

Analisi complessa e spazi di Hilbert: definizioni ed enunciati

by ★mikele¹★

definizioni sintetiche ed
enunciati dei teoremi
per il corso di Analisi Funzionale
per Scienza dei Materiali

Capitolo 1. Analisi complessa	2
1.1. Numeri complessi	2
1.2. Funzioni di variabile complessa	3
1.3. Funzioni elementari	5
1.4. Integrali nel campo complesso	6
1.5. Serie di potenze	10
1.6. Calcolo dei residui	12
Capitolo 2. Spazi di Hilbert	15
2.1. Insiemi finiti, numerabili, non numerabili	15
2.2. Spazi metrici	15
2.3. Campi e spazi vettoriali	16
2.4. Norma e spazi di Banach	18
2.5. Prodotto scalare e spazi di Hilbert	18
2.6. Serie trigonometriche	22
2.7. Operatori lineari in H	23
Capitolo 3. Trasformata di Fourier	27
3.1. Definizione e proprietà	27
3.2. Convoluzione	28
Capitolo 4. Integrale di Lebesgue	29
4.1. Integrale di Riemann	29
4.2. Misura di Lebesgue	30
4.3. Integrale di Lebesgue	32

¹typeset with L^AT_EX under GNU Linux: no hardware equipment was harmed with MS products in the writing of this work. © michele ceriotti 2005. permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License. see www.gnu.org for details.

CAPITOLO 1

Analisi complessa

1.1. Numeri complessi

DEFINIZIONE 1.1.1. Definiamo l'insieme dei numeri complessi \mathbb{C} come l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con somma e prodotto definiti come

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_2y_1 + x_1y_2);$$

è facile convincersi che con queste definizioni \mathbb{C} ha le proprietà algebriche di un *campo* (vedi sez. 2.3). Inoltre, assimilando i numeri della forma $(x, 0)$ ai numeri reali, è possibile mostrare che ogni numero complesso si può scrivere come

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy$$

dove $i = (0, 1)$.

L'analogia tra \mathbb{C} ed \mathbb{R}^2 (è immediato vedere che i due insiemi sono in corrispondenza biunivoca) suggerisce di rappresentare il campo complesso come l'insieme dei punti di un piano cartesiano. Definiamo poi, dato un numero $z \in \mathbb{C} = x + iy = (x, y)$:

- (1) il *coniugato* $\bar{z} = x - iy$
- (2) la *parte reale* $\Re z = x = (z + \bar{z})/2$
- (3) la *parte immaginaria* $\Im z = y = (z - \bar{z})/2i$
- (4) il *modulo* $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$

Avendo rappresentato i numeri complessi su un piano cartesiano, si può ora passare ad una rappresentazione in coordinate polari. Si può quindi scrivere $z \in \mathbb{C}$ come $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$; evidentemente per $z = 0$ la forma polare è mal definita. ρ è il *modulo* di z e θ l'*argomento* $\theta = \arg z$, che è definito a meno di multipli interi di 2π . Il *valore principale* dell'argomento è il valore scelto in $(-\pi, \pi]$, $\text{Arg } z$. Definendo poi tramite la *formula di Eulero* $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ (relazione che sarà giustificata in seguito) avremo $z = \rho e^{i\theta}$.

TEOREMA 1.1.2. *Le quantità sopra definite godono di una serie di proprietà algebriche: siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, con $z_1 = x_1 + iy_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = x_2 + iy_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$*

- (1) $\rho_1 = |z_1|$
- (2) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- (3) $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
- (4) $z_1 / z_2 = \rho_1 / \rho_2 e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$
- (5) $z_1^n = \rho_1^n e^{in\theta_1} \quad n \in \mathbb{Z}$
- (6) $\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{\rho_1} e^{i\left(\frac{\theta_1}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right)} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$

Inoltre si nota che $|\cdot|$ soddisfa le definizioni di una distanza (sez. 2.2), e di conseguenza si può considerare \mathbb{C} uno spazio metrico.

1.2. Funzioni di variabile complessa

DEFINIZIONE 1.2.1. Una funzione di variabile complessa è una funzione $f : S \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dove ovviamente si comprendono come casi particolari le funzioni reali di variabile complessa. Risulta particolarmente utile sottolineare il legame tra \mathbb{C} ed \mathbb{R}^2 , perchè molte delle proprietà delle funzioni di variabile complessa diventano conseguenze dirette di quelle delle funzioni in \mathbb{R}^2 . Sia Φ una funzione biunivoca che mappa \mathbb{C} in \mathbb{R}^2 (ad esempio $\Phi : z = x + iy \rightarrow \mathbf{w} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$). Possiamo scrivere ogni funzione di variabile complessa $f : S \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ come somma di due funzioni $\Phi(S) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(z = x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

I limiti sono definiti in modo ovvio, rispetto alla distanza di \mathbb{C} ; scriviamo

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w| < \epsilon;$$

i limiti ad infinito seguono sulla base della definizione di un *intorno di* ∞ come $|z| > 1/\epsilon$, $\epsilon > 0$:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta : |z| > \frac{1}{\delta} \Rightarrow |f(z) - w| < \epsilon,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > \frac{1}{\epsilon}.$$

TEOREMA 1.2.2. Considerando $f(z = x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ e $w_0 = u_0 + iy_0$, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ se e solo se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \quad e \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0$$

TEOREMA 1.2.3. Se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ e $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = h_0$ allora

- (1) $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = w_0 + h_0$
- (2) $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)g(z)] = w_0h_0$
- (3) $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)/g(z)] = w_0/h_0$ per $h_0 \neq 0$

DEFINIZIONE 1.2.4. Anche la definizione di continuità ricalca quella per una funzione in un generico spazio metrico: una funzione $f(z)$ è continua in z_0 se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, sottintendendo che questa scrittura presupponga l'esistenza del limite e della funzione nel punto. Una funzione si dice continua in un insieme se è continua per ogni punto di quell'insieme.

TEOREMA 1.2.5. Una funzione $f(z)$ è continua se e solo se le sue componenti u e v sono continue.

TEOREMA 1.2.6. La funzione composta da due funzioni continue è continua

TEOREMA 1.2.7. Una funzione continua su un insieme A chiuso e limitato è limitata, cioè il suo modulo raggiunge un valore massimo per almeno un punto di A .

1.2.1. Derivate.

DEFINIZIONE 1.2.8. La definizione di derivata per una funzione a variabile complessa ricorda formalmente quella per le funzioni reali: se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è definita in un intorno di z_0 , la derivata è definita come

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

se il limite esiste. In realtà la derivabilità è una condizione piuttosto restrittiva: anche funzioni apparentemente “innocue”, come $z \rightarrow \bar{z}$ non sono derivabili.

TEOREMA 1.2.9. *Se una funzione è derivabile in un punto è anche continua nello stesso punto.*

TEOREMA 1.2.10. *Siano $f, g : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, A aperto, $z_0 \in A$ e f e g derivabili in z_0 . Allora*

- (1) $\frac{dc}{dz} = 0$ c costante
- (2) $\frac{d}{dz}(cf) = c \frac{df}{dz}$ c costante
- (3) $f + g$ è derivabile e $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$
- (4) fg è derivabile e $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$
- (5) $1/f$ è derivabile se $f(z_0) \neq 0$ e $(1/f)'(z_0) = -f'(z_0)/f(z_0)^2$
- (6) $(z^n)' = nz^{n-1}$
- (7) se $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g : f(A) \rightarrow \mathbb{C}$, f è derivabile in $z_0 \in A$ e g è derivabile in $f(z_0)$ allora $(f \circ g)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$

TEOREMA 1.2.11. *Sia $f(z = x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$; condizione necessaria perchè f sia differenziabile in z_0 è che valgano le condizioni di Cauchy-Riemann,*

$$\boxed{u_x = v_y \quad u_y = -v_x}$$

Se inoltre u e v hanno derivate in un intorno di z_0 e tali derivate sono continue in z_0 , allora le condizioni sopra citate sono anche sufficienti, ed esiste la derivata $f'(z_0) = u_x + iv_x$.

DEFINIZIONE 1.2.12. Una funzione è *analitica* o *olomorfa* in un insieme aperto se ha derivata in ogni punto di tale insieme. Diremo che è analitica in un punto z_0 se è analitica in un intorno di z_0 , e che è *intera* se è analitica su tutto \mathbb{C} . Se f non è derivabile in un punto z_0 , ma è derivabile in qualche punto di ogni intorno di z_0 diremo che z_0 è una *singolarità*. Se esiste un intorno di z_0 tale che f sia derivabile in tutto l'intorno tranne che in z_0 diremo che z_0 è una *singolarità isolata*.

Si definisce *dominio* un insieme D aperto connesso, che non possa cioè essere espresso come unione di due aperti disgiunti non vuoti. Si può dimostrare che esiste sempre una poligonale composta da un numero finito di segmenti che unisce qualsiasi coppia di punti contenuti in un dominio.

TEOREMA 1.2.13. *Se una funzione ha derivata nulla in un dominio D , allora $f(z) = c$ costante in tutto il dominio.*

DEFINIZIONE 1.2.14. Una funzione reale di due variabili $u(x, y)$ si dice *armonica* se soddisfa l'equazione differenziale $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Una funzione armonica v si dice *armonica coniugata* di una funzione armonica u se le due funzioni soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann.

TEOREMA 1.2.15. $f(z = x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ è analitica in un dominio D se e solo se v è armonica coniugata di u .

1.3. Funzioni elementari

Definiremo ora una serie di funzioni sul campo complesso, corrispondenti alle funzioni esponenziale, logaritmica ed alle funzioni trigonometriche sul campo reale. Vedremo in seguito che il requisito di analiticità e la richiesta di coincidere con le controparti reali per $\Im z = 0$ rende univoca la nostra scelta, e stabilisce un nesso tra l'espansione in serie della funzione reale e quella della funzione complessa.

Inoltre quando è possibile stabilire relazioni tra le varie funzioni (es. relazioni trigonometriche), in modo tale che i due membri dell'uguaglianza siano funzioni analitiche in un dominio, le relazioni sono verificate su tutto il dominio a patto che siano verificate sull'asse reale. Questo permette in genere di estendere a tutto il campo complesso la validità delle usuali relazioni nel campo reale.

1.3.1. Esponenziale. La funzione esponenziale sul campo complesso e^z è definita come

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x e^{iy}$$

ricordando la formula di Eulero. Si dimostra facilmente che valgono le usuali proprietà della funzione esponenziale, $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, $(e^z)^n = e^{nz}$; inoltre e^z è periodica con periodo $2\pi i$: $e^{z+2\pi ik} = e^z$.

1.3.2. Funzioni trigonometriche ed iperboliche. Le funzioni trigonometriche si definiscono a partire dall'esponenziale, come

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2};$$

sono analitiche ed hanno rispettivamente derivate $(\sin z)' = \cos z$ e $(\cos z)' = -\sin z$. Valgono le formule di addizione, duplicazione, prostaferesi, formalmente uguali a quelle nel campo reale; tangente, cotangente, secante e cosecante sono definite come nel caso reale.

