

CAPITOLO 12

ESTRAZIONE DI UN SEGNALE ANNEGATO NEL RUMORE

12.1 INTRODUZIONE

Si considerano in questo capitolo alcune applicazioni della funzione di correlazione. È ovvio che, per il teorema di Wiener-Kintchine, le considerazioni che seguono possono essere trasferite nel dominio delle frequenze operando sulla densità spettrale.

Nel capitolo precedente si è considerato il caso di un segnale $s(t)$ di forma nota, rumoroso, del quale si vuole misurare un parametro all'istante t_n . Si è visto come costruire un filtro ottimo, o sub-ottimo, per massimizzare il rapporto segnale-rumore.

Tuttavia, ci sono casi in cui la teoria del filtro ottimo finora vista non è applicabile perché non è nota la $s(t)$, ma solo alcune proprietà statistiche del segnale. In questo capitolo considereremo la teoria del filtraggio ottimo per queste situazioni.

Si è anche visto nel capitolo 9 che affinché un parametro del segnale sia misurabile, è necessario che sia $SNR > 1$. Questo limite in realtà vale quando occorre effettuare la misura sul *singolo* segnale, cioè quando il valore del parametro è diverso da segnale a segnale. Ci sono dei casi in cui il segnale all'uscita dell'apparato è sempre eguale a se stesso. Questi casi vengono considerati in questo capitolo, e si fa in particolare vedere che il problema della misura è risolvibile anche quando $SNR < 1$. Per es., la **Fig. 12.1** rappresenta l'output di un apparato sperimentale ed il segnale nascosto dal noise, estratto con i metodi che vengono di seguito illustrati (le due fotografie non sono in scala, ma si riferiscono ad un caso in cui $SNR = 0.1$).

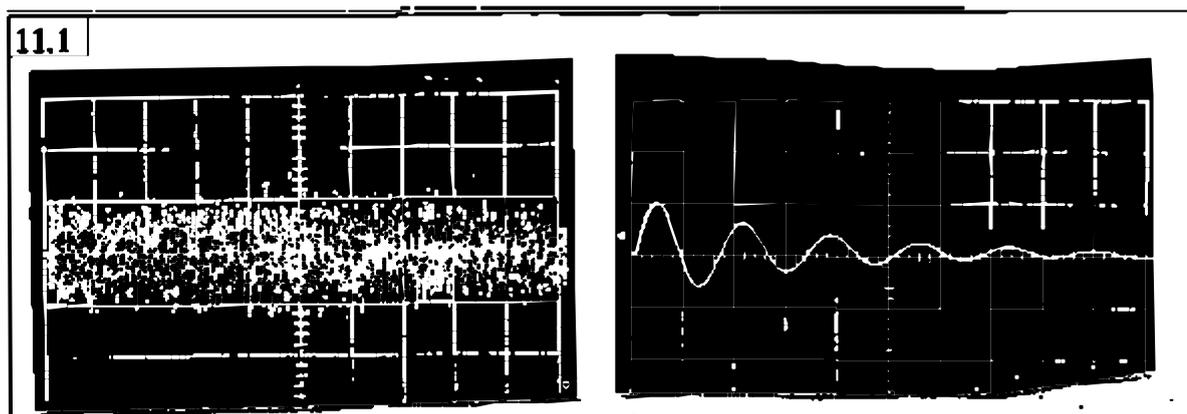
12.2 RIVELAZIONE DELLA PRESENZA DI UN SEGNALE PERIODICO, DI PERIODO IGNOTO, ANNEGATO NEL RUMORE

Sia

$$(12.1) \quad x(t) = s(t) + b(t)$$

l'output di un esperimento, ove $s(t)$ sia un segnale periodico di periodo T_1 ignoto, e $b(t)$ sia un rumore additivo, cioè indipendente da $s(t)$, gaussiano, stazionario al II ordine, ergodico. Si suppone anche, ora e nel seguito, che segnale e rumore siano centrati.

Poiché ciò che osserviamo, $x(t)$, è in genere del tipo di **Fig. 12.1a**, la domanda cui cerchiamo risposta è la seguente: *c'è o non c'è in $x(t)$ un segnale $s(t)$ delle caratteristiche richieste?*



(periodico). Si cerca quindi una risposta sulla presenza o meno di un $s(t)$ periodico, non sulla sua forma.

Si ottiene la risposta misurando la funzione di autocorrelazione di $x(t)$:

$$(12.2) \quad C_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [s(t) + b(t)][s(t + \tau) + b(t + \tau)] dt$$

Per la proprietà distributiva

$$(12.3) \quad = C_{ss}(\tau) + C_{bb}(\tau) + C_{sb}(\tau) + C_{bs}(\tau)$$

Avendo supposto $s(t)$ indipendente da $b(t)$, si ha

$$(12.4) \quad = C_{ss}(t) + C_{bb}(t)$$

Poiché, per segnali aleatori centrati, è

$$(12.5) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} C_{bb}(t) = 0$$

assumendo $C_{bb}(\tau) \sim 0$ per $|\tau| > \tau_1$, si avrà

$$(12.6) \quad C_{xx}(t) \sim C_{ss}(t)$$

Si è detto nel par. 8.4 che $C_{ss}(\tau)$ contiene tutte, e sole, le armoniche di $s(t)$: allora, la presenza di una periodicità in $C_{xx}(\tau)$, per τ sufficientemente grande, rivelerà la presenza di un segnale periodico in $x(t)$.

Osservazioni:

Occorre osservare la funzione di autocorrelazione dopo un τ_1 grande, quando cioè si è sicuri che l'autocorrelazione del noise è decaduta a zero. Il valore di τ_1 dipende dalle caratteristiche spettrali del noise: più esso è bianco, più rapidamente $C_{bb}(\tau)$ va a zero.

Il risultato (12.6) è rigorosamente vero solo per $T \rightarrow \infty$. Poiché operiamo sempre su un T finito, le autocorrelazioni sono solo stimate, per cui la (12.6) è vera a meno degli errori di stima; si noti che ci sono tre termini che concorrono a dare errore: C_{bb} , C_{bs} , C_{sb} .

L'effetto di questi errori appare chiaro se si calcola quale miglioramento nel rapporto segnale rumore viene ottenuto col metodo su esposto, cioè se si calcola la figura di rumore del correlatore.

Per fare il calcolo, supponiamo per semplicità che $s(t)$ sia sinusoidale

$$(12.7) \quad = a \cos w_1 t \quad w_1 = 2\pi/T_1$$

La potenza del segnale all'ingresso del correlatore sarà pertanto (ricordando che $\int \cos^2 x dx = 1/2(\sin x \cdot \cos x + x)$)

$$(12.8) \quad P_s = \frac{1}{T} \int_{\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} a^2 \cos^2 \omega_1 t dt = C_{ss}(0) = \frac{a^2}{2}$$

Allora, essendo σ^2 la potenza del noise per la (8.18), il rapporto segnale rumore prima della correlazione sarà

$$(12.9) \quad SNR_i = r_E = a^2/2\sigma^2$$

All'uscita del correlatore si dispone di

$$(12.10) \quad \hat{C}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T [a \cos \omega_1 t + b(t)][a \cos(\omega_1 t + \tau) + b(t + \tau)] dt$$

cioè una stima della autocorrelazione dell'entrata. La stima è in generale affetta da errore; essa è quindi una variabile aleatoria il cui valor medio

$$(21.11) \quad E\{\hat{C}_{xx}(\mathbf{t})\}$$

(quindi, ciò che ci aspettiamo di misurare all'uscita del correlatore) costituisce il "segnale" all'uscita del correlatore stesso.

