

## CAPITOLO 3

# RAPPRESENTAZIONE DI UN SEGNALE DETERMINISTICO NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE

### 3.1 - INTRODUZIONE. LA TRASFORMATA DI FOURIER

Si è visto come un modello matematico per segnali deterministici è costituito da una espressione analitica esplicita  $x(t)$ , funzione della variabile indipendente tempo.

Questa rappresentazione di un segnale è fisicamente soddisfacente, poiché nell'analisi di un fenomeno fisico noi abbiamo accesso al dominio del tempo. Dal punto di vista matematico, invece, operare nel dominio del tempo può comportare difficoltà legate al fatto che l'espressione esplicita di  $x(t)$  è molto spesso complessa. Si è visto come le difficoltà vengono alleviate sviluppando  $x(t)$  in serie di segnali più semplici. In particolare, la serie di Fourier per segnali periodici o definiti in un intervallo finito di tempo  $(-T/2, T/2)$ , sviluppa il segnale in una serie di sinusoidi complesse, vedi (2.20):

$$(3.1) \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

essendo  $\omega_0 = 2\pi/T$ . Questa rappresentazione è particolarmente felice sia per il significato intuitivo che sappiamo dare a termini come frequenza, componenti armoniche, ecc.; sia per la semplicità con cui i segnali sinusoidali possono essere generati; sia perché i segnali sinusoidali non sono deformati nel passare attraverso sistemi lineari (si dice che essi sono le “funzioni proprie” dei sistemi lineari). Inoltre, la rappresentazione nel dominio delle frequenze dà nuovo significato fisico alle caratteristiche di segnali e sistemi, anche perché alcuni organi sensoriali (vista e udito) si comportano in modo modellabile in termini di frequenza. La rappresentazione nel dominio  $s$  (cui si accenna alla fine del capitolo) o nel dominio  $z$  può servire invece a semplificare i calcoli.

È possibile estendere questo tipo di rappresentazione anche a segnali non periodici, definiti per  $-\infty < t < +\infty$ . Infatti, partendo dalla (2.20), valida per  $x(t)$  definito in  $(-T/2, T/2)$  e ignoto altrove, si può passare al caso di un segnale definito per  $-\infty < t < +\infty$  con un passaggio al limite per  $T \rightarrow \infty$ .

Si ha, infatti, ricordando la (2.18):

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t} = \\
 &= \frac{1}{2p} \sum_{-\infty}^{\infty} \left[ \omega_0 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t}
 \end{aligned}$$

(3.1a)

Se ora si passa al limite per  $T \rightarrow \infty$ , la spaziatura fra le armoniche,  $T_0 = 2\pi/\omega$ , diventa infinitesima e possiamo porre

$$\omega_0 \rightarrow d\omega$$

Anche, la variabile discreta  $n\omega_0$ , diventa una variabile continua  $\omega$ , cioè

$$n\omega_0 \rightarrow \omega$$

La sommatoria, infine, diventa formalmente un integrale

$$\sum \rightarrow \int$$

Pertanto, la (3.1) diventa

$$x(t) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega$$

(3.2)

L'integrale in [ ] è funzione della sola  $\omega$ ; indicandolo con  $X(\omega)$ , (si noti che alcuni autori usano la notazione  $X(j\omega)$ ), cioè ponendo:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

(3.3)

la (3.2) diventa:

$$x(t) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

(3.4)

Questa espressione (da confrontare con la (3.1)) è nota come integrale di Fourier ed esprime il segnale  $x(t)$  come un continuo di sinusoidi complesse la cui ampiezza e fase è data da

$$\frac{1}{2p} X(\omega) d\omega$$

Pertanto, come nel caso della serie di Fourier, il segnale  $x(t)$  è completamente determinato dalla conoscenza della espressione  $X(\omega)$ , che determina ampiezza e fase di tutte le armoniche che

concorrono a costruire il segnale stesso: si può pertanto chiamare  $X(\omega)$  lo “spettro di frequenza” del segnale  $x(t)$ . Essa è in generale una quantità complessa, si può cioè porre

$$(3.5) \quad X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\phi(\omega)} = \text{Re}[X(\omega)] + j\text{Im}[X(\omega)]$$

Il termine

$$(3.6) \quad |X(\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2[\bullet] + \text{Im}^2[\bullet]}$$

è chiamato lo spettro di ampiezza di  $x(t)$ . Il termine

$$(3.7) \quad \phi(\omega) = \arctan \frac{\text{Im}[\bullet]}{\text{Re}[\bullet]}$$

è lo spettro di fase di  $x(t)$ .