Le funzioni iperboliche sono definite da

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2};$$

$(\sinh z)' = \cosh z$ e $(\cosh z)' = \sinh z$; oltre alle solite relazioni valide sul campo reale si hanno $-i \sinh iz = \sin z$, $\cosh iz = \cos z$, $-i \sin iz = \sinh z$ e $\cos iz = \cosh z$, che legano funzioni trigonometriche ed iperboliche sul campo complesso.

1.3.3. Logaritmo. Definiamo la funzione logaritmo come la soluzione w dell'equazione $e^w = z$. Scrivendo $z = |z|e^{i \arg z}$ è chiaro come esistano più soluzioni, della forma $\log z = \ln |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Ciascuna delle soluzioni, con k fissato, costituisce una *branca* della funzione logaritmo, che è in effetti una funzione a più valori. La branca principale della funzione è quella presa con $k = 0$. Ciascuna branca della funzione logaritmo è analitica su \mathbb{C} tranne che nell'origine e lungo un raggio (*branch cut*), ed ha derivata $(\log z)' = 1/z$.

1.3.4. Potenze con esponenti complessi. Per $z \neq 0$ e $c \in \mathbb{C}$ definiamo $z^c = e^{c \log z}$. Tale funzione coincide, per $c \in \mathbb{N}$, con i valori di z^n definiti sulla base delle proprietà algebriche dei numeri complessi; in generale è però una funzione a molti valori, con branche che corrispondono alla branca scelta per la funzione logaritmo, $\log z = \ln |z| + i \arg z$ ($\alpha < \arg z < \alpha + 2\pi$). z^c è analitica nel dominio in cui è analitica la funzione logaritmo, e ha derivata $(z^c)' = cz^{c-1}$.

La funzione esponenziale con base c si definisce come $c^z = e^{z \log c}$, ed è una funzione intera quando venga scelta una qualsiasi branca di $\log c$, ed ha derivata $c^z \log c$.

1.4. Integrali nel campo complesso

DEFINIZIONE 1.4.1. Occorre formulare delle definizioni di integrali nel campo complesso. Conviene cominciare introducendo gli integrali di una funzione di variabile reale con valori complessi, $w(t) = u(t) + i v(t)$; definiamo la derivata di tale funzione come $w'(t) = u'(t) + i v'(t)$, così che valgano formalmente le stesse regole di derivazione del caso a valori reali.

Gli integrali si introducono naturalmente, in questo contesto, come

$$(1.4.1) \quad \int_a^b w(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt,$$

in modo da poter trasportare senza problemi le varie regole di integrazione del caso reale.

TEOREMA 1.4.2. *Gli integrali nella (1.4.1) sono di sicuro ben definiti se le funzioni u e v sono continue a tratti, e vale il teorema fondamentale del calcolo integrale: se $z'(t) = w(t)$,*

$$\int_a^b w(t) dt = z(b) - z(a);$$

inoltre vale la disuguaglianza

$$\left| \int_a^b w(t) dt \right| \leq \int_a^b |w(t)| dt \quad (a < b).$$

DEFINIZIONE 1.4.3. Gli integrali di funzioni a variabile complessa vengono definiti lungo dei *percorsi* di integrazione, in modo analogo agli integrali curvilinei per le funzioni reali di più variabili. Occorre quindi per prima cosa considerare delle *curve parametriche* in \mathbb{C} , definibili come $z(t) = x(t) + i y(t)$; un arco di curva è un tratto con z definita per $t \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, continua; si dice *semplice* se $z(t_1) = z(t_2) \iff t_1 = t_2$ (la curva non ha autointersezioni), e

chiuso se $z(a) = z(b)$; si dice *regolare* se $z \in C^1([a, b])$ e $z'(t) \neq 0$ tranne al più agli estremi. È *regolare a tratti* se è possibile suddividerla in un numero finito di archi regolari.

TEOREMA 1.4.4. (DI JORDAN) *Ogni curva semplice e chiusa divide il piano in due regioni aperte, una limitata (interno) ed una non limitata (esterno).*

DEFINIZIONE 1.4.5. Per ogni arco di curva semplice e regolare $z(t)$ è possibile definirne la *lunghezza* come l'integrale $L = \int_a^b |z'(t)| dt$.

TEOREMA 1.4.6. *La definizione di lunghezza appena data è indipendente dalla parametrizzazione; considerando la curva parametrica $\tilde{z}(\tau) = z(\phi(\tau))$, dove $\phi(\tau) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione con derivata continua maggiore di zero (in modo da garantire che mappi in maniera biunivoca $[\alpha, \beta]$ su $[a, b]$),*

$$L = \int_a^b |z'(t)| dt = \int_\alpha^\beta |\tilde{z}'(\tau)| d\tau$$

1.4.1. Integrali di contorno. Abbiamo ora gli strumenti necessari per introdurre una definizione conveniente di integrale per una funzione di variabile complessa a valori complessi, lungo un percorso di integrazione C rappresentato da una curva parametrica in \mathbb{C} .

DEFINIZIONE 1.4.7. Sia C una curva regolare a tratti, $C = \bigcup z_i(t)$, $z_i(t) : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{C}$, $a_i = b_{i-1}$, $z_i(b_i) = z_{i+1}(a_{i+1})$. Definiamo

$$\int_C f(z) dz = \sum \int_{a_i}^{b_i} f(z_i(t)) z_i'(t) dt.$$

Segue da questa definizione che se possiamo scomporre il percorso C come "somma" di due percorsi C_1 e C_2 (tali che $z_1 : [a, c] \rightarrow \mathbb{C}$, $z_2 : [c, b] \rightarrow \mathbb{C}$ e $z_1(c) = z_2(c)$)

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz,$$

e che se consideriamo il percorso $-C$ identico al percorso C ma con verso di percorrenza opposto,

$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz.$$

TEOREMA 1.4.8. *Vale la disuguaglianza $|\int_C f(z) dz| \leq ML$, dove M è il massimo valore di $|f(z)|$ assunto dalla funzione lungo il percorso, e L la lunghezza del percorso.*

DEFINIZIONE 1.4.9. Esiste una correlazione stretta tra gli integrali di contorno nel campo complesso e quelli in \mathbb{R}^2 ; infatti è possibile formulare una definizione di *antiderivata*, che svolge una funzione analoga al potenziale nel caso reale. Si dice *antiderivata* di una funzione $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continua una funzione F tale che $F'(z) = f(z)$ in tutto il dominio D . L'antiderivata è unica a meno di una costante additiva.

TEOREMA 1.4.10. *Sia f una funzione continua su un dominio D . Allora ognuna di queste proprietà implica le altre due:*

- (1) f ha antiderivata F in D
- (2) l'integrale di f lungo contorni interamente contenuti in D dipende solo dai punti iniziali e finali del contorno
- (3) l'integrale di f lungo ogni contorno chiuso interamente contenuto in D è nullo.

TEOREMA 1.4.11. (DI CAUCHY-GOURSAT) *Se una funzione f è analitica all'interno e sui punti di un cammino semplice chiuso C , allora*

$$\int_C f(z) dz = 0$$

Questo teorema può essere provato facilmente, sotto ipotesi leggermente più forti (supponendo anche la continuità di f'), ricorrendo al

TEOREMA 1.4.12. (DI GREEN) *Se $Q(x, y)$, $P(x, y)$ e le loro derivate parziali sono continue su di un contorno C e sulla regione interna R , allora*

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_R (Q_x - P_y) dA$$

DEFINIZIONE 1.4.13. Un dominio si dice *semplicemente connesso* se ogni contorno semplice chiuso contenuto in D ha interno interamente contenuto in D . Un dominio che non sia semplicemente connesso si dice *molteplimente connesso*. È un'immediata conseguenza del teorema di Cauchy-Goursat che:

TEOREMA 1.4.14. *Se una funzione f è analitica in un dominio semplicemente connesso D ,*

$$\int_C f(z) dz = 0$$

per ogni cammino semplice chiuso C contenuto in D .

COROLLARIO 1.4.15. *Una funzione analitica su un dominio semplicemente connesso ammette antiderivata in quel dominio.*

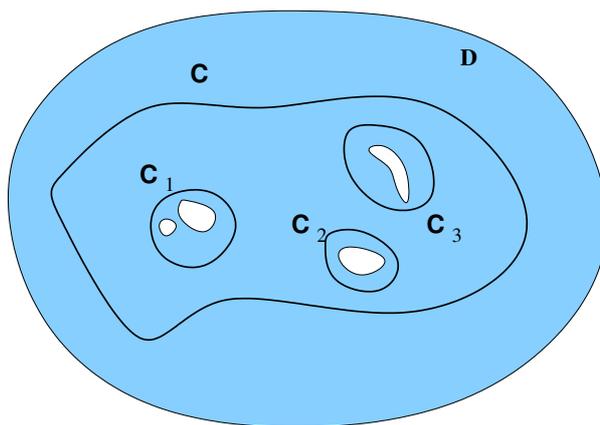


FIGURA 1.4.1. Dominio molteplimente connesso, e percorsi di integrazione per il teorema 1.4.16

TEOREMA 1.4.16. Consideriamo f analitica in un dominio D molteplicemente connesso. Sia C un cammino semplice chiuso in D percorso in senso antiorario, e C_k ($k = 1 \dots n$) cammini semplici chiusi interamente contenuti interno di C , percorsi in senso orario, i cui interni non abbiano punti in comune, e tali che tutti i punti dell'interno di C in cui f non è analitica siano contenuti all'interno di uno dei C_k (fig. 1.4.1). Allora

$$\int_C f(z) dz + \sum_k \int_{C_k} f(x) dz = 0$$

COROLLARIO 1.4.17. Se C_1 e C_2 sono due cammini semplici chiusi percorsi nello stesso verso, per i quali l'interno di C_2 è interamente contenuto nell'interno di C_1 , e se una funzione f è analitica nella regione chiusa compresa tra i due contorni, allora

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$

TEOREMA 1.4.18. (FORMULA DI RAPPRESENTAZIONE DI CAUCHY) Se una funzione f è analitica all'interno e sul bordo di un contorno semplice chiuso C , percorso in senso positivo (antiorario), per ogni punto z_0 interno al contorno stesso

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Inoltre tutte le derivate della funzione sono analitiche all'interno del contorno, e

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

COROLLARIO 1.4.19. Se una funzione è analitica in un punto $z = x + iy$, le sue componenti $u(x, y)$ e $v(x, y)$ hanno derivate parziali continue di ogni ordine in (x, y) .

TEOREMA 1.4.20. (DI MORERA) Se una funzione è continua in un dominio D e

$$\int_C f(z) dz = 0$$

per ogni cammino semplice chiuso contenuto in D , f è analitica in D .

TEOREMA 1.4.21. (DI LIOUVILLE) Se f è intera e limitata nel piano complesso, allora $f(z)$ è costante su tutto il piano.

TEOREMA 1.4.22. (FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA) Ogni polinomio

$$P_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n$$

di ordine $N > 0$ ha almeno uno zero.

