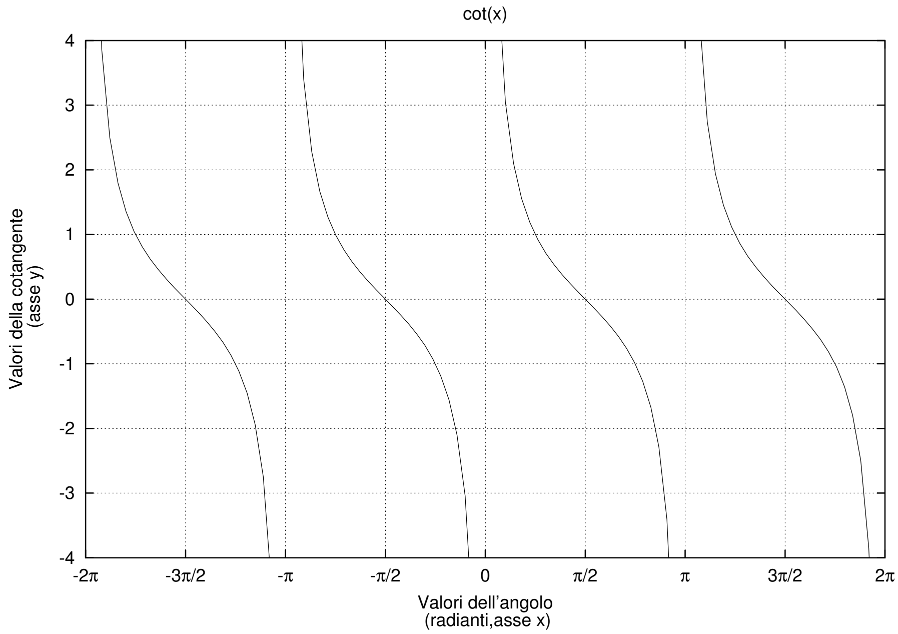

Figura 2.7: *Grafico della funzione cotangente*

Th. 2.5.1 (Periodicità della tangente) *la tangente di un angolo α è una funzione periodica di **periodo** π ovvero:*

$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha \quad k \in \mathbb{Z} \tag{2.21}$$

Dimostrazione: basandosi sulla sezione 2.7 e sulla definizione di tangente 2.4.1 si può scrivere:

$$\tan(\alpha + k\pi) = \frac{\sin(\alpha + k\pi)}{\cos(\alpha + k\pi)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

che è la nostra tesi.

Q.E.D.

- **La tangente è una funzione dispari:**

La tangente è dispari

Th. 2.5.2 (La tangente è dispari) *La funzione tangente è dispari nel proprio argomento, ovvero vale la relazione:*

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha \quad \forall\alpha \in \mathbb{D}_{\tan} \tag{2.22}$$

Dimostrazione:
utilizzando le proprietà definite nelle equazioni 2.13 e 2.14

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

Q.E.D.

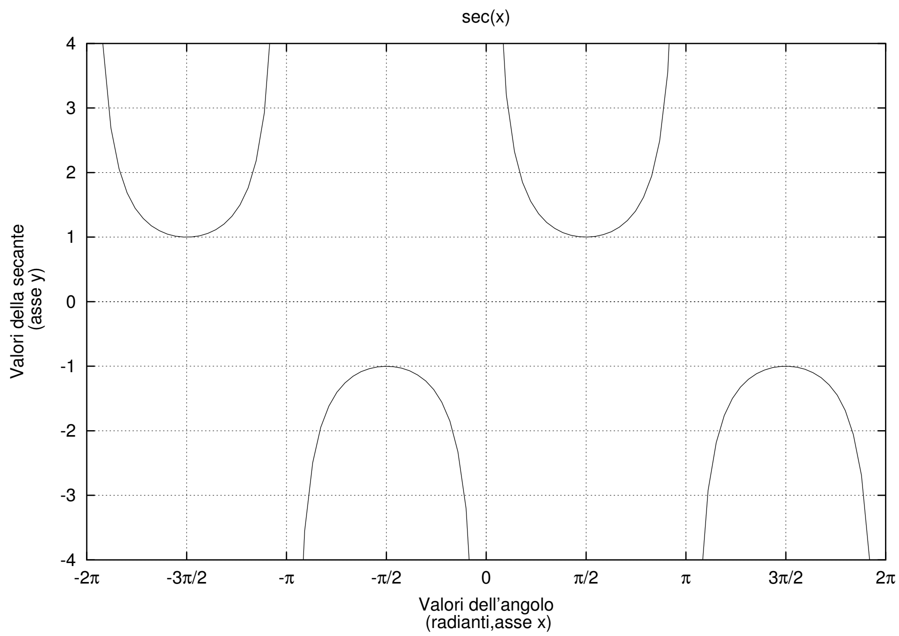

Figura 2.8: *Grafico della funzione secante*

2.5.2 Proprietà della Cotangente

Le proprietà della cotangente sono molto simili a quelle della tangente, ma con alcune differenze:

- **Dominio:** il dominio della funzione cotangente non è tutto l'asse reale esattamente come succedeva per la tangente, ma ora i punti da escludere sono quelli per cui $\sin\alpha = 0$ come si vede dalla Def. 2.4.2. Il dominio della cotangente dunque risulta essere:

$$\mathbb{D}_{\cot\alpha} = \{\alpha \,|\, \alpha \neq \pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \tag{2.23}$$

  Per i punti esclusi dal dominio la funzione cotangente va a ∞ e dunque gli assi paralleli all'asse y in corrispondeza di tali punti sono degli **asintoti**.
  La funzione cotangente ha dunque, come la tangente, infiniti asintoti. La loro equazione è:

$$x = \pi + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \tag{2.24}$$

- Periodicitá della cotangente: come la tangente, anche la cotangente è un funzione periodica.
  Il periodo è inoltre lo stesso, ovverto $T = \pi$, vale infatti il seguente teorema:

Periodicità della cotangente

Th. 2.5.3 (Periodicità della cotangente) *la cotangente di un angolo α è una funzione periodica di periodo π ovvero:*

$$\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha \quad k \in \mathbb{Z} \tag{2.25}$$

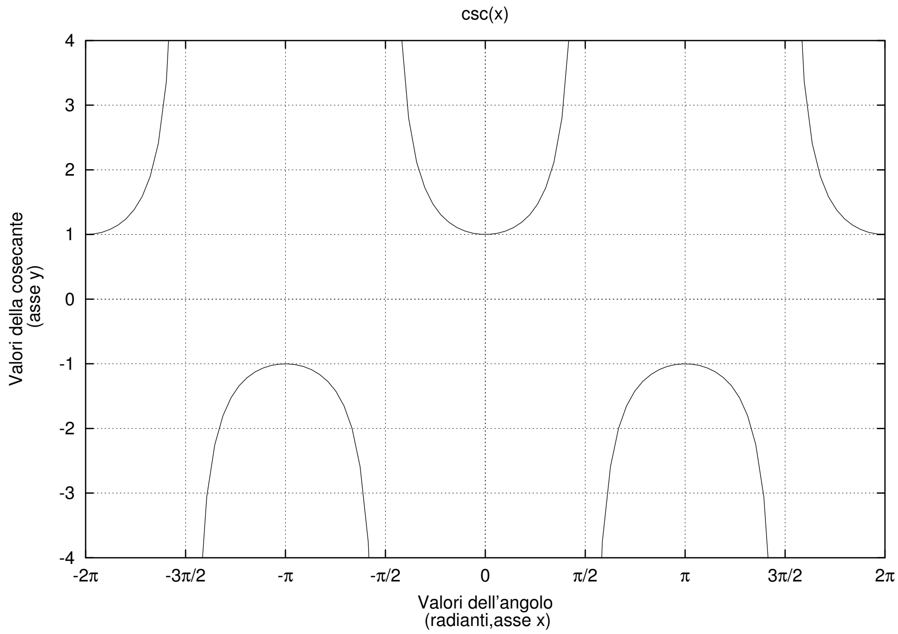

Figura 2.9: *Grafico della funzione cosecante*

Dimostrazione: Basandosi sulla sezione 2.7 e sulla definizione di cotangente 2.4.2 si puó scrivere:

$$\cot(\alpha + k\pi) = \frac{\cos(\alpha + k\pi)}{\sin(\alpha + k\pi)} = \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha$$

che è la nostra tesi.

Q.E.D.

- **La cotangente è un funzione dispari:**

La cotangente è dispari

Th. 2.5.4 (La cotangente è dispari) *la funzione cotangente è una funzione dispari, ovvero vale la seguente relazione:*

$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha \tag{2.26}$$

Dimostrazione: *ripercorre esattamente i passaggi fatti nella dimostrazione del Th. 2.5.2*

2.5.3 Proprietà della Secante

Le proprietà della funzione secante di un angolo sono strettamente legate alle proprietà del seno definite nella sezione 2.3

- **Dominio:** il dominio della funzione secante non è tutto l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, vanno infatti esclusi i punti per cui si ha $\sin\alpha = 0$.
  E' vero dunque che:
  $$\mathbb{D}_{sec} = \{\alpha \,|\, \alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \tag{2.27}$$
  Nei punti esclusi dal dominio la funzione secante tende all'∞ e dunque per gli assi paralleli all'asse y essa ammette degli **asintoti**.
  L'equazione di tali asintoti è:
  $$x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \tag{2.28}$$
- **Periodicità della secante:**
  La funzione secante dipendendo dal solo seno che appare in forma lineare nella def.2.4.3 mostra la stessa peiodicità del seno stesso.
  Questo significa che il suo periodo è $T = 2\pi$ e vale la relazione:
  $$\sec(\alpha + 2k\pi) = \sec(\alpha) \quad k \in \mathbb{Z} \tag{2.29}$$
- **La secante è una funzione dispari:**

La secante è dispari

Th. 2.5.5 (La secante è dispari) *La funzione secante è dispari sul proprio dominio, ovvero per ogni angolo nel proprio dominio vale la relazione:*
$$\sec(-\alpha) = -\sec(-\alpha) \tag{2.30}$$

Dimostrazione:
Questo teorema è conseguenza diretta della proprietà di simmetria del seno, ovvero si ha:
$$\sec(-\alpha) = \frac{1}{\sin(-\alpha)} = \frac{1}{-\sin(\alpha)} = -\sec(\alpha)$$

Q.E.D.

2.5.4 Proprietà della Cosecante

Come per le proprietà della secante ci si rifà alle proprietà del seno da cui essa è derivata così per le proprietà della cosecante ci si rifà alle proprietà del coseno da cui è definita in def.2.4.4.
In particolare valogono le seguenti osservazioni:

- **Dominio:** il dominio delle funzione cosecante non è tutto l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, vanno infatti esclusi i punti per cui si ha $\cos\alpha = 0$. E' vero dunque che:
  $$\mathbb{D}_{csc} = \{\alpha \,|\, \alpha \neq \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \tag{2.31}$$
- **Periodicità della cosecante:** La funzione cosecante dipendendo dal solo coseno che appare in forma lineare nella def.2.4.4 mostra la stessa peiodicità del coseno stesso.
  Questo significa che il suo periodo è $T = 2\pi$ e vale la relazione:
  $$\csc(\alpha + 2k\pi) = \sec(\alpha) \quad k \in \mathbb{Z} \tag{2.32}$$

- **La cosecante è una funzione pari:**

secante è pari

Th. 2.5.6 (La cosecante è pari) *la funzione cosecante è una funzione pari su tutto il proprio dominio, ovvero vale la relazione:*

$$\csc(-\alpha) = \csc(\alpha) \tag{2.33}$$

Dimostrazione:
Questo teorema è conseguenza diretta della proprietà del coseno di essere pari, infatti si ha:

$$\csc(-\alpha) = \frac{1}{\cos(-\alpha)} = \frac{1}{\cos(\alpha)} = \csc(\alpha)$$

Q.E.D.

2.6 Valori notevoli delle funzioni goniometriche

Generalmente il valore di una funzione goniometrica dato un angolo α è un numero reale che non ammette una scrittura semplificata in termini di quantità comunemente note.
Vi sono però alcuni valori per gli angoli che fanno eccezione a questa regola generale e per i quali si può esprimere in modo semplice il valore delle funzioni goniometriche ad essi associati.
Per ricavare tali valori basta rifarsi alla circonferenza goniometrica (di raggio $R = 1$), come quella in Fig. 2.1 e al teorema di Pitagora applicato al triangolo POQ. La tabella che si ricava è la Tab. 2.1 dove sono stati specificati solo i valori per $\sin$, $\cos$, $\tan$ e $\cot$.
I valori per le altre funzioni goniometriche sono immediatamente ricavabili da questi grazie alle Def.2.4.3 e 2.4.4.
Si noti che nella Tab. 2.1 per chiarezza sono riportati sia il valore 0 che il valore 2π per

angoli/funzioni	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	0	$-\infty$	0
$\cot$	$+\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\infty$	0	$+\infty$

Tabella 2.1: Tabella degli angoli notevoli

l'angolo anche se questa dicitura è sovrabbondante date che 0 e 2π sono equivalenti ai fini delle funzioni goniometriche riportate.