Lo spettro di frequenza  $X(\omega)$  definito dalla (3.3) è quindi un nuovo modello matematico del segnale, definito nel dominio delle frequenze, ove la variabile indipendente è  $\omega$ .

Il passaggio dal modello nel dominio del tempo a quello nel dominio delle frequenze e viceversa si ottiene con le due relazioni (3.3) e (3.4) rispettivamente, che sono conosciute come trasformate di Fourier.

Si dice che le funzioni  $x(t)$  e  $X(\omega)$  sono una la trasformata di Fourier (T.F.) dell'altra e si scrive:

$$x(t) = \text{T.F.}\{X(\omega)\}$$

$$X(\omega) = \text{T.F.}\{x(t)\}$$

$$x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$$

per indicare le relazioni di trasformazione.

Condizioni sufficienti per l'esistenza della TF (3.3) e per la sua invertibilità (3.4) sono che la  $x(t)$  sia limitata e assolutamente sommabile:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Queste condizioni non sono però necessarie: ci sono cioè funzioni che non le soddisfano, pur ammettendo trasformata di F. Questo significa che se una funzione non soddisfa le condizioni sufficienti, occorre provare a calcolare direttamente le (3.3) e (3.4) per vedere se esistono.

### 3.2 - ALCUNE PROPRIETA' DELLA T.F.

Elenchiamo, senza dimostrazione, alcune proprietà notevoli della T.F. che ci saranno utili nel seguito.

*Simmetria:*

Considerando i due integrali (3.3) e (3.4), è chiaro che essi sono identici a parte il fattore  $2\pi$  ed il segno degli esponenti. Allora, se

$$\text{T.F.}\{x(t)\} = X(\omega)$$

è anche

$$\text{T.F.}\{X(t)\} = 2\pi x(-\omega)$$

come si ottiene immediatamente dalla (3.4) prima scambiando  $t$  con  $\omega$  e successivamente ponendo  $\omega \rightarrow -\omega$ .

*Linearità:*

Sia

$$x(t) \Leftrightarrow X(\omega) \quad y(t) \Leftrightarrow Y(\omega)$$

è anche

$$(3.8) \quad ax(t) + by(t) \Leftrightarrow AX(\omega) + BY(\omega)$$

essendo  $a, b$  delle costanti arbitrarie.

*Cambiamento di scala:*

$$(3.9) \quad x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

*Traslazione:*

$$(3.10) \quad x(t - a) \Leftrightarrow X(\omega) e^{-j\omega a}$$

*Derivazione:*

$$(3.11) \quad \frac{d^n x(t)}{dt^n} \Leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega)$$

*Modulazione:*

$$(3.12) \quad x(t)e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

*Convoluzione:*

$$(3.13) \quad x(t)*y(t) \Leftrightarrow X(\omega)Y(\omega)$$

$$(3.14) \quad x(t)y(t) \Leftrightarrow X(\omega)*Y(\omega)$$

Parità:

	X(T)	X(ω)
(3.15)	reale pari	Reale pari
(3.16)	Reale dispari	Immaginaria dispari
(3.17)	Immaginaria pari	Immaginaria pari
(3.18)	Immaginaria dispari	Reale dispari
(3.19)	Reale qualunque	Re(ω) pari, Im(ω) disp.
(3.20)	Immaginaria qualunque	Re(ω) disp.,Im(ω) pari

$x(t)$  reale e causale:

Si può scrivere, in generale:

$$(3.21) \quad x(t) = x_p(t) + x_d(t)$$

essendo  $x_p(t)$  la parte pari di  $x(t)$  e  $x_d(t)$  quella dispari. È anche

$$(3.22a) \quad x_p(t) = [x(t)+x(-t)]/2$$

$$(3.22b) \quad x_d(t) = [x(t)-x(-t)]/2$$

Se il segnale è causale, cioè  $x(t)=0$  per  $t<0$ , è anche  $x(-t)=0$  per  $t>0$ , per cui:

$$x(t) = 0 \quad t < 0$$

$$x(t) = 2x_p(t) = 2x_d(t) \quad t \geq 0$$

Per trasformata di Fourier:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = 2 \int_0^{\infty} x_p(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_p(t)e^{-j\omega t} dt = X_p(\omega)$$

da cui

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_p(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

e per la (3.15):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}[X(\omega)] e^{j\omega t} d\omega$$

e per la parità di  $\text{Re}(\cdot)$

$$(3.23) \quad x(t) = \frac{1}{\mathbf{p}_0} \int_0^{\infty} \text{Re}[\bullet] \cos \omega t d\omega$$