COROLLARIO 1.4.23. Un polinomio di grado $N > 0$ può essere fattorizzato come un prodotto di n termini lineari

$$P_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n = c \prod_{n=1}^N (z - z_n)$$

TEOREMA 1.4.24. *Se f è analitica in un intorno $|z - z_0| < \epsilon$ di un punto z_0 , e $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ per ogni punto z appartenente all'intorno, allora $f(z) = f(z_0)$ in tutto l'intorno.*

Se f è analitica in un dominio D e non è costante, allora non ha massimo modulo in D .

COROLLARIO 1.4.25. *Se f è continua su una regione chiusa e limitata, ed è analitica e non costante all'interno della regione stessa, allora il massimo modulo di $|f(z)|$ si registra sul bordo della regione, e mai all'interno.*

1.5. Serie di potenze

1.5.1. Successioni nel campo complesso. Per introdurre le successioni ed i concetti di convergenza nel campo complesso ci limitiamo a declinare le definizioni per un generico spazio metrico, utilizzando la distanza e la nomenclatura di \mathbb{C} . In particolare, sarà utile costruire legami tra le successioni in \mathbb{C} e le successioni in \mathbb{R} .

DEFINIZIONE 1.5.1. Una successione in \mathbb{C} è una funzione $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, che indichiamo come un insieme di valori con indice, $\{z_n\}$. Diciamo che una successione converge a z , o che $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ se $\forall \epsilon > 0 \exists N : n > N \Rightarrow |z_n - z| < \epsilon$. Una *serie* è una somma infinita $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, e diciamo che converge se converge la successione delle somme parziali $s_N = \sum_{n=1}^N z_n$.

TEOREMA 1.5.2. *Sia $z_n = x_n + iy_n$ una successione in \mathbb{C} , e $z = x + iy$. Allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y;$$

in modo analogo, se $S = X + iY$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \iff \sum_{n=1}^{\infty} x_n = X \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y.$$

TEOREMA 1.5.3. *Se una serie di numeri complessi converge in valore assoluto, converge anche in senso proprio: se $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ converge, allora converge anche $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.*

1.5.2. Serie di potenze.

DEFINIZIONE 1.5.4. Una *serie di potenze* è una serie dipendente da un parametro z , della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

TEOREMA 1.5.5. *Se una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge per $z = z_1 \neq z_0$, allora converge assolutamente in ogni punto del disco aperto $|z - z_0| < R_1 = |z_1 - z_0|$. Definendo il raggio di convergenza R come il $\sup |z - z_0|$ tra tutti gli z per cui la serie converge, abbiamo che la serie converge assolutamente all'interno di un disco di raggio R centrato in z_0 , ed in nessun punto all'esterno del cerchio. Se $R = \infty$ la serie converge su \mathbb{C} , se è zero converge soltanto in z_0 .*

Una serie di potenze definisce quindi una funzione sul suo cerchio di convergenza,

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (|z - z_0| < R)$$

TEOREMA 1.5.6. *Una serie di potenze con raggio di convergenza R converge uniformemente entro ogni cerchio chiuso di raggio $R' < R$ centrato in z_0 , ed è uniformemente continua entro tale cerchio.*

TEOREMA 1.5.7. *Sia $S(z)$ una serie di potenze definita come sopra, e C un contorno interno al cerchio di convergenza della serie. Sia $g(z)$ una funzione continua sul percorso C . Allora*

$$\int_C g(z) S(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(z) (z - z_0)^n dz.$$

TEOREMA 1.5.8. *$S(z)$ è analitica all'interno del suo cerchio di convergenza, e può essere derivata termine a termine, cioè*

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1};$$

inoltre

$$a_n = \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!}$$

TEOREMA 1.5.9. (DI TAYLOR) *Sia f una funzione analitica in un cerchio aperto $|z - z_0| < R$. Allora la serie di potenze definita come*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

converge a $f(z)$ per ogni punto interno al cerchio.

Tale sviluppo è unico, cioè $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge a $f(z)$ solo se i suoi coefficienti sono $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$.

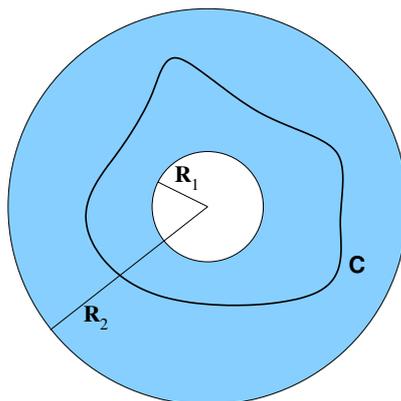


FIGURA 1.5.1. Dominio anulare e percorso di integrazione per il teorema di Laurent.

TEOREMA 1.5.10. (DI LAURENT) *Sia f una funzione analitica in una corona circolare $R_1 < |z - z_0| < R_2$, e sia C un contorno semplice chiuso orientato positivamente, interamente contenuto nel dominio anulare in cui f è analitica (fig. 1.5.1). Allora, in ogni punto del dominio,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

e i coefficienti dello sviluppo valgono

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz.$$

Tale sviluppo è unico.

1.5.3. Prodotto di serie. Date due serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$ è possibile definire il prodotto di Cauchy delle due serie come $\sum c_n$, con $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

TEOREMA 1.5.11. *Se f e g sono due funzioni analitiche, esprimibili in serie di Taylor all'interno di due cerchi $|z - z_f| < R_f$ e $|z - z_g| < R_g$ rispettivamente, il prodotto di Cauchy delle loro serie di Taylor converge al prodotto delle due funzioni, all'interno dell'intersezione dei due cerchi di convergenza.*

1.6. Calcolo dei residui

DEFINIZIONE 1.6.1. Si rimanda alla definizione 1.2.12 di singolarità isolata; per una singolarità isolata z_0 di una funzione f , esiste sempre un intorno in cui la funzione f è analitica, ed è quindi esprimibile in serie di Laurent.

TEOREMA 1.6.2. *Dalla definizione dei coefficienti della serie di Laurent segue che, per un contorno C contenuto nell'intorno della singolarità,*

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i b_1,$$

dove b_1 è il coefficiente del termine $1/(z - z_0)$ nella serie di Laurent.

Si è soliti indicare il termine b_1 della serie di Laurent di una funzione f , in un intorno di una sua singolarità isolata z_0 , come *residuo* di f in z_0 , $b_1 = \text{Res}_{z=z_0} f(z)$.

TEOREMA 1.6.3. (DEI RESIDUI) *Sia C un contorno semplice chiuso orientato positivamente. Se una funzione f è analitica all'interno di C tranne che per un numero finito di singolarità isolate z_k , allora*

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z)$$

TEOREMA 1.6.4. *Se una funzione è olomorfa in \mathbb{C} , eccetto che per un numero finito di punti singolari interni ad un contorno semplice chiuso C orientato positivamente, allora*

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \text{Res}_{z=0} \left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \right]$$

DEFINIZIONE 1.6.5. È possibile classificare i punti singolari isolati di una funzione f studiando la forma del suo sviluppo di Laurent in un intorno di ciascun punto. Si possono in particolare verificare tre casi:

- (1) Tutti i coefficienti b_n delle potenze negative di $z - z_0$ sono identicamente uguali a zero. In questo caso z_0 si dice *singolarità eliminabile*, perchè la funzione diventa analitica in z_0 se si assegna $f(z_0) = a_0$ (dove a_0 è il termine di ordine zero nello sviluppo in serie).
- (2) $b_n = 0$ per $n > m$ e $b_m \neq 0$. In questo caso z_0 si dice essere un *polo di ordine m* ; un polo di ordine 1 si dice *polo semplice*.
- (3) Un numero infinito di b_n sono diversi da zero. z_0 si dice *singolarità essenziale*.

TEOREMA 1.6.6. (DI PICARD) *In ogni intorno di una singolarità essenziale, una funzione assume un numero infinito di volte ogni possibile valore, con la possibile eccezione di un unico valore.*

1.6.1. Calcolo dei residui. I teoremi sviluppati fino a qui permettono di esprimere in modo semplice integrali lungo contorni che contengano punti singolari. Resta però il problema di calcolare il coefficiente b_1 della serie di Laurent; un primo approccio prevede la possibilità di ricavare lo sviluppo in serie della funzione in esame a partire da sviluppi noti, ricavando così in particolare il residuo; è anche possibile calcolare esplicitamente il coefficiente con la formula integrale (ma questo chiaramente svuota di significato il ricorso al teorema dei residui per calcolare un integrale). Sono infine disponibili alcune formule che permettono di calcolare i residui in modo semplice in certi casi particolari.

TEOREMA 1.6.7. *Una singolarità isolata z_0 di una funzione f è un polo di ordine m se e solo se f può essere scritta nella forma*

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m},$$

dove $\phi(z)$ è analitica in z_0 . Inoltre

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

DEFINIZIONE 1.6.8. Si dice che una funzione f analitica in un punto z_0 ha uno zero di ordine m in z_0 se $f^{(n)}(z_0) = 0$ per $n < m$ e $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

TEOREMA 1.6.9. *Un funzione f analitica in z_0 ha uno zero di ordine m se e solo se esiste una funzione $g(z)$, analitica e non nulla in z_0 , tale che $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ in un intorno di z_0 .*

TEOREMA 1.6.10. *Se due funzioni p e q sono analitiche in z_0 , $p(z_0) \neq 0$ e q ha in z_0 uno zero di ordine m , allora $p(z)/q(z)$ ha un polo di ordine m in z_0 .*

COROLLARIO 1.6.11. *Se p e q sono analitiche in z_0 , $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$ e $q'(z_0) \neq 0$ allora z_0 è un polo semplice e*

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

TEOREMA 1.6.12. *Se f è analitica in un dominio D , ed E è l'insieme degli zeri di f , se E ha un punto di accumulazione in D , $f(z) = 0$ in tutto D .*

COROLLARIO 1.6.13. *Una funzione analitica è univocamente determinata dai suoi valori in un dominio o lungo un segmento.*

CAPITOLO 2

Spazi di Hilbert

2.1. Insiemi finiti, numerabili, non numerabili

DEFINIZIONE 2.1.1. Due insiemi A e B hanno la stessa *cardinalità* se esiste una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di A e quelli di B .

Un insieme si dice *finito* se contiene un numero $n < \infty$ di elementi, *numerabile* se ha la stessa cardinalità di \mathbb{N} , *al più numerabile* se è finito o numerabile, e *non numerabile* se è infinito e non è possibile metterlo in corrispondenza biunivoca con \mathbb{N} .

TEOREMA 2.1.2. *L'unione di un insieme al più numerabile di insiemi al più numerabili è al più numerabile.*

COROLLARIO 2.1.3. \mathbb{Z} e \mathbb{Q} sono numerabili

TEOREMA 2.1.4. \mathbb{R} è non numerabile.

2.2. Spazi metrici

DEFINIZIONE 2.2.1. Un insieme X , assieme ad una funzione *distanza* $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$, è uno spazio metrico se per ogni $x, y, z \in X$ sono verificate le seguenti proprietà:

- (1) $d(x, y) \geq 0$
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$
- (3) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- (4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ (disuguaglianza triangolare)

Si dice *intorno* di un punto $x \in X$ l'insieme $N_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$.