2.7 Relazioni notevoli tra le funzioni goniometriche

Per come sono state definite è evidente che le funzioni seno e coseno non sono indipendenti tra loro, ma in qualche modo legate.
Si possono dunque definire formule che permettano di passare alla prima nota la seconda e viceversa.
Valgono le seguenti relazioni:

- **Noto il seno ricavare il coseno e viceversa:** Un primo esempio di legame è il Th. 2.3.1 che lega i valori assunti da seno e coseno. In modo che definito l'uno, l'altro è noto almeno nel modulo (ma **non** nel segno).

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \quad \wedge \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \tag{2.34}$$

- **Nota la tangente ricavare seno e coseno:** Vale la formula:

Da tangente a seno e coseno

Th. 2.7.1 (Da tangente a seno e coseno) *Sia* $\tan\alpha$ *con* $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ *la tangente nota si ha:*

$$\sin\alpha = \pm\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \quad \wedge \quad \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \tag{2.35}$$

Dimostrazione:
Seconda relazione: Il Th. 2.3.1 ci dice che:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

dividendo ambo i membri per il $\cos\alpha$ che, visto che la tangente esiste finita non è nullo, si ha:

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

da cui, girando l'uguaglianza si ottiene la tesi.
Prima relazione: data la Def. 2.4.1 si ha:

$$\sin\alpha = \tan\alpha\,\cos\alpha$$

sostituendo la seconda equazione in quella qui sopra si ha la tesi.

Q.E.D.

2.8 Funzioni goniometriche inverse

Nelle sezioni precedenti abbiamo visto come ad un angolo, attraverso le funzioni goniometriche, si possa associare, in alcuni casi un numero reale.
Ora ci occuperemo di calcolare in quali casi, dato un numero reale, esista un angolo corrispondente che applicato a una determinata funzione goniometrica dia il numero di partenza.
Occuparsi di questo tipo di problema significa occuparsi dell'**invertibilitá** delle funzioni goniometriche.
Prima di occuparci del problema vediamo esattamente cos'è l'inversa di una funzione:

Funzione invertibile

Def. 2.8.1 (Funzione invertibile) *una data funzione* $y = f(x)$ *si dice* ***invertibile*** *su un insieme* $\mathbb{A}$ *se esiste un funzione* $f^{-1}(y)$ *tale che:*

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{A} \tag{2.36}$$

É da notare che secondo la Def. 2.8.1 la funzione inversa deve innanzi tutto essere un funzione e quindi deve rispondere ai requisiti richieti dalla Def. 2.1.1.
In particolare *ad ogni punto del suo dominio deve corrispondere uno e un solo punto del dominio di* $f(x)$, questo requisito è il principale motivo per cui **il dominio della funzione inversa spesso non coincide con tutti i valori che la funzione diretta puó assumere**.

E' inoltre da notare che il ruolo di funzione diretta o inversa è intercambiabile, nel senso che data una funzione essa corrisponde all'inversa della sua funzione inversa dove essa è definita.
L'equazione 2.36 puó dunque essere generalizzata a:

$$f^{-1}(f(x)) = f((f(x)^{-1})) = x \tag{2.37}$$

nel dominio comune a $f(x)$ e $f^{-1}(x)$.

Graficamente la funzione inversa è facile da rappresentare, infatti essa è la **simmetrica** della funzione diretta rispetto alla retta $y = x$.

2.8.1 La funzione $\arcsin$

Come gia detto nella sezione 2.3 la funzione seno assume solo valori compresi tra -1 e 1.
Dalla sua periodicità sappiamo però che sono infiniti gli angoli che danno un determinato valore di y.
Non è dunque possibile invertire la funzione $\sin$ **su tutto il suo dominio** perchè viene a cadere l'unicità del valore di x associato al valore di y richiesta nella sezione 2.8.

Se ci restringiamo però a un dominio per il seno tale che $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ allora effettivamente vi è una corrispondenza uno a uno tra l'intervallo $[-1, 1]$ sulle y e il dominio del seno $[-\pi/2, \pi/2]$.
Si veda la Fig2.2 per capire nel dettaglio.

Si può dunque definire sull'intervallo sopra citato la funzione inversa del seno che viene detta $\arcsin$ (arcoseno).

Funzione arcoseno

Def. 2.8.2 (Funzione arcoseno) *La funzione inversa del seno sull'intervallo* $[-\pi/2, \pi/2]$ *è detta* $\arcsin$ *(arcoseno) ed è così definita:*

$$\arcsin(x) : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2] \tag{2.38}$$

Il grafico della funzione è rappresentato in Fig. 2.10.
Come si vede dall'intervallo di valori che la funzione arcoseno può assumere essa, come il seno, è una funzione limitata.

2.8.2 La funzione $\arccos$

Lo stesso discorso fatto per la funzione sino vale anche per la funzione coseno, infatti anche per essa bisogna restringere il dominio affinché sia invertibile.

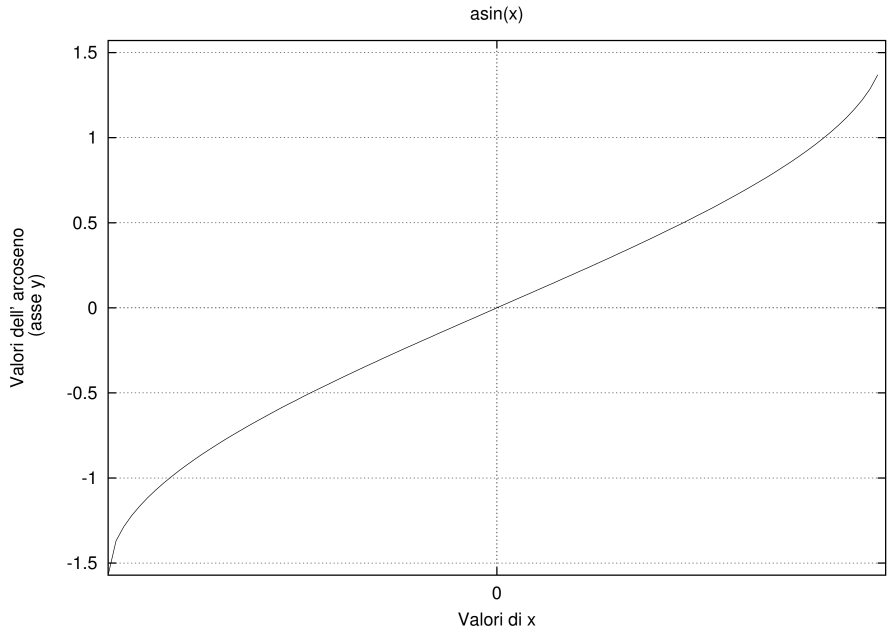

Figura 2.10: *Arcoseno dell'angolo*

Il restringimento è però diverso da quello effettuato per la funzione coseno.

Funzione arcocoseno

Def. 2.8.3 (Funzione arcocoseno) *La funzione inversa del coseno sull'intervallo* $[0, \pi]$ *è detta* arccos *(arcocoseno) ed è così definita:*

$$\arccos(x) : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \tag{2.39}$$

Il grafico della funzione è rappresentato in Fig. 2.11.

2.8.3 La funzione $\arctan$

Anche la funzione tangente non è invertibile su tutto il suo dominio.
Questo è sempre causa del fatto che più valori di x restituiscono uno stesso valore di y.
I valori di x per cui si ha una stessa y si ripetono periodicamente; se perció restringo il mio dominio a un solo periodo della funzione tangente, allora ad una y corrisponde una e una sola x il che ci permette l'inversione.
Il periodo comunemente scelto è quello dell'intervallo $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.
Posso dunque introdurre la seguente definizione:

Funzione arcotangente

Def. 2.8.4 (Funzione arcotangente) *La funzione inversa della funzione tangente sull'intervallo* $(-\pi/2, \pi/2)$ *è detta* arctan *(arcotangente) ed è così definita:*

$$\arctan(x) : \mathbb{R} \rightarrow [-\pi/2, \pi/2] \tag{2.40}$$

si noti che a differenza dei casi precedenti il **dominio** della funzione arcotangente è **tutto l'asse reale**, ciò ećonseguenza del fatto che la funzione tangente da cui siamo

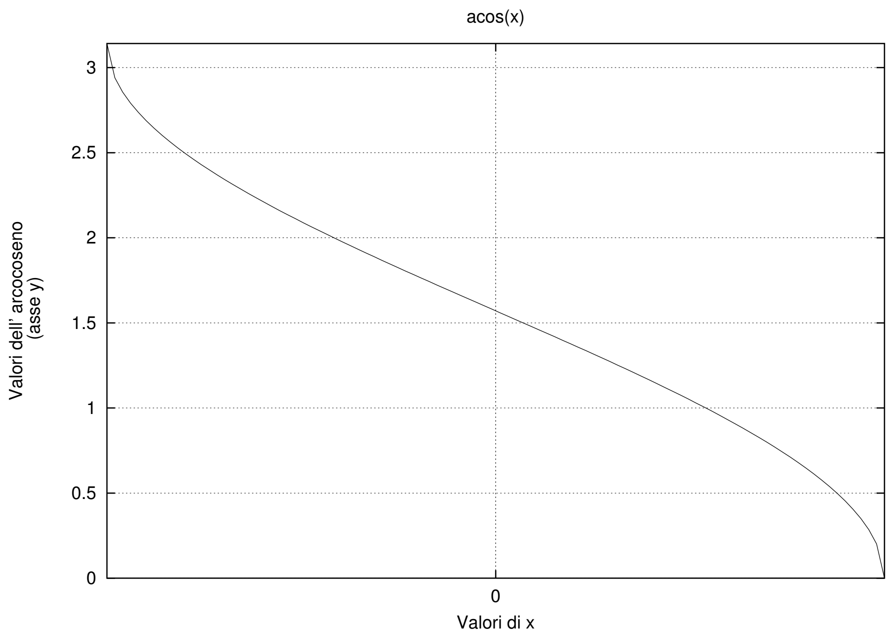

Figura 2.11: *Arcocoseno dell'angolo*

partiti non era una funzione limitata.
La funzione arcotangente è invece limitata ed i valori che essa può assumere sotto ristretti all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$.
Il grafico dell'arcotangente, inoltre, si avvicina a $-\pi/2$ o $\pi/2$ al tendere della variabile x a $+\infty$ o $-\infty$(Fig.2.12. Questa caratteristica si riassume dicendo che l'arcotangente ammette due asintoti orizzontali di equazione:

$$y = \pm\frac{\pi}{2} \tag{2.41}$$

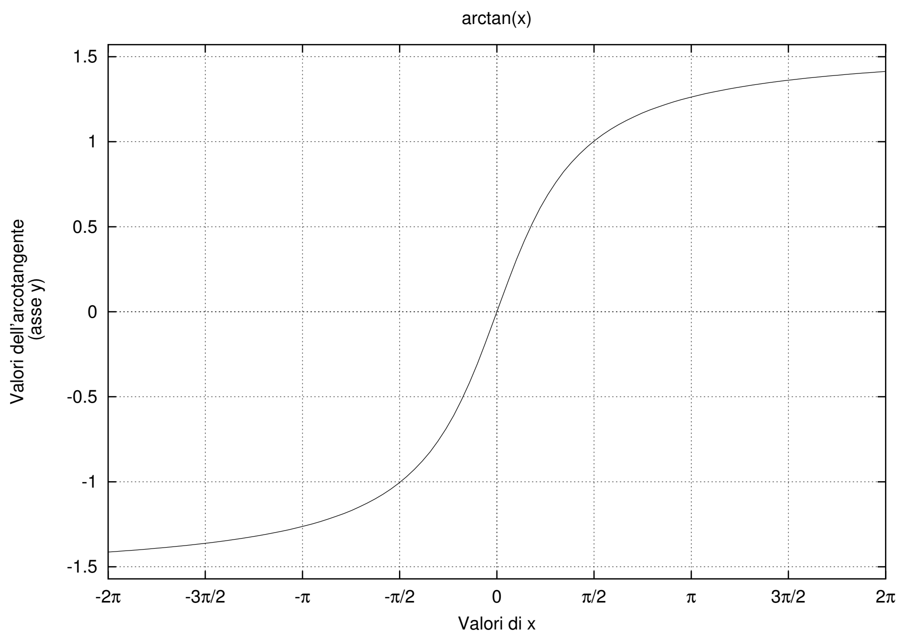

Figura 2.12: *Arcotangente dell'angolo*

Capitolo 3

Archi associati

3.1 Definizioni preliminari

Questo capitolo si dedica alle relazioni tra funzioni goniometriche per angoli che verificano determinate proprietà.
In particolare si occupa di vedere come le funzioni trigonometriche variano quando gli angoli variano di quantità notevoli nella trigonometria come π, $\pi/2$, 2π, etc. Prima di addentrarci nell'argomento è però opportuno dare alcune definizioni preliminari.