Il "rumore" di uscita sarà allora dovuto all'errore di stima, che su una singola misura è

$$(21.12) \quad \hat{C}_{xx}(\mathbf{t}) - E\{\hat{C}_{xx}(\mathbf{t})\}$$

mentre in media quadratica è

$$(12.13) \quad E\{|\hat{C}_{xx}(\mathbf{t}) - E\{\hat{C}_{xx}(\mathbf{t})\}|^2\} = var \hat{C}_{xx}(\mathbf{t})$$

cioè la varianza di $C_{xx}(\tau)$, che costituisce la potenza del "rumore" di uscita.

Calcoliamo il "segnale"

$$(12.14) \quad E\{\hat{C}_{xx}\} = E\{\hat{C}_{ss}\} + E\{\hat{C}_{bb}\} + E\{\hat{C}_{bs}\} + E\{\hat{C}_{sb}\}$$

È facile verificare, col teorema di Fubini, che

$$(12.15) \quad E\{\hat{C}_{bs}\} = E\{\hat{C}_{sb}\} = 0$$

poiché $b(t)$ è centrato. Inoltre

$$(12.16) \quad E\{\hat{C}_{bb}\} = C_{bb}(t)$$

poiché $b(t)$ è supposto stazionario al II ordine. Pertanto

$$(12.17) \quad E\{\hat{C}_{xx}(t)\} = E\{\hat{C}_{ss}(t)\} + C_{bb}(t)$$

Ma

$$(12.18) \quad E\{\hat{C}_{ss}(t)\} = E\left\{\frac{1}{T} \int_0^T a^2 \cos \omega_1 t \cdot \cos \omega_1 (t+t) dt\right\}$$

$$(12.19) \quad = \frac{1}{T} \int_0^T a^2 \cos \omega_1 t \cdot \cos \omega_1 (t+t) dt$$

poiché $\{.\}$ non è una variabile aleatoria. Si ha

$$(12.20) \quad = \frac{a^2}{2} \cos \omega_1 t + \frac{a^2 \sin \omega_1 T}{2 \omega_1 T} \cos \omega_1 (T+t)$$

Se $T \gg T_1$ (quindi, anche $\omega_1 T \gg 1$), il che è ragionevole se si fa una buona stima

$$(12.21) \quad = (a^2/2) \cos \omega_1 t$$

Quindi

$$(12.22) \quad E\{\hat{C}_{xx}\} = \frac{a^2}{2} \cos \omega_1 t + C_{bb}(t)$$

e se osserviamo il risultato per $|\tau| \gg \tau_1$

$$(12.23) \quad = (a^2/2) \cos \omega_1 \tau$$

Questo è il segnale all'uscita del correlatore. La sua potenza è

$$(12.24) \quad \frac{1}{T} \int_{-\frac{T_I}{2}}^{\frac{T_I}{2}} \frac{a^4}{4} \cos^2 \omega_I \tau d\tau = \frac{a^4}{8}$$

Il calcolo della varianza [1] conduce a

$$(12.25) \quad \text{var } \hat{C}_{xx} = \frac{(a^2 + \mathbf{s}^2)\mathbf{s}^2}{2BT}$$

essendo $2B = (-B, B)$ la banda passante dell'apparato di misura prima del correlatore. Questa banda passante è verosimilmente grande, poiché non è nota la frequenza del segnale cercato. Questo significa che il noise σ^2 sarà grande.

Allora, il rapporto segnale rumore all'uscita del correlatore sarà

$$(12.26) \quad \text{SNR}_o = \mathbf{r}_u = \frac{a^4/8}{(a^2 + \mathbf{s}^2)\mathbf{s}^2} = BT \mathbf{r}_E \frac{1}{2 + \frac{1}{\mathbf{r}_E}}$$

Il guadagno in rapporto segnale rumore, che è l'inverso della figura di rumore, è

$$(12.27) \quad G = \frac{\mathbf{r}_u}{\mathbf{r}_E} = \frac{BT}{2 + \frac{1}{\mathbf{r}_E}}$$

Come si vede, esso dipende dal rapporto segnale-rumore di entrata.

Se $\rho_E \gg 1$, si ha $G \sim BT$. In realtà, questo caso non interessa, poiché se $\rho_E \gg 1$ non c'è problema a rivelare il segnale, che risulta di per sé visibile. Se invece $\rho_E \ll 1$

$$(12.28) \quad G \sim BT \mathbf{r}_E$$

e sarà $G > 1$, cioè si avrà miglioramento, se

$$(12.29) \quad BT > 1/\mathbf{r}_E$$

La situazione diventa più favorevole, ma a spese della complessità dell'apparato, se si fraziona la banda passante del segnale di entrata $x(t)$ in n parti, mediante i filtri F_1, F_2, \dots, F_n e si invia l'uscita di

ciascun filtro ad un correlatore, **Fig. 12.2**.

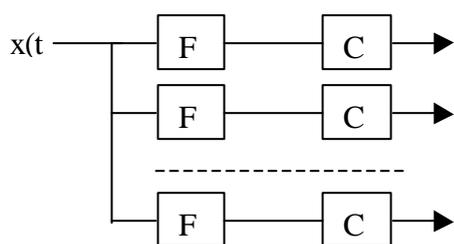


Fig.12.2

Se la potenza del noise di entrata è σ^2 sulla banda passante B, la potenza del rumore all'ingresso di ciascun correlatore sarà σ^2/n , supponendo che i filtri abbiano tutti la stessa larghezza di banda. Poiché la frequenza del segnale cercato (se esiste) cadrà nella banda di un solo filtro, F_k , all'ingresso

del corrispondente correlatore, C_k , il rapporto segnale-rumore sarà

$$(12.30) \quad r'_E = nr_E$$

É chiaro che si osserverà componente periodica solo all'uscita di C_k .

É anche chiaro che la soluzione esposta è fattibile solo per n piccolo.

12.3 RIVELAZIONE DELLA PRESENZA DI UN SEGNALE PERIODICO, DI PERIODO NOTO, ANNEGATO NEL RUMORE.

Il metodo consiste nel correlare $x(t)$ con un segnale ausiliario $S(t)$, di periodo T_1 eguale a quello del segnale cercato:

$$(12.31) \quad C_{xs}(\mathbf{t}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [s(t) + b(t)]S(t + \mathbf{t})dt = C_{ss}(\mathbf{t}) + C_{bs}(\mathbf{t})$$

Poiché $b(t)$ è statisticamente indipendente da $S(t)$ ed ha media nulla:

$$(12.32) \quad = C_{ss}(\tau)$$

che presenterà la stessa periodicità T_1 .