Analogamente si trova

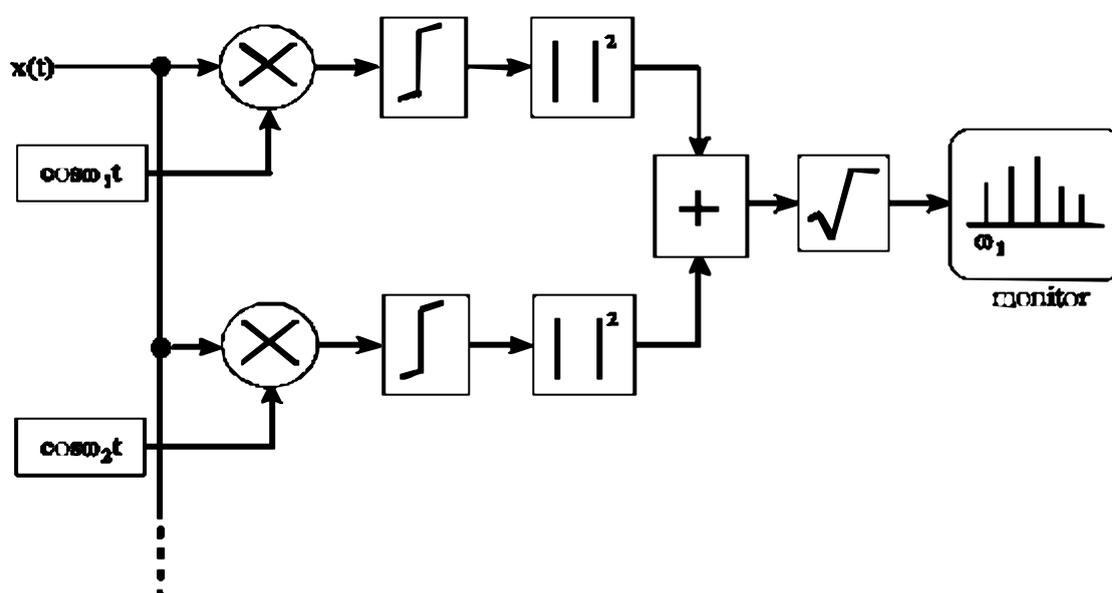
$$(3.24) \quad x(t) = \frac{1}{\mathbf{p}_0} \int_0^{\infty} \text{Im}[\bullet] \text{sen } \omega t d\omega$$

Pertanto, il segnale causale può essere dedotto dalla conoscenza della sola parte reale o di quella immaginaria dello spettro.

### 3.3 - IMPLEMENTAZIONE HARDWARE DELLA T. F.

Un *analizzatore di spettro* è uno strumento che meccanizza l'equazione (3.3). In realtà, poiché questa equazione definisce una quantità in generale complessa, non rappresentabile fisicamente, un analizzatore di spettro calcola separatamente  $\text{Re}[X(\omega)]$  e  $\text{Im}[X(\omega)]$ , dalle quali con le (3.6) e (3.7) calcola lo spettro di ampiezza e di fase.

Se consideriamo segnali causali e riscriviamo la (3.3) come segue



**Figura 3.1**

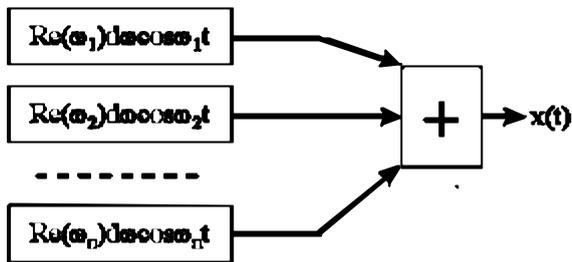
$$(3.25) \quad X(\omega) = \int_0^{\infty} x(t) \cos \omega t dt - j \int_0^{\infty} x(t) \sin \omega t dt$$

ne deriva lo schema a blocchi dell'analizzatore disegnato in **Fig. 3.1**, ove è evidenziato in particolare come viene calcolato un punto dello spettro di ampiezza. In modo analogo può essere calcolato lo spettro di fase.

È intuitivo che i punti dello spettro non possono essere infinitamente vicini; d'altro canto, verrà mostrato nel capitolo 5 che la conoscenza di campioni discreti dello spettro è, a certe condizioni, sufficiente a descrivere completamente lo spettro stesso.