Angoli complementari

Def. 3.1.1 (Angoli complementari) *Due angoli α e β si dicono **complementari** se, a meno di $2k\pi$, la loro somma è $\pi/2$ radianti. Ovvero se vale la relazione:*

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \tag{3.1}$$

Esempio angoli complementari

Es. 3.1.1 (Esempio angoli complementari) *Siano dati $\alpha = \pi/3$ e $\beta = 25\pi/6$ verifichiamo che siano complementari.*
Prima di tutto riduciamo β ad un angolo tra 0 e 2π radianti. Per far ciò dividiamo la frazione $29\pi/6$ in quoziente e resto:

$$\frac{25}{6}\pi = 4\pi + \frac{\pi}{6}$$

Dunque ai fini goniometrici si ha $\beta = \frac{\pi}{6}$, ovvero l'angolo di partenza è l'angolo $\frac{\pi}{6}$ dopo aver compiuto 2 giri completi.
Ora se β e α sono complementari devono verificare l'equazione in Def. 3.1.1, infatti si ha:

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

dunque α e β sono complementari.

Angoli supplementari

Def. 3.1.2 (Angoli supplementari) *Due angoli α e β si dicono **supplementari** se, a meno di $2k\pi$, la loro somma è un angolo di π radianti. Ovvero se vale la relazione:*

$$\alpha + \beta = \pi \tag{3.2}$$

Esempio angoli supplementari

Es. 3.1.2 (Esempio angoli supplementari) *Siano dati $\alpha = \pi/4$ e $\beta = 35\pi/4$ verifichiamo che siano supplementari.*

Prima di tutto riduciamo β ad un angolo tra 0 e 2π radianti. Per far ciò dividiamo la frazione $35\pi/4$ in quoziente e resto:

$$\frac{35}{4}\pi = 8\pi + \frac{3}{4}\pi$$

Dunque ai fini goniometrici si ha $\beta = \frac{3}{4}\pi$.
Ora se β e α sono supplementari devono verificare l'equazione in Def. 3.1.2, infatti si ha:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\pi = \pi$$

dunque α e β sono supplementari.

Angoli esplementari

Def. 3.1.3 (Angoli esplementari) *Due angoli α e β si dicono* ***esplementari*** *se sono uguali a meno di $2k\pi$. Ovvero se vale la relazione:*

$$\alpha = \beta - 2\pi \quad \leftrightarrow \quad \beta = \alpha + 2\pi \tag{3.3}$$

Esempio angoli esplementari

Es. 3.1.3 (Esempio angoli esplementari) *Siano dati $\alpha = \pi/6$ e $\beta = 25\pi/6$ verifichiamo che siano esplementari.*
Per far ciò dividiamo la frazione $25\pi/6$ in quoziente e resto:

$$\frac{25}{6}\pi = 4\pi + \frac{\pi}{6}$$

Dunque ai fini goniometrici si ha $\beta = \frac{\pi}{6}\pi = \alpha$ e gli angoli risultano esplementari per la Def. 3.1.3

Angoli opposti

Def. 3.1.4 (Angoli opposti) *Due angoli α e β si dicono* ***opposti*** *se, a meno di $2k\pi$ differiscono solo in segno. Ovvero se vale la relazione:*

$$\alpha = -\beta \quad \leftrightarrow \quad \beta = -\alpha \tag{3.4}$$

3.2 Relazioni per gli angoli associati

Questa sezione descrive il comportamento delle funzioni goniometriche nei confronti degli angolo *complementari, supplementari, esplementari e opposti* sopra definiti.

3.2.1 Angoli supplementari

Angoli supplementari

Th. 3.2.1 (Angoli supplementari) *Sia dato un angolo α e il suo supplementare $\pi - \alpha$ per le funzioni goniometriche ad esso associate valogono le seguenti relazioni:*

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \tag{3.5}$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \tag{3.6}$$
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha \tag{3.7}$$
$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha \tag{3.8}$$

3.2.2 Angoli esplementari

li esplementari

Th. 3.2.2 (Angoli esplementari) *Sia dato un angolo α e il suo supplementare $2\pi - \alpha$ per le funzioni goniometriche ad esso associate valogono le seguenti relazioni:*

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha \tag{3.9}$$
$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha \tag{3.10}$$
$$\tan(2\pi - \alpha) = -\tan\alpha \tag{3.11}$$
$$\cot(2\pi - \alpha) = -\cot\alpha \tag{3.12}$$

3.2.3 Angoli opposti

Le relazioni per gli angoli opposti discendono direttamente dalle proprietà di parità delle varie funzioni goniometriche descritte nel capitolo precedente.
Dunque tali proprietà sono già state ricavate e vengono qui riportate solo per completezza.

Angoli opposti

Th. 3.2.3 (Angoli opposti) *Sia dato un angolo α e il suo opposto $-\alpha$ per le funzioni goniometriche ad esso associate valogono le seguenti relazioni:*

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \tag{3.13}$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \tag{3.14}$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha \tag{3.15}$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha \tag{3.16}$$

3.2.4 Angoli complementari

Angoli complementari

Th. 3.2.4 (Angoli complementari) *Sia dato un angolo α e il suo complementare $\pi/2 - \alpha$ per le funzioni goniometriche ad esso associate valogono le seguenti relazioni:*

$$\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha \tag{3.17}$$
$$\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha \tag{3.18}$$
$$\tan(\pi/2 - \alpha) = \cot\alpha \tag{3.19}$$
$$\cot(\pi/2 - \alpha) = \tan\alpha \tag{3.20}$$

3.3 Tabella riassuntiva

La seguente tabella riassume tutte le relazioni presentate in questo capitolo.

Angoli complementari	
	$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$ $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$ $\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$ $\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$
Angoli supplementari	
	$\sin(\pi-\alpha)=\sin(\alpha)$ $\cos(\pi-\alpha)=-\cos(\alpha)$ $\tan(\pi-\alpha)=-\tan(\alpha)$ $\cot(\pi-\alpha)=-\cot(\alpha)$
Angoli esplementari	
	$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin(\alpha)$ $\cos(2\pi-\alpha)=\cos(\alpha)$ $\tan(2\pi-\alpha)=-\tan(\alpha)$ $\cot(2\pi-\alpha)=-\cot(\alpha)$
Angoli opposti	
	$\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$ $\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$ $\tan(-\alpha)=-\tan(\alpha)$ $\cot(-\alpha)=-\cot(\alpha)$

Tabella 3.1: Tabella riassuntiva per gli archi associati

Capitolo 4

Formule di addizione, sottrazione, bisezione, duplicazione e prostaferesi

Questo capitolo contiene tutte le relazioni principali tra angoli e funzioni goniometriche.
In particolare si occupa delle formule che legano somme algebriche e prodotti di angoli o funzioni goniometriche.

4.1 Formule di addizione e sottrazione

Le formule di addizione e sottrazione si occupano di trasformare funzioni goniometriche di somme o differenze di angoli in somme e prodotti di funzioni goniometriche degli angoli stessi.
Valgono i seguenti teroremi:

Coseno delle differenza

Th. 4.1.1 (Coseno delle differenza) *Il coseno della differenza tra due angoli, siano α e β è espresso in funzione del coseno e del seno degli angoli stessi dalla formula:*

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\,\cos\beta+\sin\alpha\,\sin\beta \tag{4.1}$$

Dimostrazione: Per la dimostrazione di questo teorema si osserivi la Fig.4.1 e si considerino $AM=\alpha$ e $AN=\beta$ archi qualsiasi.
Sia $\overline{MN}$ la corda sottesa dall'arco $MN=\alpha-\beta$.
Dal punto A si consideri un arco AB di lunghezza pari a MN, risulterà dunque, per costruzione, $\overline{AB}=\overline{MN}$. I punti finora definiti hanno coordinate:

$$\begin{gathered} A(1,0)\\ B(\cos[\alpha-\beta],\sin[\alpha-\beta])\\ N(\cos\beta,\sin\beta)\\ M(\cos\alpha,\sin\alpha)\end{gathered}$$

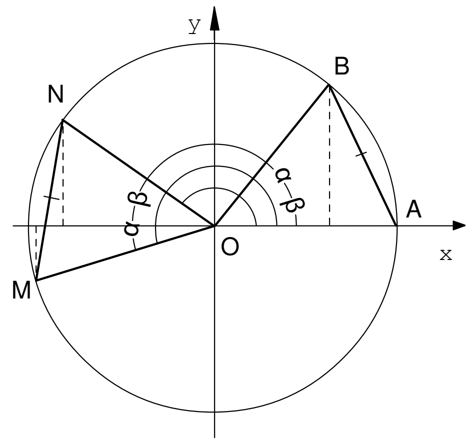

Figura 4.1: *Coseno della differenza tra due angoli*

Ricordando che la distanza di due punti sul piano cartesiano, siano (x_1, y_1) e (x_2, y_2) è data da:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - +(y_2 - y_1)^2} \tag{4.2}$$

e che essendo la circonferenza data goniometrica (raggio unitario) per i punti su essa vale sempre $d = 1$ posso scrivere:

$$\overline{AB} = \sqrt{[\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + [\sin(\alpha - \beta)^2 - 1]^2}$$

$$\overline{MN} = \sqrt{[\cos(\alpha) - \cos(\beta)]^2 + [\sin(\alpha)^2 - \sin(\beta)]^2}$$

Dato che, per costruzione, le corde sono uguali i due secondi membri dell'equazioni sopra citate devono essere uguali e dunque deve valere:

$$\sqrt{[\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + [\sin(\alpha - \beta)^2 - 1]^2} = \sqrt{[\cos(\alpha) - \cos(\beta)]^2 + [\sin(\alpha)^2 - \sin(\beta)]^2}$$

Elevo ambo i membri al quadrato e svolgo i conti per i quadrati sotto radice:

$$\begin{array}{rl} \text{I Membro:} & \cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 + \sin^2(\alpha - \beta) \\ \text{II Membro:} & \cos^2(\alpha) - 2\cos\alpha\,\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\,\sin\beta + \sin^2\beta \end{array}$$

Il primo membro si puó semplificare grazie alla relazione fondamentale della trigonometria:

$$\cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta) = 1 \quad \rightarrow \quad \text{I Membro: } -2\cos(\alpha - \beta) + 2$$

mentre il secondo, sempre grazie alla relazione fondamentale della trigonometria, si semplfica in:

$$\text{II Membro:} \quad -2\cos\alpha\,\cos\beta - 2\sin\alpha\,\sin\beta + 2$$

Uguagliando i due membri si ha:

$$-2\cos(\alpha - \beta) + 2 = -2\cos\alpha\,\cos\beta - 2\sin\alpha\,\sin\beta + 2$$

che dopo semplici passaggi algebrici ci dà la tesi.

Q.E.D.

no delle somma

Th. 4.1.2 (Coseno delle somma) *Il coseno della somma tra due angoli, siano α e β è espresso in funzione del coseno e del seno degli angoli stessi dalla formula:*

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta \tag{4.3}$$

Dimostrazione: partendo dal Th. 4.1.1 dimostrato in precedenza e sostituendo β con $-\beta$ nella formula si ha:

$$\cos(\alpha-(-\beta)) = \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ \cos(-\beta) + \sin(\alpha)\sin(-\beta)$$

viste le proprietá 2.13 e 2.14 si ha la tesi.

Q.E.D.

Seno delle somma

Th. 4.1.3 (Seno delle somma) *Il seno della somma tra due angoli, siano α e β è espresso in funzione del seno e del coseno degli angoli stessi dalla formula:*

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta \tag{4.4}$$

Dimostrazione: Si considerino le relazioni 3.17 ed in particolare la seguente:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right) = \sin(\phi)$$

grazie ad essa posso scrivere:

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)$$

ovvero, applicando la relazione data nel Th.4.1.1:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\ \cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\sin\beta\right)$$

sempre dalle relazioni 3.17 si ottiene la tesi.

Q.E.D.

Seno delle differenza

Th. 4.1.4 (Seno delle differenza) *Il seno della differenza tra due angoli, siano α e β è espresso in funzione del seno e del coseno degli angoli stessi dalla formula:*

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta - \cos\alpha\ \sin\beta \tag{4.5}$$

Dimostrazione: Si parte dalla relazione precedente sostituendo $\beta \to -\beta$, si ottiene:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\ \cos(-\beta) + \cos(\alpha)\ \sin(-\beta)$$

essendo il coseno una funzione pari e il seno dispari si ha la tesi.

Q.E.D.

Tangente della somma

Th. 4.1.5 (Tangente della somma) *la tangente della somma tra due angoli, siano α e β è espressa in funzione della tangente degli angoli stessi dalla formula:*

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\ \tan\beta} \tag{4.6}$$

nel caso in cui $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$ e $\beta \neq \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), e se la tangente della somma è definita, ovvero se $\alpha+\beta \neq \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Dimostrazione: dalla definizione di tangente 2.4.1 si ha:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

dai teoremi 4.1.2 e 4.1.3 si ha:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta}$$

dividendo ambo i membri per $\cos\alpha\,\cos\beta$, che esiste non nullo sotto le ipotesi date per α e β, si ottiene:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\frac{\sin\alpha\,\cos\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\,\sin\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\,\cos\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta} - \frac{\sin\alpha\,\sin\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta}}$$

Semplificando:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha\,\sin\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta}}$$

che, ricordando la Def. 2.4.1 e la nostra tesi.

Q.E.D.