In questo caso, la situazione appare più favorevole rispetto a quella del caso precedente; infatti: a) non compare $C_{bb}(\tau)$, quindi non occorre esaminare $C_{ss}(\tau)$ dopo un τ grande; inoltre, b) all'errore di stima contribuisce un solo termine C_{bs} , anziché tre come nel caso precedente.

Va tuttavia sottolineato che il metodo va bene se il periodo T_1 del segnale cercato è noto con precisione.

Consideriamo ora il miglioramento nel rapporto segnale-rumore nel caso che la funzione di correlazione venga solo stimata su un T finito. Supponiamo, per semplicità, che il segnale cercato sia monocromatico

$$s(t) = a \cos \omega_1 t$$

$$S(t) = A \cos \omega_1 t \quad \omega_1 = 2\pi/T_1$$

Analogamente al caso precedente, all'ingresso del correlatore si avrà

$$(12.33) \quad \rho_E = a^2/2\sigma^2$$

essendo σ^2 la potenza del noise. Se il rumore è bianco di densità S_0 , sarà $\sigma^2 = 2BS_0$, essendo $(-B, B)$ la larghezza di banda dell'apparato sperimentale di misura prima del correlatore. All'uscita del correlatore, il "segnale" è

$$(12.34) \quad E\{\hat{C}_{xS}\} = C_{sS} = Aa \cos \frac{\omega_1 \tau}{2}$$

la cui potenza è

$$(12.35) \quad \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \left(Aa \cos \frac{\omega_1 t}{2} \right)^2 dt = A^2 a^2$$

La potenza del "rumore" di uscita risulta [1]

$$(12.36) \quad \text{var } \hat{C}_{xS} = \frac{A^2 \sigma^2}{2BT}$$

per cui

$$(12.37) \quad \rho_u = \frac{A^2 a^2}{A^2 \sigma^2 / 2BT} = 4BT \rho_E$$

e infine

$$(12.38) \quad G = \rho_u / \rho_E = 4BT$$

Si noti che $2B$ è la larghezza di banda prima del correlatore.

La (12.31) può essere interpretata come la convoluzione tra il segnale $x(t)$ e $S(-t)$, potendosi pensare

quest'ultima come la risposta impulsiva di un filtro. Se si integra per un tempo infinito (nel qual caso la risposta impulsiva $S(-t)$ del filtro è una vera senoide) il filtro risulta monocromatico, vedi par. 4.5. Se si integra su un T finito, il correlatore si comporta come un filtro di larghezza di banda equivalente

$$(12.39) \quad \Delta f \sim 1/T$$

vedi Fig. 4.18. Δf risulta essere quindi la banda del sistema complessivo (apparato sperimentale + filtro a correlazione) e può essere resa $\ll B$.

12.4 ESTRAZIONE DI UN SEGNALE PERIODICO, DI PERIODO NOTO, ANNEGATO NEL RUMORE

Si parla ora di "estrazione", si vuole cioè recuperare anche la forma del segnale $s(t)$.

Il metodo consiste nel correlare il segnale rumoroso $x(t)$ con una sequenza di delta dello stesso periodo T_1 del segnale cercato

$$(12.40) \quad \perp_{T_1} = \sum_k \delta(t - kT_1)$$

Si ha

$$(12.41) \quad C_{x\perp}(\tau) = C_{s\perp}(\tau) + C_{b\perp}(\tau)$$

Calcoliamo separatamente le due correlazioni incrociate

$$(12.42) \quad C_{s\perp}(\mathbf{t}) = \frac{1}{nT_1} \int_0^{nT_1} s(t) \sum_k \delta(t - kT_1 - \mathbf{t}) dt$$

Poiché si considerano n periodi, n numero di delta che "vedono" il segnale (e quindi il numero di prodotti da considerare sotto integrale) è n

$$(12.43) \quad = \sum_k \frac{1}{nT_1} \int_0^{nT_1} s(t) \delta(t - kT_1 - \tau) dt = \sum_k \frac{1}{nT_1} s(kT_1 + \mathbf{t})$$

ed essendo $s(t)$ periodico di periodo T_1

$$(12.44) \quad = \frac{1}{nT_1} \sum_k^n s(\mathbf{t}) = \frac{ns(\mathbf{t})}{nT_1} = \frac{n}{T} s(\mathbf{t})$$

Poi

$$(12.45) \quad C_{b_-}(\mathbf{t}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b(t) \sum_k^\infty \mathbf{d}(t - kT_1 - \mathbf{t}) dt = \sum_k^\infty \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b(t) \delta(t - kT_1 - \tau) dt$$

$$(12.46) \quad = \sum_k^\infty \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_1} b(kT_1 + \mathbf{t}) = 0$$

Quindi

$$(12.47) \quad C_{x_-}(\mathbf{t}) = \frac{n}{T} s(\mathbf{t}) = \frac{s(\mathbf{t})}{T_1}$$

Quindi, il segnale viene effettivamente estratto.

Calcoliamo il guadagno in rapporto segnale-rumore facendo una stima su n periodi. Il rapporto segnale-rumore prima della correlazione è

$$(12.48) \quad \rho_E = |s(t)|^2 / \sigma^2$$

Dopo la correlazione, il "segnale" è

$$(12.49) \quad = ns(\tau)/T$$

Il "rumore" dopo la correlazione incrociata è

$$(12.50) \quad var \hat{C}_{x_-}(\mathbf{t}) = E\{|\hat{C}_{x_-}|^2\} - |E\{\hat{C}_{x_-}\}|^2$$

Usando la linearità dell'operatore E, si trova agevolmente

$$(12.51) \quad E\{|\hat{C}_{x_-}|^2\} = \frac{n^2}{T^2} s^2(\mathbf{t}) + E\{|\hat{C}_{b_-}|^2\}$$

$$(12.52) \quad |E\{\hat{C}_{x_-}\}|^2 = \frac{n^2}{T^2} s^2(\mathbf{t})$$

Sostituendo nella (12.50)

$$(12.53) \quad \text{var } C_{x_u}(\mathbf{t}) = E\{|\hat{C}_{b_u}(\mathbf{t})|^2\} = E\left\{\left|\frac{1}{T} \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} b(t-kT) \mathbf{d}(t-kT) dt\right|^2\right\}$$

$$(12.54) = E\left\{\frac{1}{T^2} \left|\sum_{k=0}^{n-1} b(t-kT)\right|^2\right\} = \frac{1}{T^2} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} E\{b(t-kT)b(t-mT)\} = \frac{1}{T^2} \sum_k \sum_m C_{bb}((k-m)T)$$

Se il rumore e' incorrelato al di là di un periodo (cioè $C_{bb}=0$ per $k \neq m$):

$$(12.55) \quad \text{var } \hat{C}_{x_u}(\mathbf{t}) = \frac{n}{T^2} C_{bb}(0) = \frac{n}{T^2} \mathbf{s}^2$$

Allora il rapporto segnale-rumore dopo la correlazione è

$$(12.56) \quad r_u = \frac{\frac{n^2}{T^2} / s(t)^2}{\frac{n}{T^2} \mathbf{s}^2} = \frac{n/s(t)^2}{\mathbf{s}^2} = n r_E$$

Il guadagno in potenza è pertanto

$$(12.57) \quad G = \rho_u / \rho_E = n$$

mentre il guadagno in ampiezza è

$$(11.58) \quad G' = \sqrt{G} = \sqrt{n}$$

12.5 ESTRAZIONE DAL RUMORE DI UN SEGNALE RIPETITIVO ANCORATO AD UN TRIGGER NOTO

Si parla di segnale ripetitivo, quindi non necessariamente periodico.