TEOREMA 2.2.2. *Dalla disuguaglianza triangolare si ricava immediatamente che $d(x, y) - d(x, z) \leq d(y, z)$*

DEFINIZIONE 2.2.3. Una funzione $\mathbb{N} \rightarrow X$ si dice *successione* in X , ed i suoi elementi si indicano come a_n . Si dice che una successione $\{a_n\}$ *converge* ad un valore $a \in X$ se $\forall \epsilon > 0 \exists N : n > N \Rightarrow d(a_n, a) < \epsilon$, cioè se a è il limite della successione rispetto alla distanza d .

Una successione la quale $\forall \epsilon > 0 \exists N : n, m > N \Rightarrow d(a_n, a_m) < \epsilon$ si dice *successione di Cauchy*; uno spazio metrico nel quale ogni successione di Cauchy è anche convergente si dice *completo*.

Un insieme Y si dice *denso* nello spazio metrico X se $Y \subseteq X$ e $\forall x \in X, \forall N_r(x) : N_r(x) \cap Y \neq \emptyset$.

TEOREMA 2.2.4. *Ogni spazio metrico ammette un completamento: dato uno spazio metrico (X, d) esiste sempre uno spazio metrico completo (\tilde{X}, \tilde{d}) , ed una mappa $\Phi : X \rightarrow \tilde{X}$ con le seguenti proprietà:*

- (1) Φ è iniettiva
- (2) $d(x, y) = \tilde{d}(\Phi(x), \Phi(y))$
- (3) $\Phi(X)$ è denso in \tilde{X} .

DEFINIZIONE 2.2.5. Una funzione $f : X \rightarrow X$ definita su uno spazio metrico è una contrazione se per ogni $x, y \in X$ è verificata la disuguaglianza $d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$, con $0 < k < 1$.

TEOREMA 2.2.6. (DI PUNTO FISSO) *Se (X, d) è uno spazio metrico completo e se f è una contrazione su X , allora $\exists! \bar{x} \in X : f(\bar{x}) = \bar{x}$.*

2.2.1. Serie di funzioni. Consideriamo in questo paragrafo le funzioni definite tra due spazi metrici, $f : (X, d) \rightarrow (Y, h)$.

DEFINIZIONE 2.2.7. Diremo che la successione di funzioni $\{f_n\}$ converge *puntualmente* ad f se $\forall x \in X, \epsilon > 0 \exists N(x, \epsilon) : n > N \Rightarrow h(f_n(x), f(x)) < \epsilon$.

Viceversa, diremo che una successione converge *uniformemente* se $\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) : n > N \Rightarrow h(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ per ogni $x \in X$. L'importante differenza rispetto al caso precedente è che qui è possibile trovare un N valido per tutti gli x .

TEOREMA 2.2.8. *Nel caso di funzioni da uno spazio metrico X a \mathbb{C} , una serie di funzioni $\{f_n\}$ converge uniformemente a f se e solo se*

$$\forall \epsilon > 0 \exists N : n > N \Rightarrow \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Mentre la convergenza puntuale non comunica alla funzione limite le proprietà eventualmente possedute dalle funzioni della successione, la convergenza uniforme ne trasmette alcune; in particolare

TEOREMA 2.2.9. *Il limite uniforme di funzioni continue è continuo.*

2.3. Campi e spazi vettoriali

DEFINIZIONE 2.3.1. Si dice *campo* un insieme E sul quale siano definite due operazioni $+$ e \cdot con le seguenti proprietà: se $x, y, z \in E$

- (1) $x + y \in E$
- (2) $x + y = y + x$
- (3) $(x + y) + z = x + (y + z)$
- (4) $\exists 0 \in E : \forall x \in E x + 0 = x$
- (5) $\forall x \in E \exists -x \in E : x + (-x) = 0$
- (6) $x \cdot y \in E$
- (7) $x \cdot y = y \cdot x$
- (8) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- (9) $\exists 1 \in E : \forall x \in E 1 \cdot x = x$
- (10) $\forall x \in E \exists 1/x \in E : x \cdot (1/x) = 1$
- (11) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Gli insiemi dei numeri reali e dei numeri complessi, \mathbb{R} e \mathbb{C} sono due esempi molto importanti di campi.

DEFINIZIONE 2.3.2. Si dice *spazio vettoriale* rispetto ad un campo C un insieme V sul quale siano definite le operazioni di somma e di moltiplicazione per uno scalare, che godono delle seguenti proprietà: siano $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ e $\alpha, \beta \in C$

- (1) $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$
- (2) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
- (3) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
- (4) $\exists \mathbf{0} \in V : \forall \mathbf{x} \in V \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$
- (5) $\forall \mathbf{x} \exists -\mathbf{x} : \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
- (6) $\alpha \mathbf{x} \in V$
- (7) $\alpha(\beta \mathbf{x}) = (\alpha \cdot \beta) \mathbf{x}$
- (8) $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \mathbf{x} + \alpha \mathbf{y}$
- (9) $(\alpha + \beta) \mathbf{x} = \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{x}$

Gli elementi di uno spazio vettoriale si dicono *vettori*, ed il vettore $\mathbf{v} = \sum_i c_i \mathbf{x}_i$ si dice *combinazione lineare* dei vettori $\{\mathbf{x}_i \in V\}$ con coefficienti $\{c_i \in C\}$; se $S \subseteq V$, l'insieme $[S]$ di tutte le combinazioni lineari finite dei vettori contenuti in S si dice *inviluppo lineare (span)* di S , oppure si dice che S genera (spans) $[S]$.

I vettori $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ si dicono *linearmente indipendenti* se $\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \Rightarrow c_i = 0$, e si dicono *dependenti* in caso contrario. Se uno spazio vettoriale V contiene r vettori linearmente indipendenti ma non ne contiene $r + 1$ si dice che ha *dimensione* r , e si scrive $\dim V = r$. Un insieme S di vettori si dice *indipendente* se tutti i sottoinsiemi finiti di vettori di S sono linearmente indipendenti.

Un sottoinsieme $B \subseteq V$ che generi V e sia composto da vettori linearmente indipendenti si dice *base* di V . È opportuno sottolineare che una base vettoriale è tale se genera tutti i vettori di V come combinazioni lineari di un numero *finito* di vettori della base stessa.

TEOREMA 2.3.3. *Se uno spazio vettoriale è generato da un insieme di r vettori, allora $\dim V \leq r$. Se $\dim V = r$ allora:*

- (1) *Un insieme di r vettori genera V se e solo se gli r vettori sono linearmente indipendenti*
- (2) *V ha almeno una base, ed ogni base consiste di r vettori*
- (3) *Se $\{\mathbf{y}_i\}_{i=1}^s$ con $1 \leq s \leq r$, ed i vettori \mathbf{y}_i sono linearmente indipendenti, esiste una base di V che contiene i vettori \mathbf{y}_i .*

DEFINIZIONE 2.3.4. Un sottoinsieme $M \subset V$ è un *sottospazio* dello spazio vettoriale V se è a sua volta uno spazio vettoriale, rispetto alla somma ed alla moltiplicazione per scalare definite in V . In altri termini, è un sottospazio se $\forall \mathbf{z}, \mathbf{w} \in M, \alpha \in C \mathbf{z} + \mathbf{w} \in M$ e $\alpha \mathbf{z} \in M$.

Un sottoinsieme $E \in V$ si dice *convesso* se per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E, 0 < t < 1$ $\mathbf{z} = t\mathbf{y} + (1 - t)\mathbf{x} \in E$; chiaramente, ogni sottospazio è convesso, e se un insieme E è convesso, lo è anche il suo *traslato* $E + \mathbf{w} = \{\mathbf{x} + \mathbf{w} : \mathbf{x} \in E\}$.

2.3.1. Applicazioni lineari.

DEFINIZIONE 2.3.5. Un'applicazione A da uno spazio vettoriale X ad uno spazio vettoriale Y si dice *lineare* se $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{C} A(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha A(\mathbf{x}) + \beta A(\mathbf{y})$. Le applicazioni lineari da X in X si dicono *operatori lineari* su X .

Un'applicazione lineare $L : X \rightarrow \mathbb{C}$ si dice *funzionale lineare*. L'insieme dei vettori in X tali che $Lx = 0$ si dice *kernel* (*nocciolo*) del funzionale L .

2.4. Norma e spazi di Banach

DEFINIZIONE 2.4.1. Una norma è un'applicazione $\|\cdot\|$ sullo spazio vettoriale V (rispetto al campo \mathbb{C} reale o complesso) che ha le seguenti proprietà: sia $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ e $\lambda \in \mathbb{C}$

- (1) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$
- (2) $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$
- (3) $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$
- (4) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

TEOREMA 2.4.2. Una norma permette di definire una funzione $d_{\|\cdot\|} : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $d_{\|\cdot\|}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ che ha le proprietà di una distanza; V è quindi uno spazio metrico rispetto alla distanza indotta dalla norma.

DEFINIZIONE 2.4.3. Uno spazio vettoriale su \mathbb{C} dotato di norma e completo rispetto alla metrica indotta dalla norma si dice *spazio di Banach*.

2.5. Prodotto scalare e spazi di Hilbert

DEFINIZIONE 2.5.1. Sia H uno spazio vettoriale sul campo complesso, definiamo *prodotto interno* (o *prodotto scalare*) un'applicazione $(\cdot, \cdot) : H^2 \rightarrow \mathbb{C}$ con le seguenti proprietà: siano $x, y, z \in H$ e $\alpha \in \mathbb{C}$

- (1) $(y, x) = \overline{(x, y)}$
- (2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
- (3) $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$
- (4) $(x, x) \geq 0$, e $(x, x) = 0 \iff x = 0$

TEOREMA 2.5.2. Dalle proprietà sopra elencate per il prodotto scalare, ne derivano altre:

- (1) $(0, y) = 0 \forall y \in H$
- (2) $(x, \alpha y) = \overline{\alpha} (x, y)$

Si dimostrano anche altre proprietà, che mostrano come l'applicazione $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ sia una norma, come definita nella sez. 2.4:

- (1) (DISUGUAGLIANZA DI SCHWARZ) $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$
- (2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- (3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

DEFINIZIONE 2.5.3. Dato che il fatto che $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ sia una norma (norma *indotta dal prodotto interno*) permette di introdurre anche una distanza indotta dalla norma (vedi sez. 2.4), H è anche uno spazio metrico. Si definisce *spazio di Hilbert* uno spazio con prodotto interno completo rispetto alla distanza indotta dal prodotto interno.

TEOREMA 2.5.4. (IDENTITÀ DEL PARALLELOGRAMMA) *sia H uno spazio di Hilbert, e $\|\cdot\|$ la norma indotta dal prodotto interno; per ogni $x, y \in H$ vale allora la relazione $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$. Inoltre questa proprietà contraddistingue le norme indotte da un prodotto interno: si può mostrare che se e solo se $\|\cdot\|$ soddisfa l'identità del parallelogramma, allora*

$$(x, y) = \frac{1}{4} \left[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i \left(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2 \right) \right]$$

ha le proprietà di un prodotto scalare.

Consideriamo ora la funzione lineare che associa (per un $y \in H$ fissato) ad ogni $x \in H$ il numero complesso (x, y) .