Va infine aggiunto che i sistemi fisici che realizzano le operazioni di moltiplicazione, integrazione, ecc. si implementano oggi con tecnologie digitali, il che implica necessariamente una discretizzazione delle grandezze di ingresso e di uscita del sistema stesso.

Un sintetizzatore di funzioni è un sistema che meccanizza l'equazione (3.4) che, per segnali causali, si



**Figura 3.2**

riduce alla forma (3.23) la quale, in forma discreta, si traduce nello schema a blocchi di **fig. 3.2.**

É chiaro che le armoniche potranno essere generate con passo in frequenza discreto e con ampiezza finita. Inoltre, non è possibile generare esattamente il segnale  $x(t)$  sia perchè non è possibile generare le

armoniche con passo in frequenza arbitrariamente piccolo, sia perchè non è fisicamente possibile generarle tutte, fino ad  $\omega = \infty$ .

### 3.4 - SIGNIFICATO DELLE FREQUENZE NEGATIVE

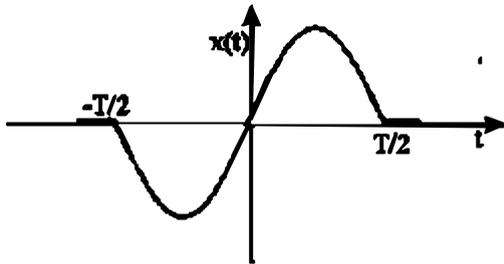


Figura 3.3

Le frequenze negative compaiono per definizione stessa di T.F., ma non hanno rispondenza nella realtà fisica: un analizzatore di spettro misura, in effetti, la T.F. di un segnale per le sole  $\omega > 0$ . Tuttavia, se si vogliono effettuare calcoli con questa T.F., occorre che la misura venga completata con la parte corrispondente alle  $\omega < 0$ , per avere la T.F. completa.

completa.

Questo si può fare utilizzando le proprietà di simmetria della T.F., come mostrato nell'esempio che segue.

Si consideri il segnale, **Fig. 3.3**

$$(3.26) \quad x(t) = \text{sen}\omega_0 t \cdot \Pi_{T/2}(t)$$

Se si calcola la T.F. si trova

$$(3.27) \quad \begin{aligned} X(\omega) &= j\pi [d(\omega - \omega_0) - d(\omega + \omega_0)] * T \frac{\text{sen } \omega T/2}{\omega T/2} \\ &= j\pi T \left[ \frac{\text{sen}(\omega - \omega_0) T/2}{(\omega - \omega_0) T/2} - \frac{\text{sen}(\omega + \omega_0) T/2}{(\omega + \omega_0) T/2} \right] = j \text{Im}(\omega) \end{aligned}$$

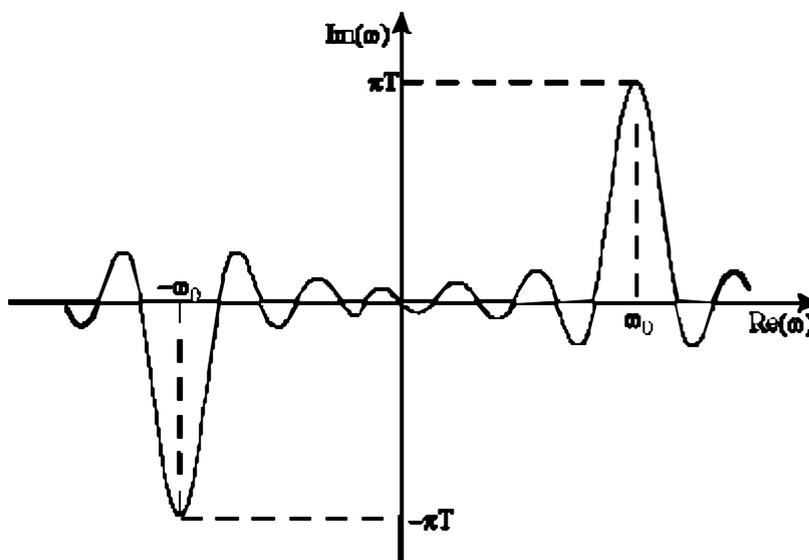


Figura 3.4

mostrata in **Fig. 3.4**.