La situazione è illustrata in **Fig. 12.3**.

Il metodo di estrazione è noto come "averaging"; la sua validità è affidata alle seguenti ipotesi:

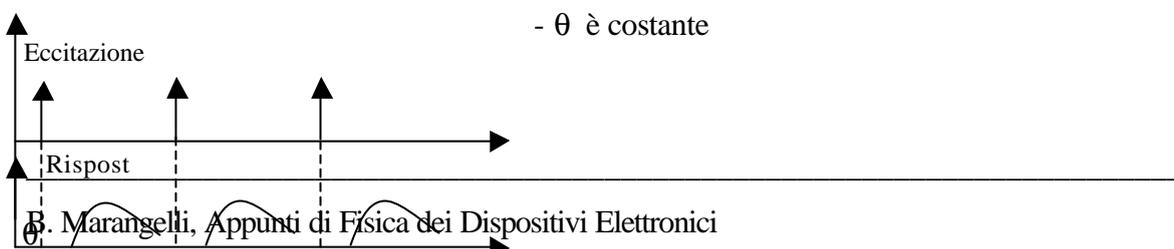


Fig. 12.3

- il segnale ha sempre la stessa forma.

Un averager accumula delle risposte, facendone man mano la media; pertanto, la non periodicità è inessenziale. Per semplicità analitica, poniamoci nell'ipotesi di eccitazione periodica di periodo T_0 :

$$(12.59) \quad s(t-kT_0) = s(t)$$

Sia $x(t) = s(t)+b(t)$ il segnale osservato. La media $z(t)$, stimata su n misure sarà

$$(12.60) \quad \hat{z}(t) = \frac{1}{n} \sum_k^{n!} x(t - kT_0)$$

[In pratica, come si vedrà più avanti, un averager stima le medie di l punti del segnale, $z(t_i)$, ($i=1,2,\dots,l$). Per semplicità qui si omette l'indice.]

$$(12.61) \quad = \frac{1}{n} \sum_k s(t - kT_0) + \frac{1}{n} \sum_k b(t - kT_0) = s(t) + \frac{1}{n} \sum_k b(t - kT_0)$$

Il valore atteso di tale stima è

$$(12.62) \quad E\{\hat{z}\} = s(t) + \frac{1}{n} \sum_k E\{b(t - kT_0)\}$$

ed essendo il rumore centrato

$$(12.63) \quad = s(t)$$

Quindi, una buona stima (n grande) estrae $s(t)$.

La varianza della stima

$$(12.64) \quad var \hat{z} = E\{|\hat{z} - E\{\hat{z}\}|^2\}$$

risulta, usando le (12.60) - (12.63)

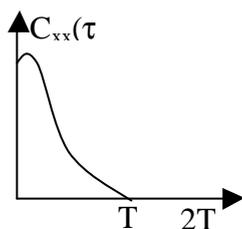


Fig. 12.4

$$(12.65) \quad = E\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_k b(t - kT_0)\right|^2\right\}$$

Sviluppando il quadrato, per la linearità dell'operatore E sui ha

$$(12.66) \quad = \frac{1}{n^2} \sum_k \sum_m C_{bb}[(k-m)T_0]$$

Supponendo il rumore incorrelato al di là di T_0 , **Fig. 12.4** ($C_{bb} = 0$ per $k \neq m$), si ha infine

$$(12.67) \quad var \hat{z} = \frac{s^2}{n}$$

Il rapporto segnale-rumore prima dell'averaging era

$$(12.68) \quad \rho_E = |s(t)|^2 / \sigma^2$$

Dopo l'averaging

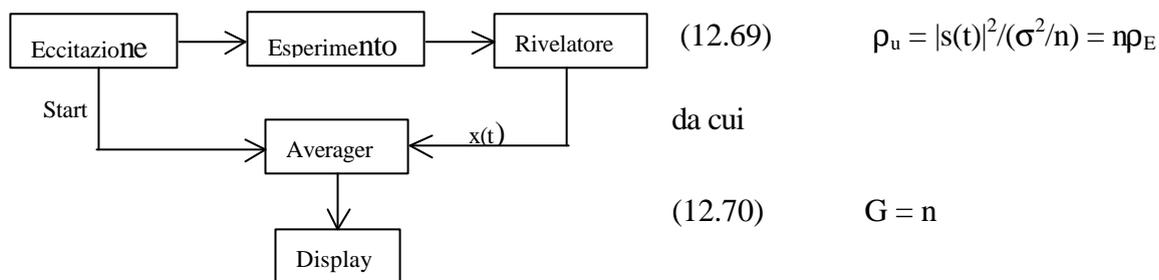


Fig. 12.5

In realtà, n non può sempre essere arbitrariamente grande, o per motivi oggettivi (per es. in medicina, nel caso di EEG, ECG,...) o per la non stabilità a lungo termine dell'apparato sperimentale, che porta ad invalidare le due ipotesi di

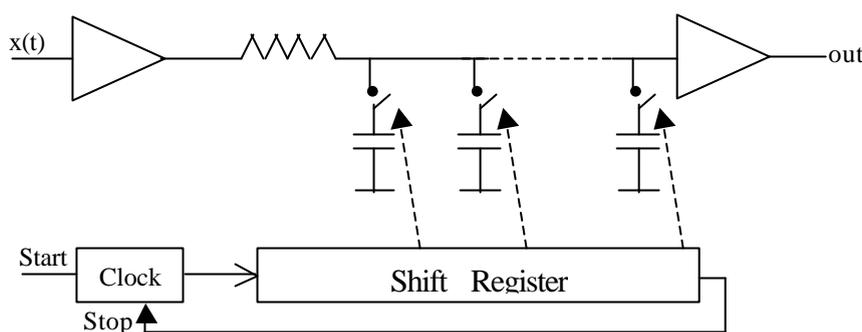
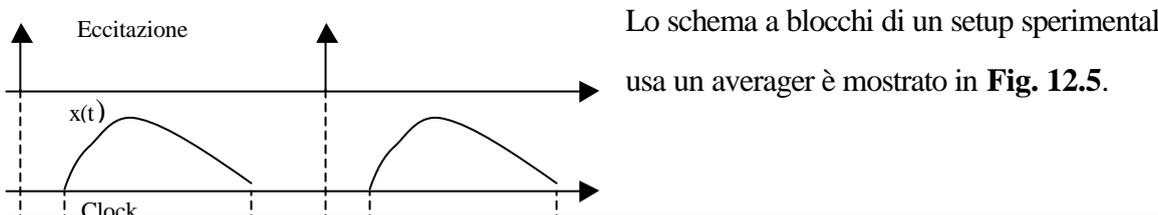


Fig. 12.6

partenza. In questi casi, l'unico modo per migliorare il rapporto segnale rumore è intervenire su ρ_E , cercando di aumentarlo con un filtraggio adattato al segnale.