TEOREMA 2.5.5. *Per ogni $y \in H$ l'applicazione $x \rightarrow (x, y)$ è lineare e continua. Inoltre anche $x \rightarrow \|x\|$ è continua.*

DEFINIZIONE 2.5.6. Se $(x, y) = 0$ diciamo che x ed y sono *ortogonali*, e scriviamo $x \perp y$. La relazione di ortogonalità è simmetrica.

Definiamo x^\perp l'insieme di tutti gli $y \in H : y \perp x$; se $M \subset H$ è un sottospazio di H definiamo M^\perp l'insieme di tutti i vettori $y \in H$ che sono perpendicolari a tutti i vettori $x \in M$. Un sottospazio di uno spazio di Hilbert si dice *chiuso* se le successioni convergenti di elementi del sottospazio convergono ad elementi del sottospazio (se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ e $x_n \in M$ implica $\bar{x} \in M$, M si dice chiuso).

TEOREMA 2.5.7. *Se M è un sottospazio dello spazio di Hilbert H , M^\perp è un sottospazio chiuso di H .*

Si dimostrano una serie di importanti teoremi che riguardano i sottospazi di uno spazio di Hilbert:

TEOREMA 2.5.8. *Ogni sottoinsieme non vuoto, chiuso e convesso E di uno spazio di Hilbert H contiene un solo elemento di norma minima, $\bar{y} \in E : \|\bar{y}\| = \inf_{x \in E} \|x\|$.*

TEOREMA 2.5.9. *Sia M un sottospazio chiuso di H . Esiste una ed una sola coppia di applicazioni lineari $P : H \rightarrow M$, $Q : H \rightarrow M^\perp$ con le seguenti proprietà:*

- (1) $\forall x \in H \ x = Px + Qx$
- (2) $\forall x \in M \ x = Px, \ Qx = 0$ e $\forall x \in M^\perp \ x = Qx, \ Px = 0$
- (3) $\forall x \in H \ \|x - Px\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|$
- (4) $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$

Si dice che P e Q *proiettano* x sui sottospazi M e M^\perp .

COROLLARIO 2.5.10. *Se $M \neq H$, M^\perp non è vuoto e contiene almeno un elemento diverso da 0.*

Abbiamo mostrato che $x \rightarrow (x, y)$ è un funzionale lineare continuo; un teorema molto importante mostra come tutti i funzionali lineare su H possano essere espressi in questo modo.

TEOREMA 2.5.11. *Se L è un funzionale lineare su H , e $\ker L \neq H$, allora $\dim(\ker L)^\perp = 1$*

TEOREMA 2.5.12. *Se L è un funzionale lineare continuo su H , allora vi è uno ed un solo $y \in H$ tale che $Lx = (x, y) \forall x \in H$.*

DEFINIZIONE 2.5.13. Un insieme u_α di vettori di uno spazio di Hilbert H , dove $\alpha \in A$ è un indice (discreto o continuo), è detto *ortonormale* se per $\forall \alpha, \beta \in A$ $(u_\alpha, u_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$.

TEOREMA 2.5.14. *Se $U = \{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è un insieme ortonormale, $\{u_i\}_{i=1}^k$ un qualsiasi sottoinsieme finito di vettori di U e $x = \sum_{i=1}^k c_i u_i$ è una combinazione lineare dei vettori di tale sottoinsieme, allora $c_i = (x, u_i)$ e $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^k |c_i|^2$.*

COROLLARIO 2.5.15. *Dato che $x = 0 \iff c_i = 0 \forall i$, e per ogni sottoinsieme finito $\{u_i\}_{i=1}^k$, ogni insieme ortonormale è indipendente (vedi sez. 2.3).*

Sia $V = \{v_i\}_{i=1}^k$ un insieme finito di vettori linearmente indipendenti $\in H$; se x è un generico vettore in H , si cercano i coefficienti che minimizzano $\left\|x - \sum_{i=1}^k c_i v_i\right\|$. Se si considera che

TEOREMA 2.5.16. *Ogni sottospazio finito dimensionale di uno spazio di Hilbert H è chiuso.*

il teorema 2.5.9 ci garantisce l'esistenza di un unico elemento che minimizza tale norma, $x_0 = Px$, e che $x - x_0 \in [V]^\perp$. Da queste considerazioni è possibile ricavare il seguente teorema:

TEOREMA 2.5.17. *Sia $\{u_i\}_{i=1}^k$ un insieme ortonormale in H , e $x \in H$. Allora*

$$\left\|x - \sum_{i=1}^k (x, u_i) u_i\right\| \leq \left\|x - \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i\right\|,$$

e l'uguaglianza vale solo se $\lambda_i = (x, u_i)$; $\sum_{i=1}^k (x, u_i) u_i$ è la proiezione ortogonale di x sul sottospazio generato dagli u_i , δ la distanza tra x ed il sottospazio, e

$$\sum_{i=1}^k |(x, u_i)|^2 = \|x\|^2 - \delta^2$$

DEFINIZIONE 2.5.18. Sia $U = \{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un insieme ortonormale di vettori di H , ed $x \in H$. Definiamo $\hat{x}(\alpha) = (x, u_\alpha)$ il *coefficiente di Fourier* del vettore x , rispetto all'insieme U .

Inoltre, se $0 \leq \phi(\alpha) \leq \infty$ è una funzione da un insieme di indici A , definiamo

$$\sum_{\alpha \in A} \phi(\alpha) = \sup_{\{\alpha_j\}_{j=1}^k \subseteq A} \sum_{i=1}^k \phi(\alpha_i),$$

cioè il sup delle somme su tutti i sottoinsiemi finiti di A .

TEOREMA 2.5.19. *Se $\sum_{\alpha \in A} |\phi(\alpha)| = K < \infty$, l'insieme degli elementi $\beta \in A$ per i quali $|\phi(\beta)| > 0$ è al più numerabile.*

TEOREMA 2.5.20. (DISUGUAGLIANZA DI BESSEL) *Riferendosi alla definizione data sopra, se $U = \{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è un insieme ortonormale,*

$$\sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$$

DEFINIZIONE 2.5.21. Definiamo l'insieme

$$\ell^2(A) = \left\{ f : A \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{\alpha \in A} |f(\alpha)|^2 < \infty \right\};$$

si può mostrare che definendo somma, prodotto per uno scalare e prodotto interno come

$$\begin{aligned} (f + g)(\alpha) &= f(\alpha) + g(\alpha) \\ (\lambda f)(\alpha) &= \lambda f(\alpha) \\ (f, g) &= \sum_{\alpha \in A} f(\alpha) \overline{g(\alpha)} \end{aligned}$$

questo insieme è uno spazio di Hilbert.

Abbiamo notato sopra che ad ogni vettore x di uno spazio di Hilbert H , considerando un insieme ortonormale $U = \{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$, corrisponde un elemento $\hat{x}(\alpha) \in \ell^2(A)$ (grazie alla disuguaglianza di Bessel, siamo sicuri che la somma $\sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 < \infty$). Ci si può chiedere se questa corrispondenza sia suriettiva, cioè se ogni elemento di $\ell^2(A)$ corrisponda ad un elemento di H ; la risposta è affermativa:

TEOREMA 2.5.22. (DI RIESZ-FISCHER) *Sia $U = \{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un insieme ortonormale in H . Se $\phi(\alpha) \in \ell^2(A)$, allora $\exists x \in H : \phi(\alpha) = (x, u_\alpha)$.*

DEFINIZIONE 2.5.23. Un insieme ortonormale $U = \{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ si dice *massimale*, o *base Hilbertiana* o *base ortonormale completa* se $\nexists x \in H : x \neq 0$ e $(x, u_\alpha) = 0 \forall \alpha \in A$.

TEOREMA 2.5.24. *Sia $U = \{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un insieme ortonormale in H . Allora ognuna delle seguenti affermazioni implica le altre tre.*

- (1) $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è un insieme ortonormale massimale in H
- (2) L'insieme S di tutte le combinazioni lineari finite dei membri di U è denso in H .
- (3) Per ogni $x \in H$ vale che $\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2$
- (4) (UGUAGLIANZA DI PARSEVAL) Se $x, y \in H$, allora

$$(x, y) = \sum_{\alpha \in A} \hat{x}(\alpha) \overline{\hat{y}(\alpha)}$$

TEOREMA 2.5.25. *Ogni spazio di Hilbert che non sia composto solo dall'elemento 0 ammette una base Hilbertiana.*

DEFINIZIONE 2.5.26. Diciamo che due spazi di Hilbert H_1 e H_2 sono *isomorfi* se esiste una applicazione lineare iniettiva e suriettiva $\Phi : H_1 \rightarrow H_2$ che conservi i prodotti scalari: se $x, y \in H_1$ $(x, y)_{H_1} = (\Phi x, \Phi y)_{H_2}$.

TEOREMA 2.5.27. *Due spazi di Hilbert sono isomorfi se e solo se hanno basi Hilbertiane della stessa cardinalità.*

DEFINIZIONE 2.5.28. Uno spazio di Hilbert H si dice *separabile* se contiene un sottoinsieme numerabile denso, cioè se esiste una successione di elementi di H , $\{x_n \in H\}_{n=1}^{\infty}$, tale che per ogni $x \in H$ esista una sottosuccessione x_{n_k} che tende a x .

TEOREMA 2.5.29. *Uno spazio di Hilbert H ha una base Hilbertiana al più numerabile se e solo se è separabile.*

TEOREMA 2.5.30. *In ogni spazio di Hilbert esiste una base di Hamel B , un insieme $\{x_\alpha\}$ indipendente tale che per $\forall x \in H$ $x = \sum_{i=1}^{N_x} c_i x_{\alpha_i}$.*

2.6. Serie trigonometriche

DEFINIZIONE 2.6.1. Sia $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ il cerchio unitario nel piano complesso; se $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ è una qualsiasi funzione definita su \mathbb{T} , la funzione definita su \mathbb{R} come $f(t) = F(e^{it})$ è una funzione periodica di periodo 2π . Viceversa, ad ogni funzione periodica su \mathbb{R} di periodo 2π corrisponde una funzione F definita su \mathbb{T} .

$C(\mathbb{T})$ sia l'insieme di tutte le funzioni continue definite su \mathbb{T} (o equivalentemente delle funzioni su \mathbb{R} continue e 2π -periodiche). Definendo il prodotto interno $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$, $C(\mathbb{T})$ è uno spazio pre-Hilbertiano, ma non è completo. In effetti, $C(\mathbb{T})$ è completo rispetto alla norma dell'estremo superiore, $\|f\| = \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(t)|$, che però non deriva da un prodotto scalare e non permette di strutturare $C(\mathbb{T})$ come uno spazio con prodotto interno.

Per ottenere una struttura Hilbertiana su \mathbb{T} è necessario formulare un integrale più generale di quello di Riemann-Stieltjes, e considerare l'insieme delle funzioni a quadrato integrabile ($L^2(\mathbb{T})$), con prodotto scalare

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt;$$

si può dimostrare che questo spazio è completo.