Se si invia  $x(t)$  in un analizzatore di spettro, questo darà la porzione corrispondente a  $\omega > 0$  in Fig. 3.4, cioè con buona approssimazione (se  $\omega_0$  è grande):

$$(3.28) \quad \mathbf{pT} \frac{\text{sen}(\mathbf{w} - \mathbf{w}_o)T/2}{(\mathbf{w} - \mathbf{w}_o)T/2}$$

Poiché sappiamo che  $x(t)$  è reale e dispari, sappiamo anche che  $X(\omega)$  non ha parte reale e la parte immaginaria è dispari. Allora, dovremo noi aggiungere alla (3.28) il termine

$$(3.29) \quad -\mathbf{pT} \frac{\text{sen}(\mathbf{w} + \mathbf{w}_o)T/2}{(\mathbf{w} + \mathbf{w}_o)T/2}$$

per rendere la funzione dispari, e rendere infine il tutto immaginario per ottenere la T.F. completa.

### 3.5 - SPETTRO DI ENERGIA DI UN SEGNALE REALE

Se consideriamo l'espressione (1.5) per l'energia di un segnale reale, si può scrivere:

$$\begin{aligned}
 (3.30) \quad E &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left[ \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega \\
 &= \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) X(-\omega) d\omega
 \end{aligned}$$

Se il segnale  $x(t)$  è reale, per la proprietà (3.19) è

$$X(-\omega) = \text{Re}(-\omega) + j\text{Im}(-\omega) = \text{Re}(\omega) - j\text{Im}(\omega) = X^*(\omega)$$

per cui si ha

$$(3.31) \quad E = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 df$$

che esprime l'energia del segnale nel dominio delle frequenze.

La relazione

$$(3.32) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$$

è nota come *teorema di Parseval*.

La quantità

$$(3.33) \quad |X(\omega)|^2 df$$

rappresenta l'energia del segnale nell'intervallo di spettro tra  $f$  e  $f+df$ .

La quantità

$$(3.34) \quad |X(\omega)|^2$$

è l'energia del segnale per unità di intervallo di spettro intorno ad  $f$ , ed è chiamata spettro di (densità di) energia del segnale. Lo spettro di energia rappresenta la distribuzione dell'energia del segnale in funzione di  $f$ .

### 3.6 - LA RISPOSTA IN FREQUENZA DI UN SISTEMA

Si consideri un sistema lineare t.i. di risposta impulsiva  $h(t)$ ; la risposta ad una eccitazione  $x(t)$  è data dall'integrale di convoluzione:

$$(3.34a) \quad y(t) = x(t)*h(t)$$

Consideriamo la T.F. di entrambi i membri; per la (3.13) si ha:

$$(3.34b) \quad Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

Se il sistema è eccitato da una delta, cioè  $x(t) = \delta(t)$ , si ha

$$y(t) = h(t)$$

e quindi

$$(3.35) \quad Y(\omega) = H(\omega)$$

cioè, confrontando (3.35) e (3.34b)

$$(3.35a) \quad \text{T.F.}\{\delta(t)\} = 1$$

La delta ha quindi uno spettro uniforme, cioè contiene tutte le frequenze da  $-\infty$  a  $+\infty$ , con eguale ampiezza e fase zero. Eccitare un sistema con una  $\delta(t)$  equivale ad eccitarlo in un sol colpo con infinite sinusoidi di tutte le possibili frequenze, tutte aventi eguale ampiezza e fase zero.

Pertanto,  $H(\omega)$  rappresenta la risposta del sistema a tutte le possibili frequenze di eccitazione: per questo è nota come *risposta in frequenza* del sistema.