Tangente della differenza

Th. 4.1.6 (Tangente della differenza) *la tangente della differenza tra due angoli, siano α e β è espressa in funzione della tangente degli angoli stessi dalla formula:*

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\,\tan\beta} \tag{4.7}$$

nel caso in cui $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$ e $\beta \neq \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), e se la tangente della somma è definita, ovvero se $\alpha + \beta \neq \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Dimostrazione: Partiamo del Th. 4.1.5 e sostituiamo $\beta \rightarrow -\beta$. Si ottiene:

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha\,\tan(-\beta)}$$

dato che la tangente è una funzione dispari si ottiene la tesi.

Q.E.D.

4.2 Formule di duplicazione

Le formule di duplicazione si occupano di esprimere la funzione goniometrica del doppio di un angolo in termini di funzioni goniometriche dell'angolo stesso.
Ovvero di costruire uguaglianze del tipo:

$$gonio(2\alpha) = f(\alpha) \tag{4.8}$$

dove con $gonio(2\alpha)$ abbiamo indicato la generica funzione goniometrica (ovvero $\sin$ o $\cos$ o $\tan$, etc) e $f(\alpha)$ è una generica combinazione di funzioni goniometriche con variabile α.

Valgono i seguenti teoremi:

del doppio dell'angolo

Th. 4.2.1 (Seno del doppio dell'angolo) *Il seno del doppio di un angolo α è dato in funzione dell'angolo α stesso dalla formula:*

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha \tag{4.9}$$

Dimostrazione: partendo dalla formula data nel Th. 4.1.3 si ha:

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\,\cos\alpha + \cos\alpha\,\sin\alpha$$

che grazie alla semplice proprietà commutativa e a una somma ci dà la tesi.

Q.E.D.

Coseno del doppio dell'angolo

Th. 4.2.2 (Coseno del doppio dell'angolo) *Il coseno del doppio di un angolo α è dato in funzione del coseno angolo α stesso dalla formula:*

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \tag{4.10}$$

Dimostrazione: partendo dal Th. 4.1.2 si ottiene:

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\,\cos\alpha - \sin\alpha\,\sin\alpha$$

da cui la tesi

Q.E.D.

Tangente del doppio dell'angolo

Th. 4.2.3 (Tangente del doppio dell'angolo) *La tangente del doppio di un angolo α è data in funzione della tangente dell'angolo α stesso dalla formula:*

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \tag{4.11}$$

Dimostrazione: Dal Th. 4.1.5 si ha:

$$\tan(2\alpha) = \tan(\alpha+\alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1-\tan\alpha\,\tan\alpha}$$

da cui la tesi.

Q.E.D.

4.3 Formule parametriche

Le formule paranetriche esprimono in **funzione razionale** della variabile $t = \tan(\alpha/2)$ il $\sin$ e il $\cos$ di un angolo.
Ovviamente tali formule hanno senso solo nel caso in cui la $\tan(\alpha/2)$ esista, ovvero se:

$$\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \rightarrow \quad \alpha \neq (1+2k)\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Valgono i seguenti teoremi:

Formula parametrica per il seno

Th. 4.3.1 (Formula parametrica per il seno) *Il seno di un angolo α è esprimibile in termini di $t = \tan(\alpha/2)$ grazie alla formula:*

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \tag{4.12}$$

Dimostrazione: dalle formule di duplicazione (Th. 4.2.1) si ha:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\,\cos\alpha \quad \rightarrow \quad \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

dato che dalla **formula fondamentale della trigonometria** Th.2.3.1 ho:

$$\cos^2(\frac{\alpha}{2}) + \sin^2(\frac{\alpha}{2}) = 1$$

dividere per uno è come dividere per $\cos^2(\frac{\alpha}{2}) + \sin^2(\frac{\alpha}{2})$, posso scrivere:

$$\sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

dividendo sia il numeratore che il denominatore per $\cos^2(\alpha/2)$, nei casi in cui questo esiste, si ottiene la tesi.

Q.E.D.

Formula parametrica per il coseno

Th. 4.3.2 (Formula parametrica per il coseno) *Il coseno di un angolo α è esprimibile in termini di $t = \tan(\alpha/2)$ grazie alla formula:*

$$\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{4.13}$$

Dimostrazione: segue esattamente la linea del precedente Th. 4.3.1

Q.E.D.

Formula parametrica per la tangente

Th. 4.3.3 (Formula parametrica per la tangente) *La tangente di un angolo α è esprimibile in termini di $t = \tan\alpha/2$ grazie alla formula:*

$$\tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2} \tag{4.14}$$

Dimostrazione:
Questa formula deriva direttamente dai Th. 4.3.1 e 4.3.2 applicati alla definizione 2.4.1.

Q.E.D.

4.4 Formule di bisezione

Le formule di bisezione si occupano di esprimere la funzione goniometrica della metà di un angolo in termini di funzioni goniometriche dell'angolo stesso.
Ovvero di costruire uguaglianze del tipo:

$$gonio(\alpha/2) = f(\alpha) \tag{4.15}$$

dove con $gonio(\alpha/2)$ abbiamo indicato la generica funzione goniometrica (ovvero $\sin$ o $\cos$ o $\tan$, etc).

della metà di un angolo

Th. 4.4.1 (Seno della metà di un angolo) *Il seno della metà dell'angolo generico α si può esprimere in termini dell'angolo α stesso grazie alla formula:*

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \tag{4.16}$$

dove il $+$ o il $-$ va disciminato vedendo in quale quadrante del piano cartesiano si trova l'angolo α dato.

Dimostrazione: dalla formula di duplicazione del coseno 4.2.2 e dalla relazione fondamentale della trigonometria 2.3.1: posso dire:

$$\cos(2\beta) = \cos^2\beta - \sin^2\beta = 1 - 2\sin^2\beta$$

dunque ponendo $\alpha = 2\beta$ e con semplici conti algebrici si ha:

$$\sin^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos\beta}{2}$$

applicando la radice quadrata ad ambo i membri si ha la tesi.

Q.E.D.

Coseno della metà di un angolo

Th. 4.4.2 (Coseno della metà di un angolo) *Il coseno della metà dell'angolo generico α si può esprimere in termini dell'angolo α stesso grazie alla formula:*

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \tag{4.17}$$

dove il $+$ o il $-$ va disciminato vedendo in quale quadrante del piano cartesiano si trova l'angolo α dato.

Dimostrazione: segue la linea sopra descritta per il Th. 4.4.1. Infatti sempre dalla formula di duplicazione del coseno 4.2.2 e dalla relazione fondamentale della trigonometria 2.3.1 posso dire:

$$\cos(2\beta) = \cos^2\beta - \sin^2\beta = 2\cos^2\beta - 1$$

da cui ho, ponendo $\alpha = 2\beta$:

$$\cos^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1+\cos\beta}{2}$$

da cui la tesi.

Q.E.D.

4.5 Formule di prostaferesi

Le **formule di prostaferesi** si occupano di **trasformare in prodotti** le somme di funzioni goniometriche.

Somma e differenza di seni

Th. 4.5.1 (Somma e differenza di seni) *La somma o la differenza di seni si possono esprimere, grazie alle formule di prostaferesi come:*

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{4.18}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{4.19}$$

Dimostrazione: Dalle formule di addizione e sottrazione per il seno 4.1.3, 4.1.4 si ha:

$$\sin(\gamma+\delta) = \sin\gamma\,\cos\delta + \cos\gamma\,\sin\delta$$

e

$$\sin(\gamma-\delta) = \sin\gamma\,\cos\delta - \cos\gamma\,\sin\delta$$

Sommando la prima equazione con la seconda e in secondo luogo sottraendo la seconda dalla prima ottengo:

$$\sin(\gamma+\delta) + \sin(\gamma-\delta) = 2\sin\gamma\,\cos\delta$$

e

$$\sin(\gamma+\delta) - \sin(\gamma-\delta) = 2\cos\gamma\,\sin\delta$$

Poniamo:

$$\gamma+\delta = \alpha \quad \wedge \quad \gamma-\delta = \beta$$

Ovvero esplicitando γ e δ:

$$\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2} \quad \wedge \quad \delta = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

sostituendo si ottiene la tesi.

Q.E.D.

Somma e differenza di coseni

Th. 4.5.2 (Somma e differenza di coseni) *La somma o la differenza di coseni si possono esprimere, grazie alle formule di prostaferesi come:*

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{4.20}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{4.21}$$

Dimostrazione: Si ottiene sulla linea della dimostrazione precedente partendo però dalle formule di addizione e sottrazione per il coseno 4.1.2 e 4.1.1.

Q.E.D.

4.6 Formule di Werner

Le formule di Werner si occupano del problema inverso rispetto alle formule di prostaferesi, ovvero *trasformano prodotti di funzioni goniometriche in somme di tali funzioni*. Valgono le seguenti formule:

ule di Werner

Th. 4.6.1 (Formule di Werner) *i prodotti di seni e coseni si possono riscrivere in termini di loro somme o differenze grazie alle seguenti formule:*

$$\sin\alpha\,\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)) \tag{4.22}$$

$$\cos\alpha\,\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)) \tag{4.23}$$

$$\sin\alpha\,\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)) \tag{4.24}$$

Dimostrazione: per la dimostrazione delle formule di Werner si fa uso delle formule di addizione e sottrazione 4.1.3, 4.1.4, 4.1.2 e 4.1.1.
In particolare si ha:

- **prima relazione:**
  le formule 4.1.2 e 4.1.1 ci dicono che:

  $$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\,\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\,\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

  Sottraendo dalla seconda la prima si ottiene:

  $$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta$$

  da cui con una semplice operazione algebrica si ottiene la tesi.

- **seconda relazione:**
  sempre dalle formule 4.1.2 e 4.1.1 sopra espresse, si ottiene sommando membro a membro:

  $$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$$

  che è la tesi.

- **terza relazione:**
  le formule 4.1.3 e 4.1.4 ci dicono che:

  $$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\,\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\,\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

  sommando membro a membro si ha:

  $$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\,\cos\beta$$

  che è la tesi.

4.7 Tabelle riassuntive

In questa sezione riassumiamo per comodità le relazioni espresse in tutto il capitolo.
Tale riassunto è riportato per comodità di consultazione in Tab. 4.1

Tipo di formula	**Espressione goniometrica**
Formule di addizione e sottrazione per il coseno	$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta$ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta$
Formule di addizione e sottrazione per il seno	$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
Formule di addizione e sottrazione per la tangente	$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$ $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\,\tan\beta}$
Formule di duplicazione	$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
Formule parametriche ($t = \tan(\alpha/2)$)	$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$ $\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$
Formule di bisezione	$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
Formule di prostaferesi per il seno	$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\,\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
Formule di prostaferesi per il coseno	$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\,\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
Formule di Werner	$\sin\alpha\,\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$ $\cos\alpha\,\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$ $\sin\alpha\,\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$

Tabella 4.1: Tabella riassuntiva delle formule di addizione, sottrazione, duplicazione, bisezione e prostaferesi.

Capitolo 5

Equazioni goniometriche

5.1 Definizioni generali

Equazione goniometrica

Def. 5.1.1 (Equazione goniometrica) *Un'equazione si dice goniometrica quando tra le sue incognite compaiono angoli e funzioni goniometriche ad essi associate*

Per chiarire le idee é opportuno mostrare alcuni esempi di ciò che intendiamo:

Equazioni goniometriche

Es. 5.1.1 (Equazioni goniometriche)

$$3\sin x = 1; \quad \tan^2 x + 3\tan x + 1 = 0; \quad \cos x = 3\tan x$$

Ovviamente le equazioni goniometriche possono assumere le forme più svariate e il loro range di soluzioni può andare da *nessuna* a *infinite*.

5.2 Equazioni elementari

Le equazioni goniometriche elementari sono equazioni in cui appare una sola funzione goniometrica, non compare il suo argomento come incognita libera ed é richiesta l'uguaglianza ad una costante.
Esempi sono:

Equazioni elementari

Es. 5.2.1 (Equazioni elementari)

$$\sin x = a \quad -1 \leq a \leq 1 \tag{5.1}$$
$$\cos x = b \quad -1 \leq a \leq 1 \tag{5.2}$$
$$\tan x = c \quad \forall c \tag{5.3}$$

Si noti che per la **periodicità** delle funzioni goniometriche, la generica equazione elementare ammette **infinite soluzioni** che si ripetono periodicamente.