Lo schema a blocchi di un setup sperimentale che usa un averager è mostrato in **Fig. 12.5**.

Fig. 12.7

Lo schema a blocchi di un averager è in **Fig. 12.6**.

L'eccitazione sgancia un clamped clock che genera un treno di impulsi, ognuno dei quali fa avanzare di una posizione un 1 nello shift register. L'1 che avanza chiude in sequenza uno degli interruttori, per un breve Δt , cosicché ogni condensatore, che agisce come un integratore, acquisisce un Δq proporzionale all'ampiezza del segnale in quell'istante.

Se il processo è ripetuto molte volte, la tensione su ogni C tende a quella del punto campionato.

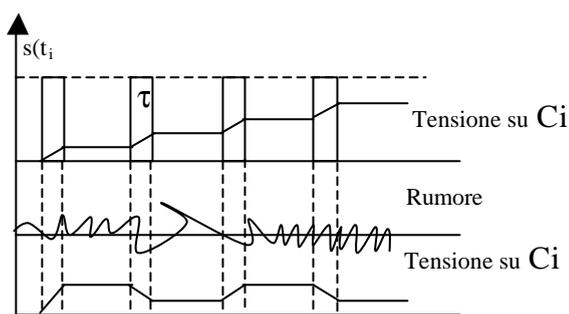


Fig. 12.8

La **fig. 12.7** illustra il diagramma temporale. Il processo di averaging su un generico condensatore C_i della batteria è illustrato in **Fig. 12.8**, ove si è separato l'effetto della carica dovuta al segnale da quello della carica dovuta al noise, entro la finestra di sampling dell'i-mo punto.

É chiaro che per n sufficientemente grande, la tensione del segnale tende a $s_r(t_i)$, valore del campione i -mo, mentre la tensione di rumore sarà zero se il rumore è centrato.

L'averager nella versione illustrata in Fig. 12.6 porta avanti le medie su l punti del segnale, essendo l

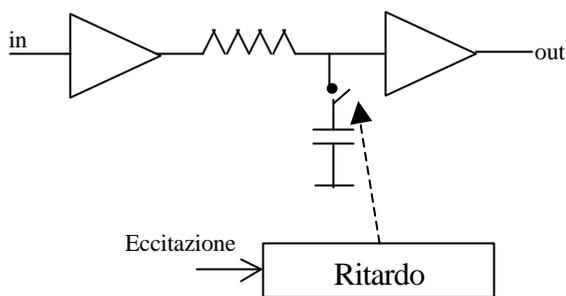


Fig. 12.9

convenientemente grande per disegnare bene la forma del segnale. Se per es., il numero di punti campionati (= al numero dei condensatori) è $l=100$ ed il segnale dura $100 \mu\text{sec.}$, la durata di un campione (= al tempo di chiusura dell'interruttore) è $\tau=.1 \mu\text{sec.}$

Se il segnale è molto breve, per es. di durata $10\text{-}100 \text{ nsec}$, non è possibile mediare contemporaneamente su un numero sufficientemente grande di punti, per limiti tecnologici. In questi casi, si può mediare un punto per volta, facendo una finestra τ dell'ordine del nsec. In questa versione l'averager è noto come "boxcar integrator". Lo schema a blocchi è illustrato in **Fig. 12.9**.

Stabilito un valore t_k del ritardo rispetto al trigger, si fanno n acquisizioni la cui media genera un punto

del segnale (quello distante t_k sec. dal trigger). Quindi si cambia il ritardo e si fanno altre n acquisizioni, ottenendo un secondo punto; e così via fino ad ottenere un numero l sufficiente di punti. Nel boxcar occorrono quindi ln acquisizioni, a fronte delle n sufficienti nell'averager: è chiaro quindi che i problemi di instabilità dell'apparato si aggravano.

12.6 ESTRAZIONE OTTIMA DI UN SEGNALE DI FORMA IGNOTA, NON RIPETITIVO, ANNEGATO NEL RUMORE

Consideriamo il caso che nel segnale rumoroso $x(t)$ si debba cercare un segnale $s(t)$ di forma ignota (per cui non è possibile usare un filtro adattato) e che non sia localizzabile sull'asse dei tempi, cioè il segnale non è ancorato ad un trigger (pertanto, non è possibile usare un averager).

Supponiamo che il segnale $x(t)$ sia disponibile per $-\infty < t < \infty$, e che i due processi $x(t)$ e $s(t)$ siano stazionari e ne siano note le statistiche congiunte fino al II ordine.

Vogliamo cercare il filtro lineare $h_{opt}(t)$ che, in risposta a $x(t)$, restituisca $s(t)$ con la massima verosimiglianza, rispetto ad un assegnato criterio. Più precisamente, detta $\hat{s}(t_m)$ l'uscita del filtro

$$(12.71) \quad \hat{s}(t_m) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_m - \mathbf{a}) h_{opt}(\mathbf{a}) d\mathbf{a}$$

(cioè la stima che il filtro fa del segnale all'istante t_m della misura) si vuole che l'errore q.m. di stima all'istante della misura

$$(12.72) \quad \mathbf{s}^2 = E\{|s(t_m) - \hat{s}(t_m)|^2\}$$

sia minimo. Il filtro cercato sarà quindi *ottimo nel senso dei minimi quadrati*.

Si è già visto nel par. 2.1 che, in generale, vale il principio di ortogonalità: la "pesiera" $h(t)$ che, basandosi sui "dati" $x(t)$, dà la migliore stima $\hat{s}(t)$ nel senso dei minimi quadrati (cioè che minimizza la (12.72)) deve essere tale che gli scarti

$$(12.73) \quad s(t) - \hat{s}(t)$$

siano ortogonali ai dati; cioè

$$(12.74) \quad E\{[s(t_m) - \hat{s}(t_m)]x(\mathbf{x})\} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in (-\infty, \infty)$$

Dalla (12.74), tenendo conto della (12.71), si ha

$$(12.75) \quad E\left\{\left[s(t_m) - \int_{-\infty}^{\infty} x(t_m - \mathbf{a})h_{opt}(\mathbf{a})d\mathbf{a}\right]x(\mathbf{x})\right\} = 0$$

Sviluppando il prodotto

$$(12.76) \quad E\{s(t_m)x(\mathbf{x})\} - \int_{-\infty}^{\infty} E\{x(\mathbf{x})x(t_m - \mathbf{a})\}h_{opt}(\mathbf{a})d\mathbf{a} = 0$$

e quindi

$$(12.77) \quad C_{sx}(t_m - \mathbf{x}) - \int_{-\infty}^{\infty} C_{xx}(t_m - \mathbf{a} - \mathbf{x})h_{opt}(\mathbf{a})d\mathbf{a} = 0$$

o anche, ponendo $t_m - \xi = \tau$

$$(12.78) \quad C_{sx}(\mathbf{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{xx}(\mathbf{t} - \mathbf{a})h_{opt}(\mathbf{a})d\mathbf{a} = C_{xx}(\mathbf{t}) * h_{opt}(\mathbf{t}) \quad \forall \tau$$

Questa è l'equazione integrale di Wiener che deve essere soddisfatta dalla $h(t)$ del filtro ottimo.