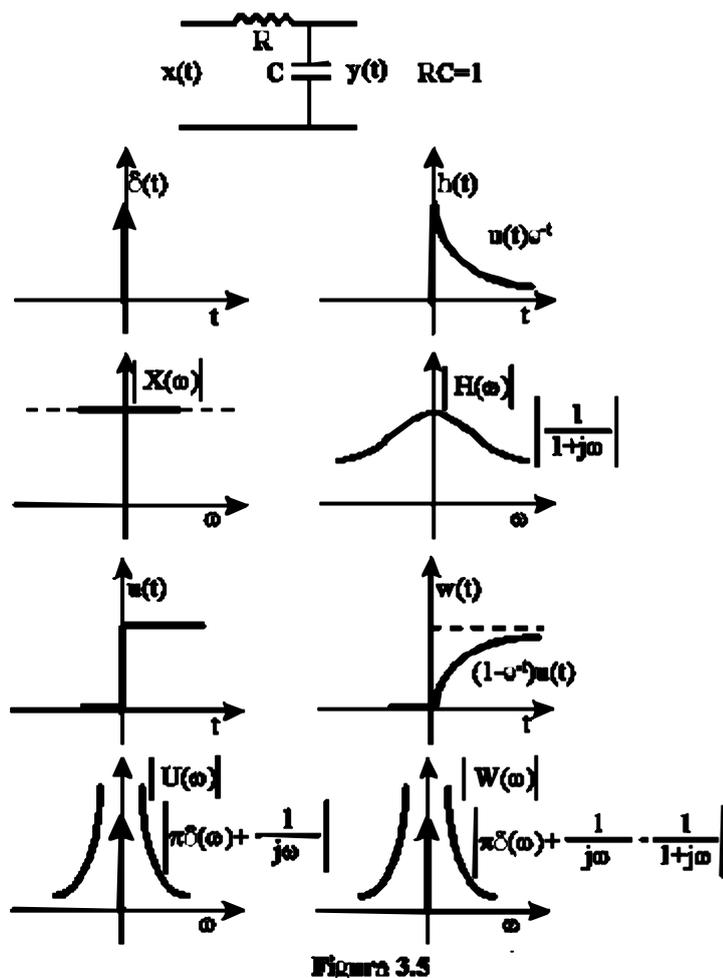
Un sistema lineare t.i. viene quindi modellato matematicamente nel dominio del tempo con la risposta impulsiva  $h(t)$ , e nel dominio delle frequenze con la risposta in frequenza  $H(\omega)$ .

La risposta in frequenza può essere misurata approssimativamente per punti, eccitando il sistema con singoli segnali sinusoidali di frequenza  $\omega_i$  e misurando per ognuno il rapporto

$$H(\omega_i) = Y(\omega_i)/X(\omega_i)$$

in ampiezza e fase, come è pratica comune di laboratorio.

L'importanza della risposta in frequenza di un sistema può essere meglio compresa se ci si riferisce per esempio agli amplificatori per frequenze audio di uso domestico: la fedeltà della riproduzione del suono è dimostrata dal costruttore proprio attraverso la risposta in frequenza dell'apparato (quasi sempre viene dato solo lo spettro di ampiezza, anche se lo spettro di fase è più importante per valutare la distorsione, alla luce di quanto detto nell'esempio 2.II e di quanto si dirà nel capitolo 4). Questa informazione è di immediata comprensione poichè può essere agevolmente confrontata con



le caratteristiche uditive dell'uomo; sarebbe impossibile ricavare la stessa informazione dalla risposta impulsiva dell'apparato, cioè da una sua descrizione nel dominio del tempo.

Mentre la T.F. della risposta alla delta ha un significato così interessante, non altrettanto può dirsi dell'altra risposta indice, cioè la risposta allo scalino. Infatti, si fa vedere più avanti che

$$(3.36) \quad \text{T.F.}\{u(t)\}=U(\omega)=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

che non ha particolare significato.

Per T.F. della (2.58) si ha

$$W(\omega) = H(\omega)U(\omega) \neq H(\omega)$$

La Fig. 3.5 illustra, nel caso di un filtro RC passa-basso, le eccitazioni e le risposte alla  $\delta$  e al gradino nei due domini.

**ESEMPIO 3.1 - T.F. DI UN IMPULSO RETTANGOLARE**

Questo segnale (finestra temporale) è

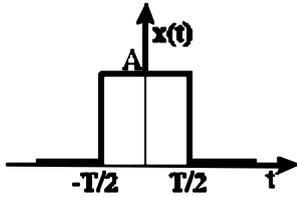
$$(3.38) \quad x(t) = A \cap_{\frac{T}{2}}(t)$$

ed è mostrato in **Fig. 3.6**. Si ha subito:

$$R(\omega) = A \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j\omega t} dt = A \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= A \left[ -\frac{e^{-j\omega \frac{T}{2}}}{j\omega} + \frac{e^{j\omega \frac{T}{2}}}{j\omega} \right] = AT \frac{e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}}}{2j\omega \frac{T}{2}}$$

e quindi



**Figura 3.6**

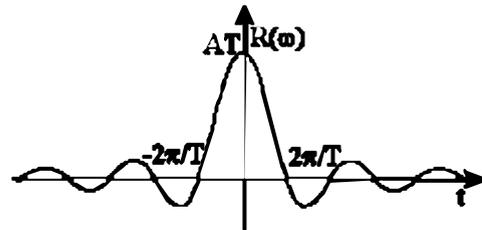
$$R(\omega) = AT \frac{\text{sen } \omega \frac{T}{2}}{\omega \frac{T}{2}}$$

$$A \cap_{\frac{T}{2}} \Leftrightarrow AT \frac{\text{sen } \omega \frac{T}{2}}{\frac{T}{2}}$$

Lo spettro di frequenza è mostrato in **Fig. 3.7**.