Eq. elementare nel seno

Es. 5.2.2 (Eq. elementare nel seno) *Risolvere la seguente equazione:*

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$$

Svolgimento:
L'equazione proposta equivale all'equazione:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dalla tabella 2.1 so che l'angolo α nel primo quadrante che verifica questa relazione é:

$$\alpha = x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

e dunque per la periodicità ($T = 2\pi$) del seno una soluzione più generale è:

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Si consideri ora, però, che vale la formula riportata in Tab.3.1

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$$

dunque l'angolo $\pi - \pi/3$ ha lo stesso seno dell'angolo $\pi/3$ e va incluso nella soluzione. Considerato dunque la periodicità si ha, dunque, l'ulteriore soluzione:

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi + 2h\pi \quad h \in \mathbb{Z}$$

La soluzione finale é dunque:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

5.3 Equazioni quadratiche in una funzione goniometrica

Questa sezione riguarda equazioni goniometriche in cui compare *una sola funzione goniometrica* al quadrato, la funzione stessa e non il suo argomento come incognita libera.
Ovvero si riferisce ad equazioni del tipo (sia α il generico argomento):

$$a\,gonio^2(\alpha) + b\,gonio(\alpha) + c = 0, \tag{5.4}$$

dove con $gonio(\alpha)$ abbiamo indicato la generica funzione goniometrica di variabile α. Queste equazioni possono essere riportate alla forma di equazioni elementari come quelle della Sez.5.2 tramite un cambio di variabile e la risoluzione di una semplice equazione algebrica.
Il seguente esempio percorre tutti i passaggi della risoluzione e può considerarsi il canovaccio per qualsiasi esercizio di questo tipo o riducibile a questo tipo:

Passaggio a eq. algebrica

Es. 5.3.1 (Passaggio a eq. algebrica) *Sia data l'equazione:*

$$2\,\sin^2 x + 3\,\sin x + 1 = 0,$$

ponendo:

$$t = \sin x$$

l'equazione si riduce a:

$$2t^2 + 3t + 1 = 0$$

che é una equazione algebrica.
Le sue soluzioni sono:

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4} \rightarrow \begin{cases} t_1 & = & -1/2 \\ t_2 & = & -1 \end{cases}$$

Dunque, dato che $t = \sin x$, *la nostra equazione originale si riduce a due equazioni di tipo elementare, ovvero:*

$$\begin{array}{c} \sin x = t_1 = -1/2 \\ \sin x = t_2 = -1 \end{array}$$

le cui soluzioni sono:

$$\begin{array}{ccc} x = -\pi/6 + 2k\pi \quad \wedge \quad x = -5/6\pi + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ x = -\pi/2 + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

5.4 Equazioni con più funzioni goniometriche

Sono equazioni che contengono più funzioni goniometriche e non una sola come nel caso precedente, continua, però, a non apparire l'argomento di tali funzioni come incognita libera.
La risoluzione si basa sull'esprimere le varie funzioni goniometriche in funzione di una sola per poi ricondurci a casi di cui sia nota la risoluzione.
Un esempio di tale tipo di risoluzione è riportato qui di seguito:

Più funzioni goniometriche

Es. 5.4.1 (Più funzioni goniometriche) *Sia data l'equazione:*

$$3\cos^2 x - 4\sin x = 4$$

Dalla relazione fondamentale della trigonometria, Th. 2.3.1, si ha:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

per cui la nostra equazione diventa:

$$3(1 - \sin^2 x) - 4\sin x = 4$$

svolgendo i conti e semplificando si ottiene:

$$3\sin^2 x + 4\sin x + 1 = 0$$

che è un'equazione del tipi introdotto nella sezione 5.3 e va risolta come quella svolta nell'esempio 5.3.1. Pongo dunque:

$$t = \sin x$$

e ho l'equazione algebrica ausiliaria:

$$3t^2 + 4t + 1 = 0$$

Le cui soluzioni sono:

$$\begin{array}{c} \sin x = t_1 = -1 \\ \sin x = t_2 = -\frac{1}{3} \end{array}$$

Per esprimere nella variabile x la soluzione ottenuta devo risolvere queste due equazioni goniometriche elementari come descritto nella Sez. 5.2.
Le soluzioni sono:

$$\begin{array}{ccc} & x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ x \simeq 0,34 + 2k\pi & \wedge \quad x \simeq 3,48 + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

5.5 Equazioni lineari in seno e coseno

Un equazione lineare in seno e coseno è una equazione della forma:

$$a \sin x + b \cos x + c = 0 \quad a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \tag{5.5}$$

in particolare se $c = 0$ l'equazione prende il nome di **equazione lineare omogenea** e si scrive:

$$a \sin x + b \cos x = 0 \tag{5.6}$$

ponendo il caso $a \neq 0$ e $b \neq 0$, altrimenti ci ridurremmo alla forma di equazione elementare già trattata nella Sez. 5.2, l'equazione è presto risolta riducendola a un'equazione nella sola $\tan x$
Per la sopracitata riduzione basta dividere ambo i membri per $\cos x$ ottenendo così la seguente equazione elementare:

$$a \tan x + b = 0 \quad \rightarrow \quad \tan x = -\frac{b}{a} \tag{5.7}$$

che va risolta con le tecniche della Sez. 5.2. **NOTA:**
la divisione per il coseno è in genrale non sempre fattibile, ma, in particolare, nel nostro caso sempre valida; infatti valori della variabile indipendente tali per cui $\cos x = 0$ **non possono essere soluzione** della nostra equazione.
Dimostrazione:
Procedendo per assurdo. Sia $\cos x = 0$ soluzione per la nostra equazione data una particolare x. Dalla relazione fondamentale della trigonometria si ha:

$$\cos x = 0 \quad \rightarrow \quad \sin x = 1$$

per cui l'equazione omogenea 5.6 mi dá come unica scelta:

$$a = 0 \tag{5.8}$$

che va contro la nostra tesi iniziale.

Q.E.D.

Equazione lineare omogenea

Es. 5.5.1 (Equazione lineare omogenea) *Risolviamo l'equazione:*

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0.$$

Dividendo ambo i membri per $\cos x$ *si ha:*

$$\tan x - \sqrt{3} = 0 \quad \rightarrow \quad \tan x = \sqrt{3}$$

Equazione la cui soluzione è nota ed è:

$$x = \pi/3 + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Le equazioni lineari non omogenee sono meno imtuitive nella loro risoluzione e necessitano di una sottosezione a parte.

5.5.1 Equazioni lineari non omogenee

Le equazioni lineari non omogenee sono equazioni del tipo 5.5 in cui per ipotesi è $c \neq 0$. I metodi di risoluzioni per questo tipo di equazioni possono essere molteplici:

1. **esprimere il seno in funzione del coseno o viceversa.**

2. **utilizzare le formule parametriche di Sez.4.3** per esprimere seno e coseno in funzione di $\tan(\alpha/2)$.
   Tramite queste relazioni la nostra equazione 5.5 diventa un'equazione algebrica in t dove $t = \tan(\alpha/2)$.
   La sua forma in t è:
   $$a\frac{2t}{1+t^2} + b\frac{1-t^2}{1+t^2} + c = 0 \tag{5.9}$$
   che è equivalente all'equazione 5.5 solo se $\tan(\alpha/2)$ esiste, ovvero se:
   $$\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \rightarrow \quad \alpha \neq (2k+1)\pi \quad k \in \mathbb{Z} \tag{5.10}$$
   La soluzione più generale possibile delleq. 5.9 è:
   $$t_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c-b} \tag{5.11}$$
   anche se spesso, invece di ricordare a memoria questa formula, conviene fare direttamente i conti.

3. **utilizzare la relazione fondamentale della trigonometria.**
   ovvero trasformare la nostra equazione 5.5 in un sistema del tipo:
   $$\begin{cases} a\sin x + b\cos x + c = 0 \\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \end{cases}$$

4. **ricorrere ad un angolo ausiliario.**
   Partiamo dalla nostra equazione lineare 5.5 e dividiamo ambo i membri per $\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$ per ipotesi, ottengo:
   $$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$
   i coefficienti di seno e coseno verificano le seguenti proprietà:
   $$\begin{aligned} \left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1 \quad \wedge \quad & \left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1 \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} &= 1 \end{aligned}$$
   Dunque i coefficienti verificano le proprietá di seno e cose di un dato angolo, sia ϕ, ovvero posso porre:
   $$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \wedge \quad \sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

l'equazione dunque diventa:

$$\cos\phi\,\sin x + \sin\phi\cos x + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

ovvero, grazie alle formule di addizione del seno 4.1.3:

$$\sin(x+\phi) = -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Dunque la nostra equazione lineare non omogenea 5.5 è diventata un'equazione elementare nell'incognita $x+\phi$ con ϕ noto.
Tale equazione da soluzioni per $x+\phi$ da cui, poi, facilmente si ricava x.

Soluzione con formule parametriche

Es. 5.5.2 (Soluzione con formule parametriche) *Risolvere la seguente equazione:*

$$\sin x + \cos x = 1.$$

Svolgimento:
verifichiamo innanzi tutto che gli angoli per cui non è definita la $tan(\alpha/2)$ non siano soluzione dell'equazione data:

$$x = \pi + 2k\pi \rightarrow \sin(\pi+2k\pi) + \cos(\pi+2k\pi) = -1$$

dunque gli angoli per cui $\tan(\alpha/2)$ non esiste possono essere esclusi in quanto non sono soluzione dell'equazione data.
Per gli altri angoli $\tan(\alpha/2)$ esiste e quindi posso scrivere l'equazione in forma parametrica con $t = \tan(\alpha/2)$:

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1$$

che è un'equazione algebrica in t facilmente risolvibile, ovvero:

$$2t + 1 - t^2 = 1 + t^2 \rightarrow 2t - 2t^2 = 0 \rightarrow t(1-t) = 0$$

da cui

$$t_1 = 0 \quad \wedge \quad t_2 = 1$$

in conclusione ci si riduce a due equazioni elementari del tipo:

$$\tan(\alpha/2) = t_1 \quad \wedge \quad \tan(\alpha/2) = t_2$$

Angolo ausiliario

Es. 5.5.3 (Angolo ausiliario) *Si risolva le seguente equazione:*

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}$$

divido ambo i membri per:

$$\sqrt{a^2+b^2} \rightarrow \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

L'equazione che ne deriva è:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

seguendo la teoria pongo:

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \wedge \quad \sin\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

il che implica:

$$\phi = \frac{\pi}{4}$$

L'equazione di partenza è dunque riscrivibile come:

$$\cos\frac{\pi}{4}\,\sin x - \sin\frac{\pi}{4}\cos x = 1 \rightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1$$

Da ció si ottiene:

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

e dunque in definitiva:

$$x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Capitolo 6

Disequazioni goniometriche

6.1 Definizioni generali

Disequazione goniometrica

Def. 6.1.1 (Disequazione goniometrica) *Una disequazione si dice goniometrica quando tra le sue incognite compaiono angoli e funzioni goniometriche ad essi associate.*

Per chiarire le idee é opportuno mostrare alcuni esempi di ciò che intendiamo:

Disequazioni goniometriche

Es. 6.1.1 (Disequazioni goniometriche)

$$3\sin x > 1; \quad \tan^2 x + 3\tan x + 1 < 0; \quad \cos x \leq 3\tan x$$

Ovviamente le disequazioni goniometriche possono assumere le forme più svariate e il loro range di soluzioni può andare da *nessuna* a *infinite*.

6.2 Segno delle funzioni goniometriche

Per risolvere disequazioni contenenti funzioni goniometriche é necessario conoscere come varia il segno delle funzioni goniometriche al variare del valore del loro argomento.
É conveniente dividere il piano cartesiano in 4 quadranti per discutere il segno di queste funzioni, tale divisione é espressa dalla Fig. 6.1.
Come si vede dalla figura e come si può evincere dalle definizioni 2.2.1 e 2.2.2 di seno e coseno valgono le seguenti relazioni:

$$\sin x > 0 \quad \rightarrow \quad 0 < x < \pi \tag{6.1}$$
$$\cos x > 0 \quad \rightarrow \quad 0 < x < \pi/2 \quad \vee \quad 3\pi/2 < x < 2\pi \tag{6.2}$$
$$\tan x > 0 \quad \rightarrow \quad 0 < x < \pi/2 \quad \vee \quad \pi < x < 3\pi/2 \tag{6.3}$$
$$\cot x > 0 \quad \rightarrow \quad 0 < x < \pi/2 \quad \vee \quad \pi < x < 3\pi/2 \tag{6.4}$$

ovvero a parole:

- **Segno del seno:**
  Il seno é positivo nel I e nel II quadrante del piano cartesiano, negativo nel III e nel IV.

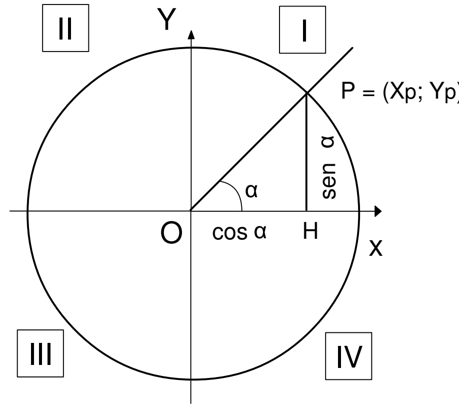

Figura 6.1: *Divisione del piano cartesiano in quadranti*

- **Segno del coseno** Il coseno é positivo nel I e nel IV quadrante del piano cartesiano, negativo nel II e nel III.
- **Segno della tangente** La tangente é positiva nel I e nel III quadrante del piano cartesiano, negativa nel II e nel IV.
- **Segno della cotangente** La cotangente é positiva nel I e nel III quadrante del piano cartesiano, negativa nel II e nel IV.

Le proprietà sopra espresse sono riassunte in Tab. 6.1.