La soluzione della (12.78) è semplice, poiché per ipotesi C_{sx} e C_{xx} sono note; infatti, passando nel dominio delle frequenze, poiché i due membri della (12.78) sono eguali per ogni τ , anche le loro trasformate devono esserlo per ogni ω

$$(12.79) \quad S_{sx}(\omega) = S_{xx}(\omega) H_{opt}(\omega)$$

da cui

$$(12.80) \quad H_{opt}(\omega) = \frac{S_{sx}(\omega)}{S_{xx}(\omega)}$$

e quindi infine

$$(12.81) \quad h_{opt}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{sx}(\omega)}{S_{xx}(\omega)} e^{j\omega t} d\omega$$

Se segnale e rumore sono incorrelati sarà, per la (8.36) e seg.

$$(12.82a) \quad S_{sx}(\omega) = S_{ss}(\omega)$$

$$(12.82b) \quad S_{xx}(\omega) = S_{ss}(\omega) + S_{bb}(\omega)$$

e quindi la (12.80) diventa

$$(12.83) \quad H_{opt}(\omega) = \frac{S_{ss}(\omega)}{S_{ss}(\omega) + S_{bb}(\omega)}$$

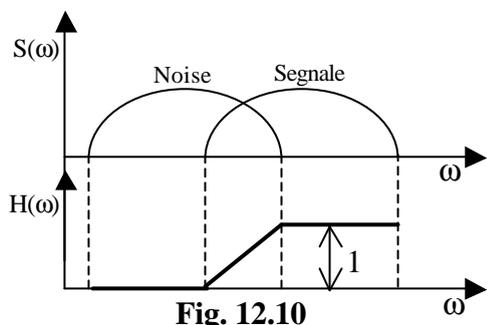


Fig. 12.10

Pertanto, il filtro, **Fig. 12.10**:

- pesa 1 le zone spettrali ove c'è solo segnale ($S_{bb}=0$);
- pesa 0 le zone ove c'è solo rumore ($S_{ss}=0$);
- dà pesi intermedi, proporzionali al segnale, alle zone ove c'è sia segnale che rumore;
- ha andamento arbitrario ove non c'è né segnale né rumore.

Se gli spettri sono nettamente separati, **Fig. 12.11**, il filtraggio è perfetto.

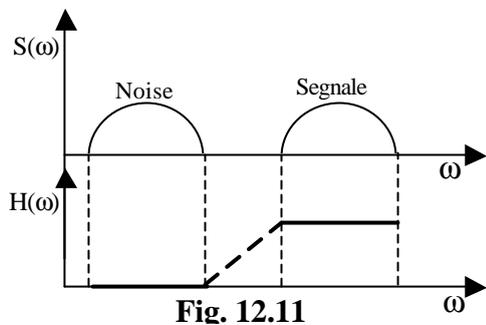


Fig. 12.11

Si osservi, tuttavia, che il filtro ottimo (12.83) *non è causale*: esso, infatti, è ricavato dal principio di ortogonalità (12.74) che, così come espresso, si riferisce ad una situazione non fisica. Infatti, esso impone che lo scarto all'istante t_m sia ortogonale a *tutti* i dati, cioè a quelli passati, presenti e futuri (la (12.74) vale per ogni ξ). La

causalità, invece, implica che l'ortogonalità può essere imposta ai dati *disponibili*, cioè per $\xi \leq t_m$. Di

conseguenza, essendo $\tau = t_m - \xi$, la (12.78) è valida solo per $\tau \geq 0$. Di conseguenza, le trasformate dei due membri non sono più eguali (perché alla potenza in $(\omega_0, \omega_0 + d\omega)$ contribuisce tutta la $C(\tau)$, quindi anche la porzione per $\tau < 0$).

La soluzione della (12.78) con questo limite (equazione di Wiener-Hopf) non è così semplice come nel caso non causale. Per essa, si rimanda alla letteratura [2]. Osserviamo tuttavia che se i dati utilizzati $x(\xi)$ assumono valori significativi in istanti che cadono in un intervallo finito (a,b) (e questo è per es. il caso di un segnale impulsivo), una soluzione numerica della (12.78) è sempre possibile ottenerla [2], approssimando l'integrale nella (12.77) con una somma.

Infatti, dividendo (a,b) in n intervalli (α_i, α_{i+1}) di lunghezza

$$(12.84) \quad \Delta\alpha = (b-a)/n = \alpha_{i+1} - \alpha_i$$

si può riscrivere la (12.77) come segue

$$(12.85) \quad C_{sx}(t_m - \xi) \approx \sum_i^n C_{xx}(t_m - \xi - \alpha_i) h_{opt}(\alpha_i) \Delta\alpha$$

Questa relazione deve essere soddisfatta per ogni ξ in (a,b), quindi in particolare da $\xi = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Sostituendo ciascuno di questi valori nella (12.85), si ottiene un sistema di n equazioni nelle n incognite $h_{opt}(\alpha_i)$, che sono n valori della funzione cercata:

$$C_{sx}(t_m - \alpha_1) = \sum_i^n C_{xx}(t_m - \alpha_1 - \alpha_i) h_{opt}(\alpha_i) \Delta\alpha$$

$$C_{sx}(t_m - \alpha_2) = \sum_i^n C_{xx}(t_m - \alpha_2 - \alpha_i) h_{opt}(\alpha_i) \Delta\alpha$$

$$(12.86) \quad \dots\dots\dots$$

$$C_{sx}(t_m - \alpha_n) = \sum_i^n C_{xx}(t_m - \alpha_n - \alpha_i) h_{opt}(\alpha_i) \Delta\alpha$$

Se approssimiamo la (12.71) con una sommatoria:

$$(12.87) \quad \hat{s}(t_m) = \sum_I^n x(t_m - \mathbf{a}_i) h_{opt}(\mathbf{a}_i) \mathbf{D} \mathbf{a}$$

e sostituiamo in essa i valori ottenuti $h_{opt}(\alpha_i)$, si ottiene il valore della stima cercata all'istante t_m .

Naturalmente, cambiando t_m occorre risolvere di nuovo il sistema approssimante (12.86), per ottenere il nuovo set di valori di $h_{opt}(\alpha_i)$ e ricalcolare con essi un nuovo valore della stima con la (12.87).

12.7 ESTRAZIONE SINCRONA DI UN SEGNALE ANNEGATO NEL RUMORE

In molti esperimenti, **Fig. 12.12**, la risposta $s(t)$ di un campione ad una eccitazione continua è un segnale piccolo e a bassissima frequenza. La sua estrazione dal segnale $x(t)$, osservato con un

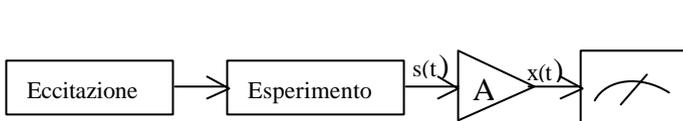


Fig. 12.12

apparato sperimentale A, è problematica con le tecniche esaminate finora; infatti, la banda (bilaterale) del segnale, 2β , cade in una zona molto rumorosa dello spettro,

ove predomina il rumore $1/f$. Poiché la banda del noise copre quella del segnale, nemmeno il filtro

ottimo di Wiener aiuta, vedi Fig. 12.10.