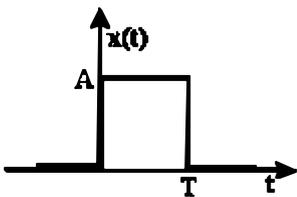
La finestra temporale di Fig. 3.6 non è fisicamente realizzabile, poiché esiste per tempi negativi; sappiamo realizzare la finestra di **Fig. 3.8**, cioè

$$(3.39) \quad x(t) = A \cap_{\frac{T}{2}}(t - \frac{T}{2})$$



**Figura 3.7**

la cui T.F. è, per la (3.10)



**Figura 3.8**

$$R(\omega) = AT \frac{\text{sen } \omega \frac{T}{2}}{\omega \frac{T}{2}} e^{-j\omega \frac{T}{2}}$$

Lo spettro di ampiezza è

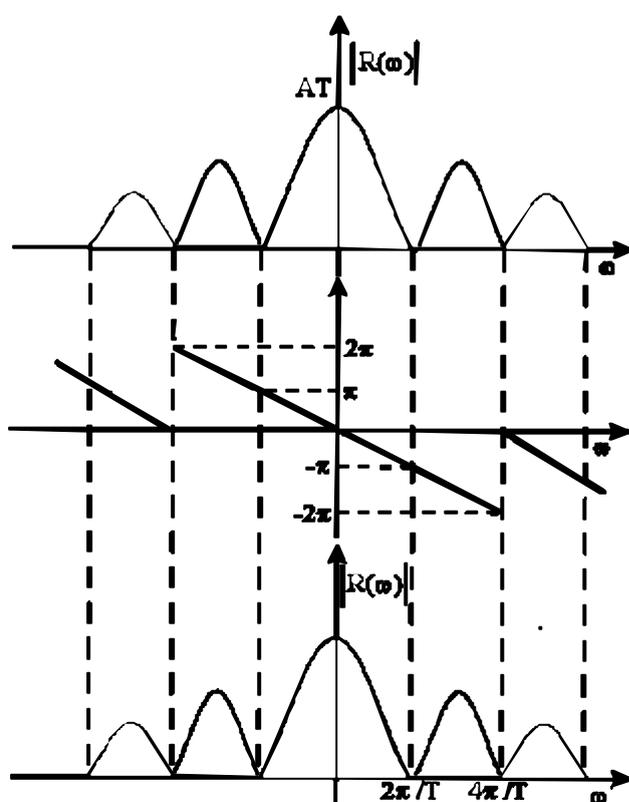
$$(3.40) \quad |R(\omega)| = \left| \frac{AT \operatorname{sinc} \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right|$$

quello di fase è

$$(3.41) \quad f(\omega) = -\omega \frac{T}{2}$$

quello di energia è

$$|R(\omega)|^2 = A^2 T^2 \operatorname{sinc}^2$$



**Figura 3.9**

Tali spettri sono mostrati in **Fig. 3.9**.

Si noti in questa figura che gran parte dell'energia dell'impulso di durata  $T$  è concentrata nel lobo centrale dello spettro: si può pertanto dire che “la larghezza di banda di un segnale di durata  $T$  è dell'ordine di  $1/T$ ”.

**ESEMPIO 3.II**

Calcoliamo la T.F. del segnale  $x(t)=1/t$ . Poiché esso non soddisfa le condizioni sufficienti per ammettere T.F., non essendo a modulo sommabile, occorre provare direttamente a calcolare la (3.3). Essendo  $1/t$  una funzione reale dispari, per la (3.6) si può riscrivere la (3.3) come segue

$$(3.42) \quad X(\omega) = -2j \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{t} dt$$

(si noti che l'integrando è una funzione pari del tempo).

L'integrale nella precedente equazione (ben noto col nome di integrale seno) converge e si trova che è uguale a  $-\pi/2$  per  $\omega < 0$ , e uguale a  $\pi/2$  per  $\omega > 0$ . Pertanto

$$X(\omega) = \begin{cases} j\pi & \text{per } \omega < 0 \\ -j\pi & \text{per } \omega > 0 \end{cases}$$

che è una funzione segno, precisamente  $-j\pi \text{sign}(\omega)$ . La proprietà di simmetria permette ora di ottenere la T.F. della funzione segno

$$(3.43) \quad \text{T.F.}\{\text{sign}(t)\} = 2/j\omega$$

Si noti che la funzione segno non soddisfa le condizioni sufficienti per la trasformabilità, e che il tentativo di calcolare comunque la (3.3) fallisce (l'integrale diverge). Questa apparente contraddizione viene risolta con la teoria delle distribuzioni, come si accenna nel paragrafo seguente.