Funzione/Quadrante	**I**	**II**	**III**	**IV**
Seno	$+$	$+$	$-$	$-$
Coseno	$+$	$-$	$-$	$+$
Tangente	$+$	$-$	$+$	$-$
Cotangente	$+$	$-$	$+$	$-$

Tabella 6.1: Segni delle funzioni goniometriche quadrante per quadrante

6.3 Disequazioni goniometriche elementari

Una disequazione goniometrica elementare non differisce di molto nella forma da un'equazione goniometrica elementare, infatti anche per essa si ha semplicemente una sola funzione goniometrica non elevata ad alcun esponente ed un numero.

Disequazioni elementari

Es. 6.3.1 (Disequazioni elementari)

$$\sin x > a \quad (6.5)$$
$$\cos x > b \quad (6.6)$$
$$\tan x > c \quad (6.7)$$

La differenza tra le equazioni e le disequazioni elementari è che per la soluzione bisogna tenere presente anche il segno della funzione goniometrica in esame così come descritto in Tab.6.1.
Il semplice esempio che segue da un'idea di come si deve operare:

Disequazione elementare

Es. 6.3.2 (Disequazione elementare) *Si risolva la seguente disequazione goniometrica:*

$$2\cos x > \sqrt{3}.$$

Svolgimento:
si prenda la disequazione data e la si trasformi temporaneamente in un'equazione associata:

$$2\cos x = \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Le soluzioni di questa equazione si ottengono con i metodi illustarti nell'esempio 5.2.2. Il compito è reso ancora più facile dal fatto che a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *corrisponde un arco noto.*
Le soluzioni sono:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \wedge \quad x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

sappiamo ora in quali punti il coseno è uguale a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *per sapere dove è maggiore e dove è minore ci si deve rifare al grafico della funzione coseno e al suo variare in segno.*
Sappiamo dalla tabella Tab.6.1 che nel II *e* III *quadrante il coseno è sempre negativo, quindi gli angoli di quei due quadranti non verificano sicuramente la nostra disequazione.*
Nel primo quadrante, come si vede da Fig.2.3 il coseno parte da 1 *per poi gradatamente scendere verso zero, dunque i valori superiori a* $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *staranno prima di* $\frac{\pi}{6}$*, ovvero, a meno di giri completi, una soluzione è:*

$$x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$$

Nel quarto quadrante il coseno sale da 0 *fino a* 1 *per poi ridiscendere, la nostra soluzione sarà dunque:*

$$x \in \left(\frac{11}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi\right)$$

Capitolo 7

Teoremi sui triangoli

7.1 Definizioni generali

La trigonometria fornisce importanti strumenti per lo studio delle proprietà dei triangoli.
In particolare è estremamente utile per stabilire **relazioni quantitative** tra *i lati e gli angoli di un triangolo*.
Da ora in poi chiameremo A, B, C i vertici del generico triangolo, a, b, c le lunghezze dei suoi lati e α, β, γ l'ampiezza dei suoi angoli, come si puó vedere in Fig. 7.1.
Prima di vedere i legami tra lati e angoli dettati dalla trigonometris è opportuno ricor-

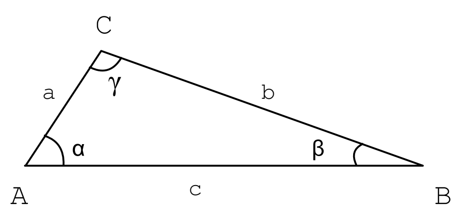

Figura 7.1: *Nomi di vertici, angoli e lati nel nostro triangolo generico*

dare le proprietá elementari dei triangoli:

- **Somma degli angoli interni di un triangolo:**
  La somma degli angoli interni di un triangolo è **sempre** π radianti (ovvero 180°). Vale cioè l'equazione:
  $$\alpha + \beta + \gamma = \pi \tag{7.1}$$
- **Somma e differenza di lati:** In ogni triangolo ogni lato è minore della somma degli aqltri due e maggiore della loro differenza.
- **Lati e angoli:** In ogni triangolo a lato maggiore (minore) è opposto angolo maggiore (minore). Ad esempio in Fig. 7.1 si ha:
  $$c > b \quad \Rightarrow \quad \gamma > \alpha$$

e viceversa si ha:

$$\gamma > \alpha \quad \Rightarrow \quad c > b.$$

7.2 Teoremi sul triangolo rettangolo

Sia dato un triangolo rettangolo come quello in Fig. 7.2.
Valgono le seguenti relazioni (si prenda l'angolo β come riferimento):

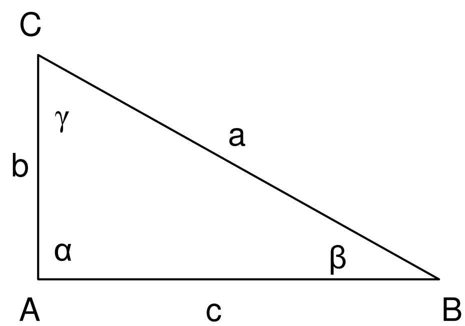

Figura 7.2: *Triangolo rettangolo*

Relazioni angoli-lati nel triangolo rettangolo

Th. 7.2.1 (Relazioni angoli-lati nel triangolo rettangolo) *Valogno le seguenti relazioni:*

- ***Seno:***

$$\sin\beta = \frac{CA}{BC} = \frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad b = a\ \sin\beta \tag{7.2}$$

- ***Coseno:***

$$\cos\beta = \frac{BA}{BC} = \frac{c}{a} \quad \rightarrow \quad c = a\ \sin\beta \tag{7.3}$$

- ***Tangente:***

$$\tan\beta = \frac{CA}{BA} = \frac{b}{c} \quad \rightarrow \quad b = c\ \tan\beta \tag{7.4}$$

- ***Cotangente:***

$$\cot\beta = \frac{BA}{CA} = \frac{c}{b} \quad \rightarrow \quad c = b\ \cot\beta \tag{7.5}$$

Dimostazione:

Q.E.D.

Le formule sopra riportate ci permettono di esprimere l'area di un generico triangolo tramite la lunghezza di due suoi lati e l'ampiezza di un suo angolo.
Vale infatti il seguente teorema:

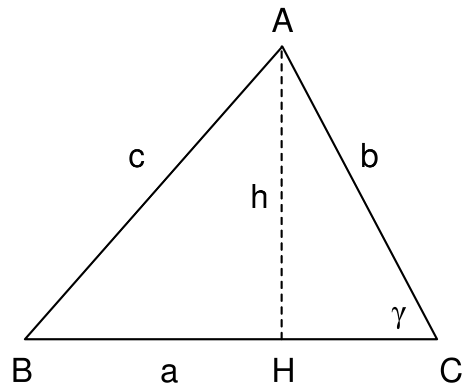

Figura 7.3: *Triangolo scaleno*

di un triangolo

Th. 7.2.2 (Area di un triangolo) *Sia dato un triangolo qualsiasi come quello mostrato in Fig.7.3, siano note la lunghezza di due suoi lati (diciamo a e b) e l'ampiezza dell'angolo tra essi compreso (diciamo γ), l'area del triangolo è pari al semiprodotto dei due lati conosciuti per il seno dell'angolo tra essi compreso, ovvero:*

$$A_{triangolo} = \frac{1}{2} a\, b\, \sin\gamma \tag{7.6}$$

Dimostrazione:
Dalla geometria elementare è noto che (si veda la Fig. 7.3):

$$A_{triangolo} = \frac{1}{2} a\, h.$$

ovvero, l'area del triangolo è il semiprodotto della sua base per l'altezza.
Grazie al Th. 7.2.1 possiamo peró esplimere l'altezza in funzione di un lato e un angolo, ovvero, nel nostro caso, posso dire:

$$h = b\, \sin\gamma$$

da cui, sostituendo, si ricava la tesi.

Q.E.D.

7.3 Teoremi su un triangolo qualunque

Questa sezione contiene vari teoremi che valgono per lati ed angoli di un triangolo *qualunque esso sia*.

Teorema delle proiezioni

Th. 7.3.1 (Teorema delle proiezioni) *Dato un triangolo qualunque come quello in Fig. 7.4, ogni lato è uguale alla somma dei prodotti di ciascuno degli altri due lati per il coseno dell'angolo che essi formano col primo lato, ovvero:*

$$a = b\, \cos\gamma + c\, \cos\beta \tag{7.7}$$
$$b = c\, \cos\alpha + a\, \cos\gamma \tag{7.8}$$
$$c = a\, \cos\beta + b\, \cos\alpha \tag{7.9}$$

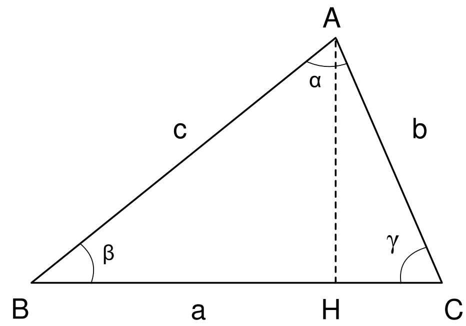

Figura 7.4: *Triangolo generico*

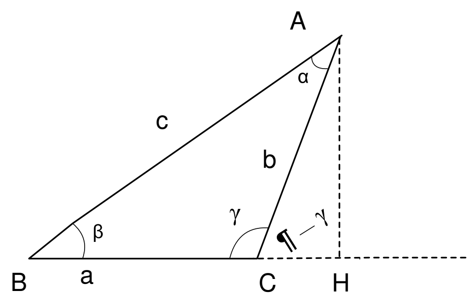

Figura 7.5: *Triangolo generico*

Dimostrazione:
Sia dato un generico triangolo ABC e sia tracciata l'altezza $\overline{AH}$ relativa al lato $\overline{BC}$ come in Fig. 7.4.
Si prendano in considerazione i due triangoli rettangoli AHB e AHC.
Per il teorema 7.2.1 possiamo scrivere:

$$\overline{BH} = c\,\cos\beta \quad \wedge \quad \overline{HC} = b\,\cos\gamma$$

e sommando membro a membro ottengo:

$$\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{HC} = c\,\cos\beta + b\,\cos\gamma$$

Nel caso di un triangolo ottusangolo come quello di Fig. 7.5 si ha:

$$\overline{BH} = c\,\cos\beta \quad \wedge \quad \overline{CH} = b\,\cos(\pi-\gamma) = -b\,\cos\gamma$$

sottraendo membro a membro ottengo:

$$\overline{BC} = \overline{BH} - \overline{CH} = c\,\cos\beta + b\,\cos\gamma$$

con ciò abbiamo dimostrato la formula per a, in modo analogo si ottengono le altre.

Q.E.D.

ema di Carnot o del
no

Th. 7.3.2 (Teorema di Carnot o del coseno) *Dato un triangolo qualsiasi, l'area del quadrato costruito su un lato è uguale alla somma dell'area di quelli che si possono costruire sugli altri due lati, diminuita, però, del doppio del prodotto tra gli altri due lati e il coseno dell'angolo tra essi compreso.*
In formula questo teorema ci dice:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha. \tag{7.10}$$

Dimostrazione:
Dal Th. 7.3.1 delle proiezioni so che vale la relazione (si veda Fig. 7.4):

$$\begin{aligned} a &= b\,\cos\gamma + c\,\cos\beta \\ b &= c\,\cos\alpha + a\,\cos\gamma \\ c &= a\,\cos\beta + b\,\cos\alpha \end{aligned}$$

Moltiplico ambo i membri della prima equazione per la lunghezza a, della seconda equazione per la lunghezza $-b$ e della terza per la lunghezza $-c$ ottengo cos'i:

$$\begin{aligned} a^2 &= a\,b\,\cos\gamma + a\,c\,\cos\beta \\ -b^2 &= -b\,c\,\cos\alpha - b\,a\,\cos\gamma \\ -c^2 &= -c\,a\,\cos\beta - c\,b\,\cos\alpha \end{aligned}$$

sommando membro a membro ottengo la tesi.

Q.E.D.

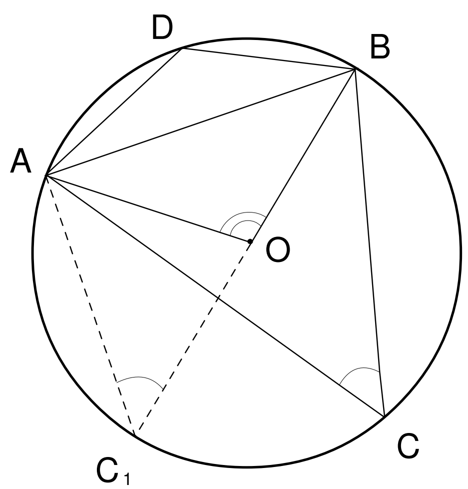

Figura 7.6: *Corda in una circonferenza e angoli che insistono su essa*

Teorema della corda

Th. 7.3.3 (Teorema della corda) *In una circonferenza qualsiasi il rapporto tra una corda e il seno di un angolo qualsiasi che insiste su quella corda è pari al diametro della circonferenza, ovvero (si veda la Fig. 7.6):*

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(A\widehat{C}B)} = 2R \tag{7.11}$$

Dimostrazione:

Q.E.D.

Teorema dei seni

Th. 7.3.4 (Teorema dei seni) *Sia dato un triangolo qualsiasi, i suoi lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti e il fattore di proporzionalità è lo stesso qualunque siana l'angolo e il lato scelti.*
In formula questo vuol dire (si veda la Fig. 7.4):

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \tag{7.12}$$

Dimostrazione:

Q.E.D.