2.6.1. Polinomi trigonometrici.

DEFINIZIONE 2.6.2. Consideriamo gli insiemi ortonormali in $C(\mathbb{T})$,

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx \right\}_{k=1}^{\infty}, \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\}_{n=-\infty}^{\infty};$$

definiamo quindi i *polinomi trigonometrici* come le combinazioni lineari finite di elementi delle due basi, rispettivamente

$$P_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a_0 + \sum_{k=1}^N \left(a_k \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + b_k \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right), \quad P_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$$

TEOREMA 2.6.3. *I polinomi trigonometrici sono densi in $C(\mathbb{T})$, sia considerando la convergenza uniforme che la convergenza in norma due. Quindi gli insiemi ortonormali sopra definiti sono sistemi ortonormali massimali; anche i polinomi trigonometrici a coefficienti razionali (che sono numerabili) sono densi in $L^2(\mathbb{T})$, ne segue che $L^2(\mathbb{T})$ è separabile.*

COROLLARIO 2.6.4. *Valgono risultati analoghi a quelli dimostrati nel caso generale di uno spazio di Hilbert qualsiasi: se per una funzione $f \in L^2(\mathbb{T})$ definiamo i suoi coefficienti di Fourier*

$$\hat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{e^{-int}}{\sqrt{2\pi}} dt$$

allora vale l'uguaglianza di Parseval

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}$$

e il teorema di Riesz-Fischer: per ogni sequenza di numeri complessi $\{c_n\}$ sommabile in modulo quadro vi è una funzione in $L^2(\mathbb{T})$ per la quale $c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{e^{-int}}{\sqrt{2\pi}} dt$.

2.7. Operatori lineari in H

DEFINIZIONE 2.7.1. Definiamo $\mathcal{L}(H)$ l'insieme degli operatori lineari di uno spazio di Hilbert H in se stesso,

$$\mathcal{L}(H) = \{L : H \rightarrow H; x, y \in H, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \Rightarrow L(\alpha x + \beta y) = \alpha Lx + \beta Ly\}.$$

Un operatore lineare si dice *continuo* se

$$\forall x_0 \in H, \forall \epsilon > 0 \exists \delta < 0 : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Lx - Lx_0\| < \epsilon;$$

si dice *limitato* se $\exists k > 0 : \forall x \in H \quad \|Lx\| < k \|x\|$.

TEOREMA 2.7.2. *Per un operatore $L \in \mathcal{L}(H)$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (1) L è continuo in 0
- (2) L è continuo in tutto H
- (3) L è limitato
- (4) $\forall \{x_n\} : x_n \rightarrow \bar{x} \Rightarrow Lx_n \rightarrow L\bar{x}$

2.7.1. Norme di operatori.

DEFINIZIONE 2.7.3. Definiamo $\mathcal{B}(H)$ l'insieme degli operatori lineari limitati su H ; definiamo

$$\|L\|_{\mathcal{B}(H)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Lx\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \left\| L \frac{x}{\|x\|} \right\| = \sup_{\|x\|=1} \|Lx\|.$$

$\mathcal{B}(H)$ è uno spazio vettoriale su \mathbb{C} , ponendo $(L_1 + L_2)x = L_1x + L_2x$ e $(\lambda L)x = \lambda Lx$.

TEOREMA 2.7.4. $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(H)}$ è una norma, e $\mathcal{B}(H)$ è completo rispetto alla distanza indotta dalla norma.

TEOREMA 2.7.5. *Sia H uno spazio di Hilbert, $\{x_n\}$ una successione in H con $\|x_n\| \leq K < \infty$, $\{y_n\}$ un'altra successione in H con $\|y_n\| \leq K < \infty$ e $\{\alpha_n\}$ una successione in \mathbb{C} con $\sum_n |\alpha_n| \leq K < \infty$. Allora l'applicazione*

$$x \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x, x_n) y_n$$

è lineare e continua.

DEFINIZIONE 2.7.6. Consideriamo una successione di operatori $\{L_n\} \subseteq \mathcal{L}(H)$. Diciamo che $L_n \rightarrow L$

- (1) *In norma:* se $\forall \epsilon > 0 \exists N : n > N \Rightarrow \|L_n - L\|_{\mathcal{B}(H)} < \epsilon$, cioè se $\sup_{\|x\|=1} \|L_n x - Lx\| < \epsilon$.
- (2) *Fortemente:* se $\forall x \in H L_n x \rightarrow Lx$, cioè se $\forall \epsilon > 0, x \in H \exists N_x : n > N_x \Rightarrow \|L_n x - Lx\| < \epsilon$
- (3) *Debolmente:* se $\forall x, y \in H (L_n x, y) \rightarrow (Lx, y)$

TEOREMA 2.7.7. *La convergenza in norma implica la convergenza forte, che implica la convergenza debole, ma non viceversa.*

DEFINIZIONE 2.7.8. Definiamo *kernel (nocciolo)* di un operatore $L \in \mathcal{L}(H)$ l'insieme degli $x \in H$ tali che $Lx = 0$. Questa definizione corrisponde a quella data per i funzionali lineari. Definiamo *rango* di un operatore l'insieme degli $y \in H$ tali che $Lx = y$ per qualche $x \in H$:

$$\begin{aligned} \ker L &= \{x \in H : Lx = 0\} \\ \text{ran } L &= \{y \in H : \exists x \in H : Lx = y\} \end{aligned}$$

2.7.2. Operatori aggiunti.

DEFINIZIONE 2.7.9. Sia $L \in \mathcal{L}(H)$; definiamo l'*operatore aggiunto* L^* come l'operatore che $\forall x, y \in H$ soddisfa $(Lx, y) = (x, L^*y)$.

TEOREMA 2.7.10. *Se $L \in \mathcal{B}(H)$ anche $L^* \in \mathcal{B}(H)$; inoltre $\|L^*\|_{\mathcal{B}} = \|L\|_{\mathcal{B}}$ e $(L^*)^* = L$.*

Nel caso finito-dimensionale, per \mathbb{C}^N , si può mostrare che tutti gli operatori lineari si possono rappresentare con matrici, $A = (a_{ij})$, con $a_{ij} \in \mathbb{C}$, in modo tale che $Lx = Ax = \sum_{ij} a_{ij} x_j \hat{e}_i$, dove \hat{e}_i sono i vettori della base rispetto alla quale sono date le componenti x_i dei vettori dello spazio. Inoltre, con il prodotto scalare definito come $(x, y) = \sum_i x_i \bar{y}_i$, è facile mostrare che L^* è rappresentato dalla *matrice aggiunta* $A^* = (\bar{a}_{ji})$.

2.7.3. Operatori compatti. Introduciamo per prima cosa alcune nozioni topologiche su spazi metrici (valide quindi in particolare su spazi di Hilbert).

DEFINIZIONE 2.7.11. Sia $A \subseteq X$, dove X è uno spazio metrico. A si dice *compatto* se per ogni successione $\{x_n\} \subseteq A$ esiste una sottosuccessione che converge ad un punto $x \in A$. Un insieme si dice *chiuso* se contiene tutti i suoi punti di accumulazione; la *chiusura* \bar{A} di un insieme A è l'unione dell'insieme e dell'insieme dei suoi punti di accumulazione; chiaramente $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ se A è chiuso.

Un insieme si dice *precompatto* se la sua chiusura è compatta.

TEOREMA 2.7.12. *Sia $A \subseteq J$ dove J è uno spazio normato; allora se A è compatto, è anche chiuso e limitato ($\exists K > 0 : \|x\|_J < K \forall x \in A$).*

TEOREMA 2.7.13. *Se $J = \mathbb{R}^N, \mathbb{C}^N$ (finito-dimensionale) $A \subseteq J$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

TEOREMA 2.7.14. (DI BOLZANO-WEIERSTRASS) *In \mathbb{C}^N ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente, e ogni insieme limitato ed infinito ha almeno un punto di accumulazione.*

Questi teoremi non si possono però estendere al caso infinito-dimensionale:

TEOREMA 2.7.15. *Sia H spazio di Hilbert, con $\dim H = \infty$, allora l'insieme $S = \{x : \|x\| = 1\}$ è chiuso e limitato ma non compatto.*

Siamo ora pronti a definire la nozione di operatori compatti.

DEFINIZIONE 2.7.16. Un operatore $L \in \mathcal{L}(H)$ si dice *compatto* se per $\forall C \subseteq H$ limitato $L(C)$ è precompatto; in altre parole, se $\forall \{x_n \in H\}, \|x_n\| < K \exists \{x_{n_k}\} : \{Lx_{n_k}\}$ converge.

TEOREMA 2.7.17. *Se $\dim \text{ran } L < \infty$, L è compatto.*

Se H è separabile, ogni operatore compatto è limite in norma di una successione di operatori A_n con $\dim \text{ran } A_n < \infty$.

2.7.4. Spettro di operatori.

DEFINIZIONE 2.7.18. Definiamo il prodotto di due operatori $L_1, L_2 \in \mathcal{B}(H)$ come $(L_1L_2)x = L_1(L_2x) \forall x \in H$. È facile notare che $\|L_1L_2\| \leq \|L_1\| \|L_2\|$. Questo fatto, unito alla completezza di $\mathcal{B}(H)$ ed alla presenza di un funzionale lineare continuo $E : x \rightarrow x$ tale che $LE = EL = L \forall L \in \mathcal{B}(H)$ e $\|E\| = 1$ fa di $\mathcal{B}(H)$ un'algebra di Banach.

Definiamo l'operatore *inverso* di un operatore $L : H \rightarrow H$ l'operatore L^{-1} tale che $\forall y \in H L^{-1}y = x \iff Lx = y$; l'operatore inverso esiste se e solo se L è biunivoco: se L non fosse suriettivo, L^{-1} non sarebbe definito per qualche $y \in H$, e se non fosse iniettivo, $Lx_1 = Lx_2 = y$ e quindi $L^{-1}y$ non sarebbe univocamente definito; $L^{-1}L = LL^{-1} = E$.

TEOREMA 2.7.19. *L'inversa di un'applicazione lineare è lineare.*

TEOREMA 2.7.20. (DELLA MAPPA APERTA) *Siano G e W due spazi di Banach su \mathbb{C} , e $L : G \rightarrow W$ lineare. Se $L(G) = W$ (se L è suriettivo) allora sia $S_G \subseteq G = \{x \in G : \|x\| \leq 1\}$ la sfera unitaria in G , allora $\delta S_W \subseteq L(S_G)$, dove δS_W è la sfera di raggio $\delta > 0$ in W .*

COROLLARIO 2.7.21. *Se $L \in \mathcal{B}(H)$ ed è biunivoca, allora $\|Lx\| \geq \delta \|x\|$; allora $\|x\| = \|LL^{-1}x\| \geq \delta \|L^{-1}x\|$. Quindi $\|L^{-1}x\| \leq 1/\delta \|x\|$, quindi $L^{-1} \in \mathcal{B}(H)$.*

DEFINIZIONE 2.7.22. Definiamo lo *spettro* $\sigma(L)$ di un operatore $L \in \mathcal{B}(H)$ come l'insieme dei $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che $L - \lambda E$ non ammette inverso continuo. Se esiste un vettore $v \neq 0$ tale che per un $\bar{\lambda} \in \sigma(L)$ vale che $Lv - \bar{\lambda}v = 0$ (in altri termini se $\ker(L - \bar{\lambda}E) \neq \{0\}$) si dice che $\bar{\lambda}$ è un *autovalore* di L . L'insieme degli autovalori si dice *spettro discreto* $\sigma_D(L)$; chiaramente $\sigma_D \subseteq \sigma$.