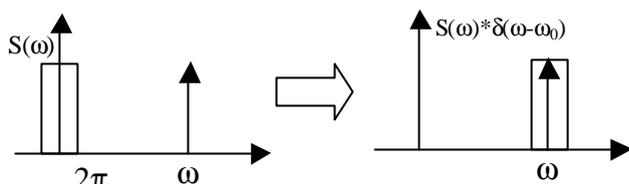


Fig. 12.13

Il problema viene risolto con la tecnica del *lock-in*, che può essere sinteticamente descritta come segue. L'eccitazione viene

modulata con legge nota, $\cos\omega_0 t$, $\omega_0 \gg 2\pi\beta$, cosicché il segnale diventa $s(t)\cos\omega_0 t$: lo spettro del

segnale viene spostato intorno ad

ω_0 , **Fig. 12.13** (in fig. è mostrata solo la parte positiva dello spettro). Il segnale osservato è ora

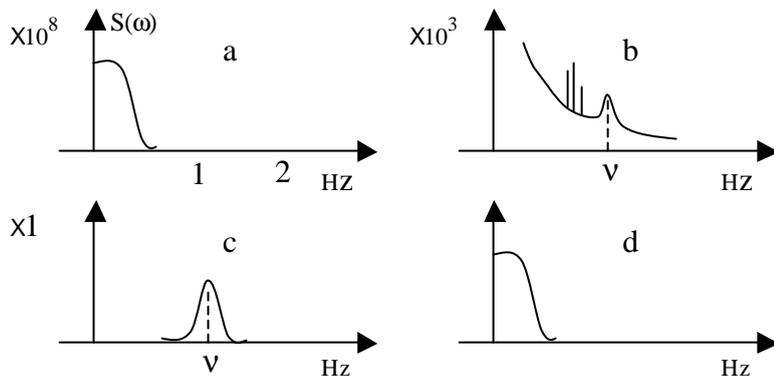


Fig. 12.14

$$(12.88) \quad x(t) = s(t)\cos\omega_0 t + b(t)$$

quindi $s(t)$ costituisce la modulazione di ampiezza della "portante" a ω_0 .

Il segnale $x(t)$ viene quindi "demodulato sincronamente", moltiplicandolo con un segnale sinusoidale della stessa pulsazione ω_0 e con relazione di fase definita; questo, come fra poco si fa vedere, ha l'effetto di filtrare (idealmente) $s(t)$.

Il principio del lock-in è illustrato in **Fig. 12.14 a-d**: in a) è mostrato lo spettro del segnale $s(t)$ (si noti la scala verticale, che va riferita alla fig. c). In b) è mostrato lo spettro di $x(t)$ dopo la modulazione (uscita dal rivelatore): è chiaro dalla fig. che si può scegliere ω_0 in modo che il segnale venga spostato in una regione tranquilla dello spettro del noise. La fig. c) mostra lo spettro dopo opportuno filtraggio (che ha lo scopo di limitare la banda del noise, per non sovraccaricare il demodulatore) e amplificazione di $x(t)$. Questo è ciò che viene inviato nel demodulatore sincrono dalla cui uscita, dopo un ulteriore filtraggio passa-basso, si isola lo spettro del segnale cercato, fig. d).

Lo schema a blocchi dell'apparato di Fig. 12.12 si modifica come in **Fig. 12.15** con l'introduzione della tecnica del lock-in.

Il cuore del lock-in è il demodulatore sincrono, la cui azione viene ora analizzata.

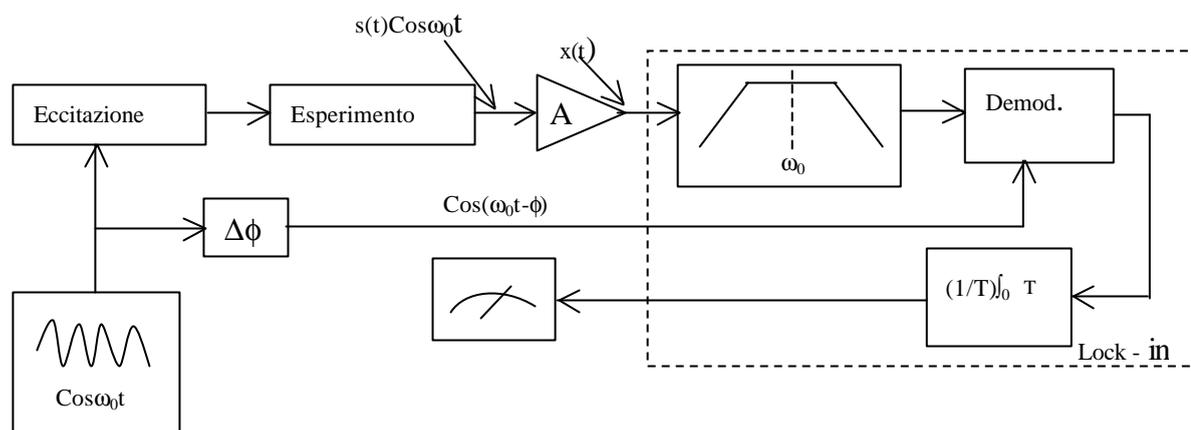


Fig. 12.15

Come detto, il segnale di ingresso al demodulatore sincrono è

$$(12.89) \quad x(t) = s(t)\cos\omega_0 t + b(t)$$

Nel demodulatore questo segnale è moltiplicato per il segnale di riferimento $\cos(\omega_0 t - \varphi)$, essendo φ

la differenza di fase (costante) rispetto al segnale di modulazione (ϕ è dovuta alla differenza di percorso). Il prodotto viene quindi mediato dall'integratore, ottenendo idealmente

$$(12.90) \quad y(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cos(\omega_0 t - f) dt$$

che può essere visto come un integrale di convoluzione: il sistema demodulatore-integratore agisce sul segnale $x(t)$ come un filtro lineare di risposta impulsiva $\cos \omega_0 t$. Come visto nel cap. 4, *questo equivale a un filtro ideale monocromatico*, avente cioè banda $2B^*$ infinitamente stretta. La potenza del rumore di uscita ($\sigma^2 = 2B^* S_0$, vedi par. 8.3) sarà quindi idealmente nulla.

Per la verifica analitica, esplicitiamo $x(t)$ nella (12.90)

$$(12.91) \quad = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_0^T s(t) \cos \omega_0 t \cos(\omega_0 t - f) dt + \frac{1}{T} \int_0^T b(t) \cos(\omega_0 t - f) dt \right]$$

Per la relazione trigonometrica

$$(12.92) \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)$$

si ha anche

$$(12.93) \quad = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2T} \int_0^T s(t) \cos \phi dt + \frac{1}{2T} \int_0^T s(t) \cos(2\omega_0 t - \phi) dt + \frac{1}{T} \int_0^T b(t) \cos(\omega_0 t - f) dt \right]$$

Integrando per parti, si può vedere che il II e III integrale tendono a 0, per cui

$$(12.94) \quad = \frac{1}{2} s(t) \cos f$$

Agendo sul controllo di fase $\Delta \phi$, si può ottenere $\phi=0$ (uscita massima) e quindi

$$(12.95) \quad = \frac{1}{2} s(t)$$

Il lock-in restituisce il valor medio del segnale.