7.4 Formule di Briggs

Le formule di Briggs consentono di calcolare gli angoli di un triangolo noti i lati.

Formule di Briggs

Th. 7.4.1 (Formule di Briggs) *Sia dato un tringolo generico come quello di Fig. 7.4 e sia nota la misura di tutti i suoi lati a, b, c. Sia inoltre $2p$ il suo perimetro. Gli angoli del suddetto triangolo sono, allora, implicitamente noti e possono essere calcolati grazie alle formule di tabella 7.1*

Angolo	**Formula per il seno**	**Formula per il coseno**
α	$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{b\,c}}$	$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{b\,c}}$
β	$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{a\,c}}$	$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{a\,c}}$
γ	$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{a\,b}}$	$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{a\,b}}$

Tabella 7.1: Formule di Briggs

Dimostrazione: La dimostrazione verrà svolta per il seno e il coseno dell'angolo α le relazioni per β e γ si ricavano in maniera analoga.
Si parta dalla formula del Th. 7.3.2 di Carnot essa ci dice:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

dalle formule di bisezione 4.4.1 e 4.4.2 sappiamo:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad \wedge \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Q.E.D.

7.4.1 Applicazione delle formule di Briggs

ula di Erone

Th. 7.4.2 (Formula di Erone) *Sia dato un triangolo qualsiasi ABC e sia nota la lunghezza di tutte e tre i suoi lati (diciamo a, b e c), allora, è possibile conoscerne anche l'area grzie alla formula:*

$$A_{triangolo} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \tag{7.13}$$

dove con p si è indicato il semi-perimetro del triangolo ABC di partenza, ovvero $2p = a+b+c$.

Dimostrazione:
Dal Th.7.2.2 sappiamo che noti due lati (a, b) e l'angolo tra essi compreso (γ) l'area di un triangolo si può scrivere come:

$$A_{triangolo} = \frac{1}{2}\, a\, b \sin\gamma$$

possiamo vedere, al fine di sfruttare le formule di Briggs, l'angolo γ come $2\,\frac{\gamma}{2}$, la formula sopra riportata diventa dunque:

$$A_{triangolo} = \frac{1}{2}\, a\, b \sin\left(2\frac{\gamma}{2}\right) = ab \sin\frac{\gamma}{2}\, \cos\frac{\gamma}{2}$$

Dalle formule di Briggs in Tab.7.1 so che:

$$\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \quad \wedge \quad \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

sostituendo ottengo la tesi.

Q.E.D.

7.5 Tabelle riassuntive

In questa sezione riportiamo in tabella tutte le formule che legano la geometria dei triangoli e le funzioni goniometriche riportate lungo il capitolo.
Tale riassunto è riportato in Tab.7.2, dove, qundo si parla di triangolo rettangolo, ci si riferisce alla Fig.7.2, mentre dove si parla di triangolo qualunque ci si riferisce alla Fig.7.3.

Argomento	Formula
Proprietà dei triangoli	$\alpha + \beta + \gamma = \pi$ $c > b \rightarrow \gamma > \alpha$
Triangolo rettangolo	$b = a \sin\beta$ $c = a \sin\beta$ $b = c \tan\beta$ $c = b \cot\beta$
Triangolo generico	$A = \frac{1}{2} a\, b\, \sin\gamma$
Teorema delle proiezioni	$a = b\, \cos\gamma + c\, \cos\beta$ $b = c\, \cos\alpha + a\, \cos\gamma$ $c = a\, \cos\beta + b\, \cos\alpha$
Teorema di Carnot	$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c\, \cos\alpha$
Teorema dei seni	$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Tabella 7.2: Tabella riassuntiva dei teoremi sui triangoli.

Appendice A

GNU Free Documentation License

Version 1.1, March 2000

0. PREAMBLE

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other written document free in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of copyleft, which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. The Document, below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as you.

A Modified Version of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A Secondary Section is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (For example, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The Invariant Sections are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License.

The Cover Texts are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License.

A Transparent copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, whose contents can be viewed and edited directly and straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup has been designed to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. A copy that is not Transparent is called Opaque.

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML designed for human modification. Opaque formats include PostScript, PDF, proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML produced by some word processors for output purposes only.

The Title Page means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, Title Page means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.

2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies of the Document numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a publicly-accessible computer-network location containing a complete Transparent copy of the Document, free of added material, which the general network-using public has access to download anonymously at no charge using public-standard network protocols. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission. B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has less than five). C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher. D. Preserve all the copyright notices of the Document. E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices. F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below. G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice. H. Include an unaltered copy of this License. I. Preserve the section entitled History, and its title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section entitled History in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence. J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the History section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission. K. In any section entitled Acknowledgements or Dedications, preserve the section's title, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein. L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles. M. Delete any section entitled Endorsements. Such a section may not be included in the Modified Version. N. Do not retitle any existing section as Endorsements or to conflict in title with any Invariant Section.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section entitled Endorsements, provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties–for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections entitled History in the various original documents, forming one section entitled History; likewise combine any sections entitled Acknowledgements, and any sections entitled Dedications. You must delete all sections entitled Endorsements.

6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, does not as a whole count as a Modified Version of the Document, provided no compilation copyright is claimed for the compilation. Such a compilation is called an aggregate, and this License does not apply to the other self-contained works thus compiled with the Document, on account of their being thus compiled, if they are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one quarter of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that surround only the Document within the aggregate. Otherwise they must appear on covers around the whole aggregate.

8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License provided that you also include the original English version of this License. In case of a disagreement between the translation and the original English version of this License, the original English version will prevail.

9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See http://www.gnu.org/copyleft/.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License or any later version applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

Copyright (c) YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.1 or any later version published by the Free Software Foundation; with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST. A copy of the license is included in the section entitled GNU Free Documentation License. If you have no Invariant Sections, write with no Invariant Sections instead of saying which ones are invariant. If you have no Front-Cover Texts, write no Front-Cover Texts instead of Front-Cover Texts being LIST; likewise for Back-Cover Texts.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.

*Q*uesto documento è la traduzione non ufficiale (e quindi senza alcun valore legale) della GNU FDL. E' stata inserita al solo scopo di aiutare il lettore italiano nella comprensione del contenuto. Eventuali controversie legali saranno risolte esclusivamente in base alla versione originale di questo documento.

0. PREAMBOLO

Lo scopo di questa licenza è di rendere un manuale, un testo o altri documenti scritti liberi nel senso di assicurare a tutti la libertà effettiva di copiarli e redistribuirli, con o senza modifiche, a fini di lucro o no. In secondo luogo questa licenza prevede per autori ed editori il modo per ottenere il giusto riconoscimento del proprio lavoro, preservandoli dall'essere considerati responsabili per modifiche apportate da altri. Questa licenza è un copyleft: ciò vuol dire che i lavori che derivano dal documento originale devono essere ugualmente liberi. È il complemento alla GNU General Public License, che è una licenza di tipo copyleft pensata per il software libero. Abbiamo progettato questa licenza al fine di applicarla alla documentazione del software libero, perché il software libero ha bisogno di documentazione libera: un programma libero dovrebbe accompagnarsi a manuali che forniscano la stessa libertà del software. Ma questa licenza non è limitata alla documentazione del software; può essere utilizzata per ogni testo che tratti un qualsiasi argomento e al di là dell'avvenuta pubblicazione cartacea. Raccomandiamo principalmente questa licenza per opere che abbiano fini didattici o per manuali di consultazione.

1. APPLICABILITÀ E DEFINIZIONI

Questa licenza si applica a qualsiasi manuale o altra opera che contenga una nota messa dal detentore del copyright che dica che si può distribuire nei termini di questa licenza. Con Documento, in seguito ci si riferisce a qualsiasi manuale o opera. Ogni fruitore è un destinatario della licenza e viene indicato con voi. Una versione modificata di un documento è ogni opera contenente il documento stesso o parte di esso, sia riprodotto alla lettera che con modifiche, oppure traduzioni in un'altra lingua. Una sezione secondaria è un'appendice cui si fa riferimento o una premessa del documento e riguarda esclusivamente il rapporto dell'editore o dell'autore del documento con l'argomento generale del documento stesso (o argomenti affini) e non contiene nulla che possa essere compreso nell'argomento principale. (Per esempio, se il documento è in parte un manuale di matematica, una sezione secondaria non può contenere spiegazioni di matematica). Il rapporto con l'argomento può essere un tema collegato storicamente con il soggetto principale o con soggetti affini, o essere costituito da argomentazioni legali, commerciali, filosofiche, etiche o politiche pertinenti. Le sezioni non modificabili sono alcune sezioni secondarie i cui titoli sono esplicitamente dichiarati essere sezioni non modificabili, nella nota che indica che il documento è realizzato sotto questa licenza. I testi copertina sono dei brevi brani di testo che sono elencati nella nota che indica che il documento è realizzato sotto questa licenza. Una copia trasparente del documento indica una copia leggibile da un calcolatore, codificata in un formato le cui specifiche sono disponibili pubblicamente, i cui contenuti possono essere visti e modificati direttamente, ora e in futuro, con generici editor di testi o (per immagini composte da pixel) con generici editor di immagini o (per i disegni) con qualche editor di disegni ampiamente diffuso, e la copia deve essere adatta al trattamento per la formattazione o per la conversione in una varietà di formati atti alla successiva formattazione. Una copia fatta in un altro formato di file trasparente il cui markup è stato progettato per intralciare o scoraggiare modifiche future da parte dei lettori non è trasparente. Una copia che non è trasparente è opaca. Esempi di formati adatti per copie trasparenti sono l'ASCII puro senza markup, il formato di input per Texinfo, il formato di input per LaTex, SGML o XML accoppiati ad una DTD pubblica e disponibile, e semplice HTML conforme agli standard e progettato per essere modificato manualmente. Formati opachi sono PostScript, PDF, formati proprietari che possono essere letti e modificati solo con word processor proprietari, SGML o XML per cui non è in genere disponibile la DTD o gli strumenti per il trattamento, e HTML generato automaticamente da qualche word processor per il solo output. La pagina del titolo di un libro stampato indica la pagina del titolo stessa, più qualche pagina seguente per quanto necessario a contenere in modo leggibile, il materiale che la licenza prevede che compaia nella pagina del titolo. Per opere in formati in cui non sia contemplata esplicitamente la pagina del titolo, con pagina del titolo si intende il testo prossimo al titolo dell'opera, precedente l'inizio del corpo del testo.

2. COPIE ALLA LETTERA

Si può copiare e distribuire il documento con l'ausilio di qualsiasi mezzo, per fini di lucro e non, fornendo per tutte le copie questa licenza, le note sul copyright e l'avviso che questa licenza si applica al documento, e che non si aggiungono altre condizioni al di fuori di quelle della licenza stessa. Non si possono usare misure tecniche per impedire o controllare la lettura o la produzione di copie successive alle copie che si producono o distribuiscono. Però si possono ricavare compensi per le copie fornite. Se si distribuiscono un numero sufficiente di copie si devono seguire anche le condizioni della sezione 3. Si possono anche prestare copie e con le stesse condizioni sopra menzionate possono essere utilizzate in pubblico.

3. COPIARE IN NOTEVOLI QUANTITÀ

Se si pubblicano a mezzo stampa più di 100 copie del documento, e la nota della licenza indica che esistono uno o più testi copertina, si devono includere nelle copie, in modo chiaro e leggibile, tutti i testi copertina indicati: il testo della prima di copertina in prima di copertina e il testo di quarta di copertina in quarta di copertina. Ambedue devono identificare l'editore che pubblica il documento. La prima di copertina deve presentare il titolo completo con tutte le parole che lo compongono egualmente visibili ed evidenti. Si può aggiungere altro materiale alle copertine. Il copiare con modifiche limitate alle sole copertine, purché si preservino il titolo e le altre condizioni viste in precedenza, è considerato alla stregua di copiare alla lettera. Se il testo richiesto per le copertine è troppo voluminoso per essere riprodotto in modo leggibile, se ne può mettere una prima parte per quanto ragionevolmente può stare in copertina, e continuare nelle pagine immediatamente seguenti. Se si pubblicano o distribuiscono copie opache del documento in numero superiore a 100, si deve anche includere una copia trasparente leggibile da un calcolatore per ogni copia o menzionare per ogni copia opaca un indirizzo di una rete di calcolatori pubblicamente accessibile in cui vi sia una copia trasparente completa del documento, spogliato di materiale aggiuntivo, e a cui si possa accedere anonimamente e gratuitamente per scaricare il documento usando i protocolli standard e pubblici generalmente usati. Se si adotta l'ultima opzione, si deve prestare la giusta attenzione, nel momento in cui si inizia la distribuzione in quantità elevata di copie opache, ad assicurarsi che la copia trasparente rimanga accessibile all'indirizzo stabilito fino ad almeno un anno di distanza dall'ultima distribuzione (direttamente o attraverso rivenditori) di quell'edizione al pubblico. È caldamente consigliato, benché non obbligatorio, contattare l'autore del documento prima di distribuirne un numero considerevole di copie, per metterlo in grado di fornire una versione aggiornata del documento.