TEOREMA 2.7.23. *Per ogni operatore $L \in \mathcal{B}(H)$, $\sigma(L)$ è chiuso e limitato.*

TEOREMA 2.7.24. *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ operatore compatto. Allora è vero che:*

- (1) $\forall \lambda \neq 0 \dim \ker(T - \lambda I) < \infty$

- (2) Se $\dim H = \infty$ allora $0 \in \sigma(T)$
 (3) $\forall S \in \mathcal{B}(H)$ sia ST che TS sono compatti

TEOREMA 2.7.25. *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ operatore compatto. Per ogni $n > 0$ esiste solo un numero finito di elementi di $\sigma(T)$ che siano maggiori di 0; in altri termini gli elementi dello spettro sono al più numerabili, e se sono infiniti, l'unico punto di accumulazione è lo 0. Inoltre $\sigma(T) = \sigma_D(T)$.*

2.7.5. Operatori autoaggiunti. Un operatore si dice *autoaggiunto* se $L^* = L$.

TEOREMA 2.7.26. *Se $L \in \mathcal{B}(H)$ è autoaggiunto, allora i suoi autovalori sono reali, e gli autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono ortogonali.*

TEOREMA 2.7.27. *Se $T \in \mathcal{B}(H)$ è compatto ed autoaggiunto, e H è separabile, allora gli autovettori di T costituiscono una base Hilbertiana per H .*

Trasformata di Fourier

3.1. Definizione e proprietà

DEFINIZIONE 3.1.1. Sia $L^1(\mathbb{R})$ l'insieme di tutte le funzioni a modulo integrabile su \mathbb{R} , $L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \right\}$. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, definiamo la *trasformata di Fourier* di f come la funzione

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx,$$

definiamo poi l'*antitrasformata* di Fourier la funzione

$$\check{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Sotto opportune ipotesi, $(\hat{f})^\check{=} = f$

TEOREMA 3.1.2. *Sotto opportune ipotesi di regolarità, per le funzioni $f, f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$ e le loro trasformate $\hat{f}, \hat{f}_1, \hat{f}_2$ valgono le seguenti proprietà algebriche ($a, b \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{R}$):*

- (1) $(af_1 + bf_2)^\wedge = a\hat{f}_1 + b\hat{f}_2$
- (2) $(\hat{f})^\wedge(x) = f(-x)$
- (3) $(\overline{f})^\wedge(\lambda) = \overline{\hat{f}(-\lambda)}$
- (4) $(f(x-u))^\wedge(\lambda) = e^{-i\lambda u} \hat{f}(\lambda)$
- (5) $(e^{i\mu x} f(x))^\wedge(\lambda) = \hat{f}(\lambda - \mu)$
- (6) $(f(kx))^\wedge(\lambda) = \frac{1}{|k|} \hat{f}(\lambda/k)$

e le proprietà analitiche

- (1) \hat{f} è limitata, $|\hat{f}(\lambda)| \leq \|f\|_{L^1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$
- (2) \hat{f} è uniformemente continua
- (3) $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \hat{f}(\lambda) = 0$
- (4) Se $f^{(m)} \in L^1(\mathbb{R})$ e $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) = 0$ per $n \leq m$, allora

$$(f^{(m)}(x))^\wedge(\lambda) = (i\lambda)^m \hat{f}(\lambda)$$

- (5) Se $x^m f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\forall j \leq m$ $x^j f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, e

$$((ix)^j f(x))^\wedge(\lambda) = \hat{f}^{(j)}(\lambda)$$

3.1.1. Trasformata di Fourier in L^2 . L^2 non è un sottoinsieme di L^1 , e quindi esistono funzioni in L^2 per le quali

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

non è ben definita. Si può però definirla senza problemi in $L^2 \cap L^1$; considerato che $L^2 \cap L^1$ è un sottoinsieme denso di L^2 , e che $\forall f \in L^2$ esiste $\{f_n\} \subseteq L^2 \cap L^1$ tale che $f_n \rightarrow f$ in norma 2, possiamo definire

$$\hat{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n.$$

Dato che la norma di L^2 non distingue tra funzioni che differiscono su un insieme di misura 0 (in effetti gli elementi di L^2 sono *classi di equivalenza* di funzioni che sono uguali quasi ovunque), il problema di questa definizione è che la trasformata è ben definita come elemento dello spazio di Hilbert L^2 , ma non puntualmente.

Si può dimostrare che vale anche l'uguaglianza di Parseval

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2.$$

3.2. Convoluzione

DEFINIZIONE 3.2.1. Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. La *convoluzione* di f e di g si scrive $f \star g$ ed è definita da

$$(f \star g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy$$

TEOREMA 3.2.2. Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.

- (1) $f \star g \in L^1(\mathbb{R})$
- (2) $f \star g = g \star f$
- (3) $(f \star g)^\wedge(\lambda) = \hat{f}(\lambda) \hat{g}(\lambda)$
- (4) $\|f \star g\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |(f \star g)(x)| dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1 \|g\|_1$

Integrale di Lebesgue

4.1. Integrale di Riemann

Ricordiamo per cominciare la definizione dell'integrale di Riemann, oltre a qualche teorema. Ci limiteremo ad integrali su intervalli di \mathbb{R}^1 .

DEFINIZIONE 4.1.1. Sia dato un intervallo $[a, b]$, con $a \leq b \in \mathbb{R}$. Si definisce *partizione* di $[a, b]$ un insieme P finito di punti tali che

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b.$$

Scriveremo inoltre $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Se ora f è una funzione reale limitata definita su $[a, b]$, e P una partizione di $[a, b]$ poniamo

$$\begin{aligned} M_i &= \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) & m_i &= \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x), \\ U(P, f) &= \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i & L(P, f) &= \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \\ \overline{\int_a^b} f dx &= \inf U(P, f) & \underline{\int_a^b} f dx &= \sup L(P, f) \end{aligned}$$

dove inf e sup sono calcolati al variare di tutte le partizioni di $[a, b]$, e i due integrali si dicono rispettivamente *integrale di Riemann superiore* e *inferiore*.

Se i due integrali sono uguali, f si dice *Riemann-integrabile* ($f \in \mathcal{R}([a, b])$), e definiamo l'integrale di Riemann di f su $[a, b]$ il valore comune dei due integrali,

$$\int_a^b f dx = \overline{\int_a^b} f dx = \underline{\int_a^b} f dx.$$

Osserviamo che, dato che ogni funzione limitata esistono $m, M \in \mathbb{R}$ tali che $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$,

$$m(b-a) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M(b-a),$$

gli integrali di Riemann superiori ed inferiore sono definiti, anche se non è detto che abbiano lo stesso valore.

TEOREMA 4.1.2. $f \in \mathcal{R}([a, b])$ se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste una partizione P tale che

$$U(P, f) - L(P, f) < \epsilon.$$

Se tale condizione è verificata per la partizione $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ e $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ allora

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i - \int_a^b f dx \right| < \epsilon.$$

4.2. Misura di Lebesgue

Il primo passo per la costruzione di una versione di integrale più sofisticata, ed in grado di integrare una classe più ampia di funzioni, è la definizione di funzioni che permettano di assegnare un misura agli insiemi.

DEFINIZIONE 4.2.1. Indichiamo con il simbolo \emptyset l'insieme vuoto. Se A e B sono due insiemi, definiamo:

- ▷ l'unione dei due insiemi, $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- ▷ l'intersezione, $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
- ▷ la differenza, $A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

Due insiemi si dicono *disgiunti* se $A \cap B = \emptyset$.

Una famiglia di insiemi R si dice *anello* se $A, B \in R$ implica che $A \cup B \in R$ e $A - B \in R$. Poichè $A \cap B = A - (A - B)$, se R è un anello anche $A \cap B \in R$. R si chiama σ -anello se l'unione di un insieme numerabile di elementi di R è ancora un elemento di R , cioè se $A_n \in R$ implica

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in R;$$

se R è un σ -anello, anche l'intersezione di una collezione numerabile di elementi di R è ancora un elemento dell'anello,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 - \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 - A_n) \in R$$

Una funzione $\phi : R \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ si dice funzione di insiemi *additiva* se

$$A, B \in R; A \cap B = \emptyset \Rightarrow \phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B),$$

e *numerabilmente additiva* se

$$(4.2.1) \quad A_i \in R; i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n).$$

Inoltre per evitare ambiguità escluderemo le funzioni la cui immagine contiene sia $+\infty$ che $-\infty$, e quelle per cui $\forall A \in R : \phi(A) = \pm\infty$.

TEOREMA 4.2.2. Se una funzione di insiemi ϕ soddisfa le condizioni enunciate qui sopra, allora valgono le seguenti proprietà:

- (1) La serie nella equazione (4.2.1) converge assolutamente
- (2) $\phi(\emptyset) = 0$
- (3) $\phi\left(\bigcup_{n=1}^N A_i\right) = \sum_{n=1}^N \phi(A_n)$ se $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$
- (4) Se $\forall A \in R : \phi(A) \geq 0$, e $A \subseteq B$, allora $\phi(A) \leq \phi(B)$
- (5) Se $A \subseteq B$ e $|\phi(A)| < \infty$, $\phi(B - A) = \phi(B) - \phi(A)$

(6) Se $A_n \in \mathcal{R}$ e $A_n \subseteq A_{n+1}$ e $A_n \subseteq A$ con $A \in \mathcal{R}$,

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(A_n) = \phi(A)$$

4.2.1. Costruzione della misura di Lebesgue.

DEFINIZIONE 4.2.3. Definiamo un *intervallo in \mathbb{R}^p* l'insieme dei punti $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ tali che

$$a_i < x_i < b_i \quad i = 1, \dots, p$$

sia che le disuguaglianze siano prese in senso stretto o con alcuni $<$ segni sostituiti da \leq ; non si esclude il caso in cui per qualche i si abbia $a_i = b_i$, e l'insieme vuoto è un intervallo.

Un insieme costituito da un numero finito di intervalli si dice *insieme elementare*. Definiamo la funzione di insiemi

$$m(I) = \prod_{i=1}^p (b_i - a_i),$$

e se $A = \bigcup_{n=1}^N I_n$ è l'unione di un numero finito di intervalli disgiunti, poniamo

$$(4.2.2) \quad m(A) = \sum_{n=1}^N m(I_n)$$

TEOREMA 4.2.4. Indichiamo con \mathcal{E} la famiglia dei sottoinsiemi elementari di \mathbb{R} .

- (1) \mathcal{E} è un anello, ma non un σ -anello
- (2) $\forall A \in \mathcal{E}$, è possibile scrivere A come l'unione di un numero finito di intervalli disgiunti
- (3) $m(A)$ definita dalla (4.2.2) non dipende dalla scelta di intervalli disgiunti che compongono A
- (4) m è additiva su \mathcal{E} .