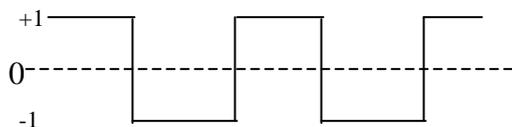


Fig. 12.16

Una semplificazione tecnologica del lock-in la si realizza usando, sia come modulazione che come riferimento, un'onda quadra, **Fig. 12.16**, anziché un segnale sinusoidale. Allora il segnale $x(t)$ deve essere

semplicemente moltiplicato per +1 o -1 alternativamente, per cui il demodulatore è come in **Fig. 12.17**.

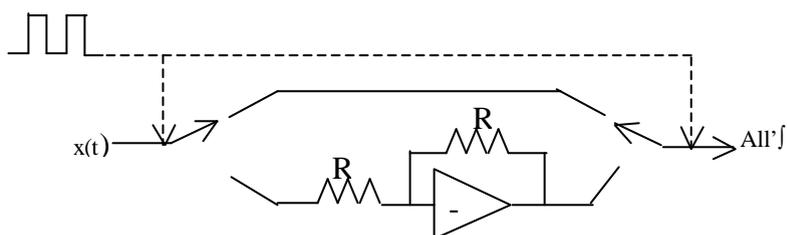


Fig. 12.17

Per comprendere il risultato, si consideri lo sviluppo in serie di F. dell'onda quadra

$$(12.96) \quad \frac{4}{p} \left[\cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos(2n+1)\omega_0 t + \dots \right]$$

Pertanto, la modulazione-demodulazione con un'onda quadra è equivalente ad una somma di modulatori-demodulatori sinusoidali aventi guadagno

$$(12.97) \quad \frac{4 (-1)^n}{p 2n+1} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e pulsazione di aggancio

$$(12.98) \quad (2n+1)\omega_0$$

In altri termini, si modula $s(t)$ a $\omega_0, 3\omega_0, 5\omega_0, \dots$ e si demodula $x(t)$ a $\omega_0, 3\omega_0, 5\omega_0, \dots$

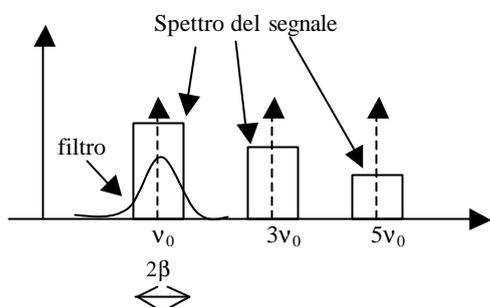


Fig. 12.18

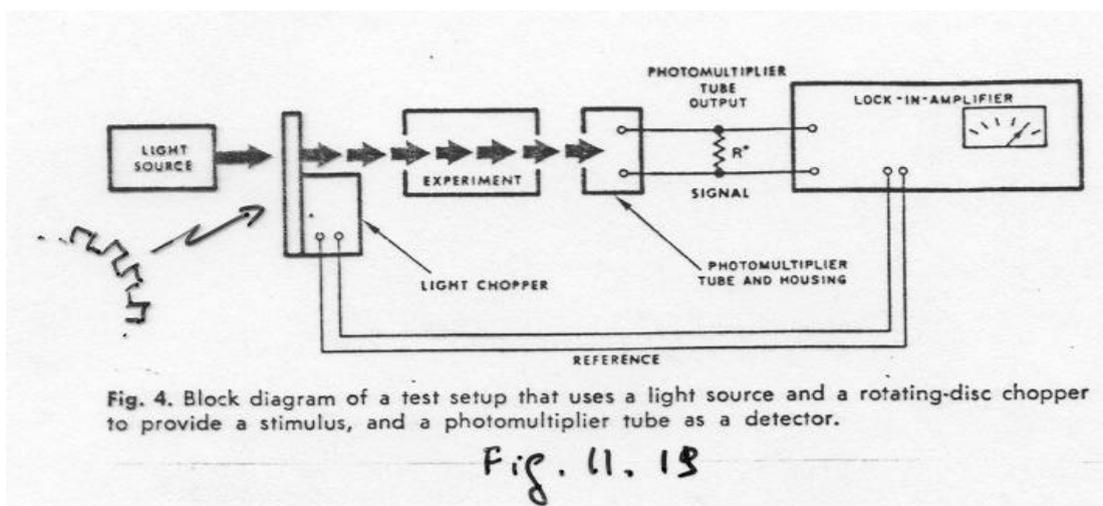
Se il filtro passa-banda che precede il demodulatore è abbastanza ripido da rendere trascurabile ciò che è al di fuori di $(v_0 \pm \beta)$, è come se agisse solo il demodulatore a v_0 , **Fig. 12.18**.

In pratica, questo principio viene realizzato facendo passare l'eccitazione (che spesso è data da una sorgente luminosa) attraverso un chopper, **Fig. 12.19**.

Consideriamo, infine, il guadagno in rapporto segnale-rumore realizzato col lock-in. Diciamo subito che, poiché il tempo di integrazione T nella (12.90) è finito, il lock-in non si comporterà come un filtro ideale monocromatico, ma la sua larghezza di banda equivalente (bilaterale) sarà $2B^* \sim 2/T$, e questa sarà anche la larghezza di banda dell'intero apparato.

Detta a l'ampiezza (\sim costante) di $s(t)$ e $\sigma^2 (=2BS_o)$, siamo nella regione del rumore bianco) la potenza del noise entro la banda $2B$ del filtro, Fig. 12.15, il rapporto segnale-rumore all'entrata del demodulatore risulta

$$(12.99) \quad \rho_E = a^2/\sigma^2$$



All'uscita del demodulatore la cui banda passante equivalente è $2B^* \sim 2/T$, si ha

$$(12.100) \quad \rho_u = \frac{a^2}{\sigma^2 \frac{2B^*}{2B}} = BT\rho_E$$

ed il guadagno risulta

$$(12.101) \quad G = \rho_u/\rho_E = BT$$

Si noti nella (12.101) che G sembra aumentare allargando B , la banda del noise. In realtà, la (12.101) è equivoca, poiché occorre tener presente che all'aumentare di B peggiora ρ_E (aumenta σ^2

=2BS₀). Una espressione operativa di G dovrebbe dire, *partendo da un r_E assegnato*, cosa occorre fare per aumentare ρ_u. Per questo è meglio riferirsi alla densità di potenza del noise, S₀:

$$(12.102) \quad \rho_u = BT \frac{a^2}{\sigma^2} = BT \frac{a^2}{S_0 2B} = \frac{T}{2} \frac{a^2}{S_0}$$

Quindi, poiché a e S₀ sono assegnati, si può agire solo su T.

BIBLIOGRAFIA

[1] J.Max, Methodes et techniques de traitement du signal. Masson 1981.

[2] A. Papoulis, Probabilità, variabili aleatorie, e processi stocastici. Boringhieri 1977