4. MODIFICHE

Si possono copiare e distribuire versioni modificate del documento rispettando le condizioni delle precedenti sezioni 2 e 3, purché la versione modificata sia realizzata seguendo scrupolosamente questa stessa licenza, con la versione modificata che svolga il ruolo del documento, così da estendere la licenza sulla distribuzione e la modifica a chiunque ne possieda una copia. Inoltre nelle versioni modificate si deve:

A. Usare nella pagina del titolo (e nelle copertine se ce ne sono) un titolo diverso da quello del documento, e da quelli di versioni precedenti (che devono essere elencati nella sezione storia del documento ove presenti). Si può usare lo stesso titolo di una versione precedente se l'editore di quella versione originale ne ha dato il permesso. B. Elencare nella pagina del titolo, come autori, una o più persone o gruppi responsabili in qualità di autori delle modifiche nella versione modificata, insieme ad almeno cinque fra i principali autori del documento (tutti gli autori principali se sono meno di cinque). C. Dichiarare nella pagina del titolo il nome dell'editore della versione modificata in qualità di editore. D. Conservare tutte le note sul copyright del documento originale. E. Aggiungere un'appropriata licenza per le modifiche di seguito alle altre licenze sui copyright. F. Includere immediatamente dopo la nota di copyright, un avviso di licenza che dia pubblicamente il permesso di usare la versione modificata nei termini di questa licenza, nella forma mostrata nell'addendum alla fine di questo testo. G. Preservare in questo avviso di licenza l'intera lista di sezioni non modificabili e testi copertina richieste come previsto dalla licenza del documento. H. Includere una copia non modificata di questa licenza. I. Conservare la sezione intitolata Storia, e il suo titolo, e aggiungere a questa un elemento che riporti al minimo il titolo, l'anno, i nuovi autori, e gli editori della versione modificata come figurano nella pagina del titolo. Se non ci sono sezioni intitolate Storia nel documento, createne una che riporti il titolo, gli autori, gli editori del documento come figurano nella pagina del titolo, quindi aggiungete un elemento che descriva la versione modificata come detto in precedenza. J. Conservare l'indirizzo in rete riportato nel documento, se c'è, al fine del pubblico accesso ad una copia trasparente, e possibilmente l'indirizzo in rete per le precedenti versioni su cui ci si è basati. Questi possono essere collocati nella sezione Storia. Si può omettere un indirizzo di rete per un'opera pubblicata almeno quattro anni prima del documento stesso, o se l'originario editore della versione cui ci si riferisce ne dà il permesso. K. In ogni sezione di Ringraziamenti o Dediche, si conservino il titolo, il senso, il tono della sezione stessa. L. Si conservino inalterate le sezioni non modificabili del documento, nei propri testi e nei propri titoli. I numeri della sezione o equivalenti non sono considerati parte del titolo della sezione. M. Si cancelli ogni sezione intitolata Riconoscimenti. Solo questa sezione può non essere inclusa nella versione modificata. N. Non si modifichi il titolo di sezioni esistenti come miglioria o per creare confusione con i titoli di sezioni non modificabili.

Se la versione modificata comprende nuove sezioni di primaria importanza o appendici che ricadono in sezioni secondarie, e non contengono materiale copiato dal documento, si ha facoltà di rendere non modificabili quante sezioni si voglia. Per fare ciò si aggiunga il loro titolo alla lista delle sezioni immutabili nella nota di copyright della versione modificata. Questi titoli devono essere diversi dai titoli di ogni altra sezione. Si può aggiungere una sezione intitolata Riconoscimenti, a patto che non contenga altro che le approvazioni alla versione modificata prodotte da vari soggetti–per esempio, affermazioni di revisione o che il testo è stato approvato da una organizzazione come la definizione normativa di uno standard. Si può aggiungere un brano fino a cinque parole come Testo Copertina, e un brano fino a 25 parole come Testo di Retro Copertina, alla fine dell'elenco dei Testi Copertina nella versione modificata. Solamente un brano del Testo Copertina e uno del Testo di Retro Copertina possono essere aggiunti (anche con adattamenti) da ciascuna persona o organizzazione. Se il documento include già un testo copertina per la stessa copertina, precedentemente aggiunto o adattato da voi o dalla stessa organizzazione nel nome della quale si agisce, non se ne può aggiungere un altro, ma si può rimpiazzare il vecchio ottenendo l'esplicita autorizzazione dall'editore precedente che aveva aggiunto il testo copertina. L'autore/i e l'editore/i del documento non ottengono da questa licenza il permesso di usare i propri nomi per pubblicizzare la versione modificata o rivendicare l'approvazione di ogni versione modificata.

5. UNIONE DI DOCUMENTI
Si può unire il documento con altri realizzati sotto questa licenza, seguendo i termini definiti nella precedente sezione 4 per le versioni modificate, a patto che si includa l'insieme di tutte le Sezioni Invarianti di tutti i documenti originali, senza modifiche, e si elenchino tutte come Sezioni Invarianti della sintesi di documenti nella licenza della stessa. Nella sintesi è necessaria una sola copia di questa licenza, e multiple sezioni invarianti possono essere rimpiazzate da una singola copia se identiche. Se ci sono multiple Sezioni Invarianti con lo stesso nome ma contenuti differenti, si renda unico il titolo di ciascuna sezione aggiungendovi alla fine e fra parentesi, il nome dell'autore o editore della sezione, se noti, o altrimenti un numero distintivo. Si facciano gli stessi aggiustamenti ai titoli delle sezioni nell'elenco delle Sezioni Invarianti nella nota di copyright della sintesi. Nella sintesi si devono unire le varie sezioni intitolate storia nei vari documenti originali di partenza per formare una unica sezione intitolata storia; allo stesso modo si unisca ogni sezione intitolata Ringraziamenti, e ogni sezione intitolata Dediche. Si devono eliminare tutte le sezioni intitolate Riconoscimenti.

6. RACCOLTE DI DOCUMENTI
Si può produrre una raccolta che consista del documento e di altri realizzati sotto questa licenza; e rimpiazzare le singole copie di questa licenza nei vari documenti con una sola inclusa nella raccolta, solamente se si seguono le regole fissate da questa licenza per le copie alla lettera come se si applicassero a ciascun documento. Si può estrarre un singolo documento da una raccolta e distribuirlo individualmente sotto questa licenza, solo se si inserisce una copia di questa licenza nel documento estratto e se si seguono tutte le altre regole fissate da questa licenza per le copie alla lettera del documento.

7. RACCOGLIERE INSIEME A LAVORI INDIPENDENTI
Una raccolta del documento o sue derivazioni con altri documenti o lavori separati o indipendenti, all'interno di o a formare un archivio o un supporto per la distribuzione, non è una versione modificata del documento nella sua interezza, se non ci sono copyright per l'intera raccolta. Ciascuna raccolta si chiama allora aggregato e questa licenza non si applica agli altri lavori contenuti in essa che ne sono parte, per il solo fatto di essere raccolti insieme, qualora non siano però loro stessi lavori derivati dal documento. Se le esigenze del Testo Copertina della sezione 3 sono applicabili a queste copie del documento allora, se il documento è inferiore ad un quarto dell'intero aggregato i

Testi Copertina del documento possono essere piazzati in copertine che delimitano solo il documento all'interno dell'aggregato. Altrimenti devono apparire nella copertina dell'intero aggregato.

8. TRADUZIONI
La traduzione è considerata un tipo di modifica, e di conseguenza si possono distribuire traduzioni del documento seguendo i termini della sezione 4. Rimpiazzare sezioni non modificabili con traduzioni richiede un particolare permesso da parte dei detentori del diritto d'autore, ma si possono includere traduzioni di una o più sezioni non modificabili in aggiunta alle versioni originali di queste sezioni immutabili. Si può fornire una traduzione della presente licenza a patto che si includa anche l'originale versione inglese di questa licenza. In caso di discordanza fra la traduzione e l'originale inglese di questa licenza la versione originale inglese prevale sempre. **9. TERMINI**
Non si può applicare un'altra licenza al documento, copiarlo, modificarlo, o distribuirlo al di fuori dei termini espressamente previsti da questa licenza. Ogni altro tentativo di applicare un'altra licenza al documento, copiarlo, modificarlo, o distribuirlo è deprecato e pone fine automaticamente ai diritti previsti da questa licenza. Comunque, per quanti abbiano ricevuto copie o abbiano diritti coperti da questa licenza, essi non ne cessano se si rimane perfettamente coerenti con quanto previsto dalla stessa.

10. REVISIONI FUTURE DI QUESTA LICENZA
La Free Software Foundation può pubblicare nuove, rivedute versioni della Gnu Free Documentation License volta per volta. Qualche nuova versione potrebbe essere simile nello spirito alla versione attuale ma differire in dettagli per affrontare nuovi problemi e concetti. Si veda http://www.gnu.org/copyleft. Ad ogni versione della licenza viene dato un numero che distingue la versione stessa. Se il documento specifica che si riferisce ad una versione particolare della licenza contraddistinta dal numero o ogni versione successiva, si ha la possibilità di seguire termini e condizioni sia della versione specificata che di ogni versione successiva pubblicata (non come bozza) dalla Free Software Foundation. Se il documento non specifica un numero di versione particolare di questa licenza, si può scegliere ogni versione pubblicata (non come bozza) dalla Free Software Foundation. Come usare questa licenza per i vostri documenti Per applicare questa licenza ad un documento che si è scritto, si includa una copia della licenza nel documento e si inserisca il seguente avviso di copiright appena dopo la pagina del titolo: Copyright (c) ANNO VOSTRO NOME. È garantito il permesso di copiare, distribuire e/o modificare questo documento seguendo i termini della GNU Free Documentation License, Versione 1.1 o ogni versione successiva pubblicata dalla Free Software Foundation; con le Sezioni Non Modificabili ELENCARNE I TITOLI, con i Testi Copertina ELENCO, e con i Testi di Retro Copertina ELENCO. Una copia della licenza è acclusa nella sezione intitolata GNU Free Documentation License. Se non ci sono Sezioni non Modificabili, si scriva senza Sezioni non Modificabili invece di dire quali sono non modificabili. Se non c'è Testo Copertina, si scriva nessun Testo Copertina invece di il testo Copertina è ELENCO; e allo stesso modo si operi per il Testo di Retro Copertina. Se il vostro documento contiene esempi non banali di programma in codice sorgente si raccomanda di realizzare gli esempi contemporaneamente applicandovi anche una licenza di software libero di vostra scelta, come ad esempio la GNU General Public License, al fine di permetterne l'uso come software libero.

Indice analitico

Addizione (formule di), 41, 49
Angoli complementari, 37, 40
Angoli esplementari, 38, 40
Angoli interni (somma), 63
Angoli opposti, 38, 40
Angoli supplementari, 37, 40
Angolo giro, 17
Angolo piano, 13
Arccos, 33
Arcsin, 33
Arctan, 34
Area di un triangolo, 65

Bisezione (formule di), 46, 49
Briggs (formule di), 68

Carnot (teorema di), 67
Complementari (angoli), 39
Corda (teorema della), 67
Cosecante (proprietà della), 30
Coseno, 20, 21
Coseno (segno del), 60
Coseno (teorema del), 67
Cotangente (segno della), 60

Disequazioni goniometriche, 59
Dispari (secante), 30
Distanza tra due punti, 42
Dominio coseno, 21
Dominio della cotangente, 28
Dominio seno, 21
Dominio tangente, 26
Duplicazione (formule di), 44, 49

Equazione goniometrica, 51
Equazione lineare omogenea, 54
Equazioni con più funzioni goniometriche, 53
Equazioni goniometriche elementari, 51
Equazioni quadratiche, 52
Equivalenza a meno di giri, 16, 17
Erone (formula di), 69
Esplementari (angoli), 39

FDL, 71
    inglese, 71
    italiano, 77
Forma decimale per i gradi, 16
Funzione, 19
Funzione invertibile, 32
Funzione periodica, 20
Funzioni goniometriche inverse, 32

Lati (differenza di), 63
Lati (somma di), 63
Lati e angoli in un triangolo, 63
Licenza, 2
Limitatezza di $\sin$ e $\cos$, 23
Lunghezza dell'arco, 17

Omogenea (equazione lineare), 54
Opposti (angoli), 39

Parametriche (formule), 45
Pari (cosecante), 31
Passaggio gradi-radianti, 18
Periodicitá della cotangente, 28
Periodicità della tangente, 27
Potenze dispari, 20
Potenze pari, 19
Primi, 16
Proiezioni (teorema delle), 65
Prostaferesi (formule di), 47, 49

Radiante, 17
Relazioni lati-angoli, 64
Relazioni tra primi e gradi, 16
Relazioni tra primi e secondi, 16
Relazioni tra secondi e gradi, 16

Secante (proprietà della), 29
Secondi, 16
Seni (teorema dei), 68
Seno, 20

Seno (segno del), 59
Sessadecimale, 15
Sistema, 15
Sottrazione (formule di), 41, 49
Supplementari (angoli), 38

Tangente (segno della), 60
Teorema fondamentale della trigonometria, 22
Triangolo rettangolo, 64

Werner (formule di), 49