DEFINIZIONE 4.2.5. Una funzione di insiemi additiva e non negativa ψ definita su \mathcal{E} si dice *regolare* se per ogni $A \in \mathcal{E}$ e $\epsilon > 0$ esistono $F, G \in \mathcal{E}$, con F chiuso e G aperto, tali che $F \subseteq A \subseteq G$ e

$$\psi(G) - \epsilon \leq \psi(A) \leq \psi(F) + \epsilon.$$

Ad esempio, m è regolare.

Sia ora μ additiva, non negativa, regolare e finita su \mathcal{E} . Ricopriamo un insieme $B \subseteq \mathbb{R}^p$ con un infinità numerabile di insiemi aperti elementari A_n , $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Definiamo la *misura esterna* di B corrispondente a μ

$$\mu^*(B) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

dove l'inf è calcolato al variare di tutti i ricoprimenti di B . Evidentemente $\mu^*(B) \geq 0$, e se $B_1 \subseteq B_2$, $\mu^*(B_1) \leq \mu^*(B_2)$.

TEOREMA 4.2.6. Per ogni $A \in \mathcal{E}$, $\mu^*(A) = \mu(A)$, e se $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$

$$\mu^*(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n)$$

DEFINIZIONE 4.2.7. Definiamo la *differenza simmetrica* tra due insiemi A e B come

$$S(A, B) = (A - B) \cup (B - A),$$

e, se $A, B \subseteq \mathbb{R}^p$,

$$d(A, B) = \mu^*(S(A, B)).$$

La funzione $d(A, B)$ è “quasi” una distanza: si può mostrare che soddisfa le proprietà

$$d(A, B) = d(B, A) \quad d(A, A) = 0 \quad d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$$

ma non è vero che $d(A, B) = 0 \Rightarrow A = B$; a questa difficoltà si può ovviare lavorando nell'insieme delle classi di equivalenza dei sottoinsiemi di \mathbb{R}^p rispetto alla relazione di equivalenza $d(A, B) = 0$. A meno di riformulazioni ovvie delle definizioni, si ottiene così una distanza a tutti gli effetti, e quindi si può definire uno spazio metrico.

Diremo che $A_n \rightarrow A$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(A, A_n) = 0;$$

se esiste una successione $\{A_n\} \subseteq \mathcal{E}$ di insiemi elementari tale che $A_n \rightarrow A$ diremo che A è *finitamente μ -misurabile*, e scriveremo $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Se A è l'unione di una collezione numerabile di insiemi finitamente μ -misurabili, diremo che è *μ -misurabile*, e scriveremo $A \in \mathcal{M}(\mu)$.

TEOREMA 4.2.8. $\mathcal{M}(\mu)$ è un σ -anello, e μ^* è numerabilmente additiva su $\mathcal{M}(\mu)$.

In altri termini, $\mathcal{M}_F(\mu)$ è il completamento di \mathcal{E} , e $\mathcal{M}(\mu)$ “estende” $\mathcal{M}_F(\mu)$ rendendolo un σ -anello. In maniera analoga μ^* “estende” la funzione μ (definita solo su \mathcal{E}) dandole un senso anche in $\mathcal{M}(\mu)$, nel quale è numerabilmente additiva. Una funzione di questo tipo si dice *misura*, e se $\mu = m$ si dice *misura di Lebesgue*.

4.3. Integrale di Lebesgue

DEFINIZIONE 4.3.1. Le nozioni fin qui introdotte sono state trattate in \mathbb{R}^p , ma in realtà le questioni fondamentali riguardano la struttura di un σ -anello e la presenza di una funzione numerabilmente additiva definita su tale insieme.

Un insieme X si dice *spazio di misura* se esiste un σ -anello \mathcal{M} di sottoinsiemi di X (che si dicono *misurabili*), ed una funzione di insiemi μ non negativa e numerabilmente additiva, detta *misura*, definita su \mathcal{M} . Se $X \in \mathcal{M}$, X si dice *spazio misurabile*.

Sia f una funzione definita su uno spazio misurabile X , a valori in $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. La funzione f si dice *misurabile* se l'insieme

$$\{x : f(x) > a\}$$

è misurabile per ogni $a \in \mathbb{R}$.

TEOREMA 4.3.2. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (1) $\{x : f(x) > a\}$ è misurabile per ogni $a \in \mathbb{R}$
- (2) $\{x : f(x) \geq a\}$ è misurabile per ogni $a \in \mathbb{R}$
- (3) $\{x : f(x) < a\}$ è misurabile per ogni $a \in \mathbb{R}$
- (4) $\{x : f(x) \leq a\}$ è misurabile per ogni $a \in \mathbb{R}$

TEOREMA 4.3.3. *Se f è misurabile, anche $|f|$ è misurabile; se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni misurabili e*

$$g(x) = \sup f_n(x) \quad h(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

anche g e h sono misurabili; se f e g sono misurabili, anche $g+f$, gf , $\max(f, g)$ e $\min(f, g)$ sono misurabili, in particolare sono misurabili

$$f^+ = \max(f, 0) \quad f^- = -\min(f, 0).$$

DEFINIZIONE 4.3.4. Sia s una funzione definita su X a valori reali. Se l'immagine di s è finita, diremo che f è una *funzione semplice*. In particolare è semplice la *funzione caratteristica* di un sottoinsieme $E \subseteq X$,

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

e se l'immagine di s è costituita dai valori distinti $\{c_i\}_{i=1}^N$, e $E_i = \{x : s(x) = c_i\}$, allora

$$s = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i},$$

e s è misurabile se e solo se tutti gli insiemi E_i lo sono.

TEOREMA 4.3.5. *Ogni funzione può essere approssimata con funzioni semplici: sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, allora esiste una successione $\{s_n\}$ di funzioni semplici tali che $s_n(x) \rightarrow f(x)$ puntualmente per $n \rightarrow \infty$. Se f è misurabile, si può scegliere una successione di funzioni semplici misurabili, e se è anche non negativa $\{s_n\}$ si può scegliere monotona crescente. Se f è limitata, la convergenza è uniforme.*

DEFINIZIONE 4.3.6. Sia f una funzione misurabile e non negativa definita sullo spazio misurabile X con misura μ , e S l'insieme di tutte le funzioni semplici misurabili su X , $s = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i}$, tali che $0 \leq s \leq f$. Sia poi $X \supseteq E \in \mathcal{M}$. Definiamo

$$I_E(s) = \sum_{i=1}^N c_i \mu(E \cap E_i);$$

allora

$$\int_E f d\mu = \sup_{s \in S} I_E(s)$$

si dice *integrale di Lebesgue di f , rispetto alla misura μ , sull'insieme E* . L'integrale può valere anche $+\infty$. Chiaramente, per ogni funzione semplice misurabile non negativa

$$\int_E s d\mu = I_E(s).$$

La definizione si estende al caso di funzioni misurabili: diciamo che f misurabile è *integrabile* secondo Lebesgue su E , rispetto alla misura μ , e scriveremo $f \in L(\mu)$ su E , se

$$\int_E f^+ d\mu < \infty \quad \int_E f^- d\mu < \infty,$$

e definiamo

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

TEOREMA 4.3.7. *L'integrale così definito gode delle seguenti proprietà:*

- (1) *Se f è misurabile e limitata su E , e se $\mu(E) < \infty$, allora $f \in L(\mu)$ su E*
- (2) *Se $a \leq f \leq b$ su E , e se $\mu(E) < \infty$, allora*

$$a\mu(E) \leq \int_E f d\mu \leq b\mu(E)$$

- (3) *Se $f, g \in L(\mu)$ su E , e se $f \leq g$ in E , allora*

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$$

- (4) *Se $f \in L(\mu)$ su E , allora $cf \in L(\mu)$ su E per ogni costante finita c , e*

$$\int_E cf d\mu = c \int_E f d\mu$$

- (5) *Se $\mu(E) = 0$ e f è misurabile, allora*

$$\int_E f d\mu = 0$$

- (6) *Se $f \in L(\mu)$ su E , $A \subseteq E$ è misurabile, allora $f \in L(\mu)$ su A .*

TEOREMA 4.3.8. *Se f è misurabile e non negativa su X , oppure se $f \in L(\mu)$ su X , e definiamo per $A \in \mathcal{M}$*

$$\phi(A) = \int_A f d\mu,$$

ϕ è numerabilmente additiva su \mathcal{M} .

COROLLARIO 4.3.9. *Se $A, B \in \mathcal{M}$ e $\mu(A - B) = 0$, e f è misurabile e non negativa, oppure $f \in L(\mu)$ su X , allora*

$$\int_A f d\mu = \int_B f d\mu$$

In altre parole, se due funzioni differiscono solo su un insieme di misura nulla, il loro integrale sarà uguale. Se per una funzione una proprietà vale per tutti i punti in cui è definita, eccetto che per un insieme di punti di misura nulla, diremo che la proprietà è verificata *quasi ovunque*.

TEOREMA 4.3.10. *Se $f \in L(\mu)$ su E , allora anche $|f| \in L(\mu)$ su E ; se f è misurabile su E , e $|f| \leq g$ e $g \in L(\mu)$ su E , allora $f \in L(\mu)$ su E .*

TEOREMA 4.3.11. (DELLA CONVERGENZA MONOTONA DI LEBESGUE) Sia $E \in \mathcal{M}$; sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili tali che

$$0 \leq f_1(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \dots \quad \forall x \in E.$$

Se definiamo f come il limite $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

COROLLARIO 4.3.12. Siano $f_1, f_2 \in L(\mu)$ su E , allora $f = f_1 + f_2$ appartiene a $L(\mu)$ su E , e

$$\int_E f d\mu = \int_E f_1 d\mu + \int_E f_2 d\mu.$$

Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni misurabili non negative, e

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in E$$

allora

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu.$$

TEOREMA 4.3.13. (DI FATOU) Sia $E \in \mathcal{M}$, $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili non negative e

$$f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

allora

$$\int_E f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$$

TEOREMA 4.3.14. (DELLA CONVERGENZA DOMINATA DI LEBESGUE) Sia $E \in \mathcal{M}$, $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili tali che $f_n(x) \rightarrow f(x)$; se esiste una funzione $g \in L(\mu)$ su E tale che $|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n, x \in E$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

4.3.1. Integrale di Riemann ed integrale di Lebesgue. L'integrale di Lebesgue permette di integrare classi più ampie di funzioni, e soprattutto l'integrabilità si conserva in modo naturale per operazioni di passaggio al limite. Dato che \mathbb{R}^1 è uno spazio misurabile con il σ -anello e la misura di Lebesgue definite nella sezione 4.2, diventa naturale chiedersi che relazione esista tra l'integrale di Riemann e quello di Lebesgue nel caso di integrali su intervalli di \mathbb{R}^1 .

TEOREMA 4.3.15. Se $f \in \mathcal{R}([a, b])$, allora $f \in L(m)$ su $[a, b]$, e

$$\int_a^b f dx = \int_{[a, b]} f dm;$$

Se f è limitata su $[a, b]$, è Riemann-integrabile se e solo se è continua quasi ovunque in $[a, b]$.