### 3.7 - TRASFORMATA DI FOURIER E DISTRIBUZIONI

Molti segnali, quali quelli periodici, il gradino, il segnale costante,...pur non essendo fisicamente realizzabili (i segnali fisici esistono per un tempo finito) hanno grande importanza nell'analisi dei sistemi. Tali segnali non sono a modulo sommabile nè ammettono trasformata di Fourier.

Si può tuttavia estendere l'uso della T.F. a questi segnali interpretandoli come funzioni generalizzate, o distribuzioni,.

Facciamo vedere qualche esempio che fa uso della distribuzione di Dirac.

Consideriamo la (1.15); ponendo  $\phi(t) = \exp(-j\omega t)$  si ha

$$(3.44) \quad \text{TF}\{\delta(t)\} = 1$$

Da questa si ha immediatamente

$$(3.45) \quad \text{TF}\{K\delta(t)\} = K$$

da cui, per la proprietà di simmetria e per la (1.19), si ha la TF di una costante

$$(3.46) \quad K \Leftrightarrow 2\pi K\delta(\omega)$$

Lo spettro è rappresentato da una riga in  $\omega=0$ .

***ESEMPIO 3.III - TF DI UNA SINUSOIDE COMPLESSA***

Per la proprietà (3.12) e per il risultato precedente si ha

$$(3.47) \quad \text{TF}\{K e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi K \delta(\omega - \omega_0)$$

Lo spettro è una riga in  $\omega = \omega_0$ .

**ESEMPIO 3.IV - TF DI SEGNALI SINUSOIDALI REALI**

$$(3.48) \quad \text{TF}\{\cos \omega_0 t\} = \text{TF}\left\{\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right\}$$

e per la (3.47)

$$(3.49) \quad = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

Lo spettro è costituito da due righe, in  $\omega = \pm \omega_0$ .

Analogamente

$$(3.50) \quad \text{TF}\{\sin \omega_0 t\} = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

***ESEMPIO 3.V - TF DEL GRADINO***

Si può scrivere

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sign}(t)$$

e quindi

$$\operatorname{TF}\{u(t)\} = \operatorname{TF}\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sign}(t)\} = \pi\delta(\omega) + 1/j\omega$$

avendo utilizzato la (3.43) e la (3.46).

### ESEMPIO 3.VI - TF DI UN SEGNALE PERIODICO

Si procede sviluppando in serie di F. il segnale e prendendole TF dei singoli termini

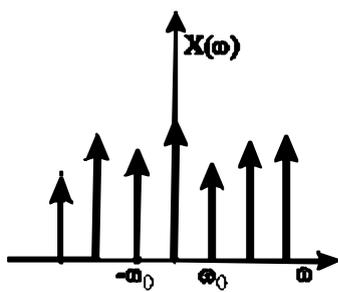
$$(3.52) \quad TF\{x(t)\} = TF\left\{\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\omega_o t}\right\} = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \delta(\omega - n\omega_o)$$

avendo utilizzato la proprietà di linearità (3.8) e la (3.47). Si tratta di uno spettro di righe, **Fig. 3.10**.

Il calcolo di  $a_n$  è noto

$$(3.53) \quad a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-jn\omega_o t} dt$$

ove  $x_T(t)$  è il segnale su un periodo. Lo spettro è lo stesso definito dalla serie di F. (a meno del fattore  $2\pi$ ), solo che

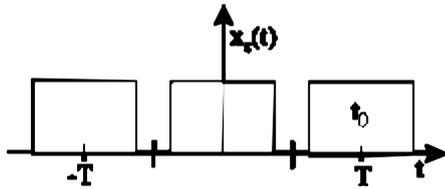


**Figura 3.10**

compaiono le delta.

### ESEMPIO 3.VII - FUNZIONE DI CAMPIONAMENTO DI DURATA FINITA

È una sequenza periodica di finestre temporali, **Fig. 3.11**:



**Figura 3.11**

$$(3.54) \quad x_s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \Pi_{\frac{t_0}{2}}(t - kT)$$

Per la (3.52)

$$(3.55) \quad X_s(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} 2\pi a_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

Per la (3.53), essendo  $x_{sT}(t) = \Pi_{t_0/2}(t)$ ,  $-T/2 < t < T/2$ ,

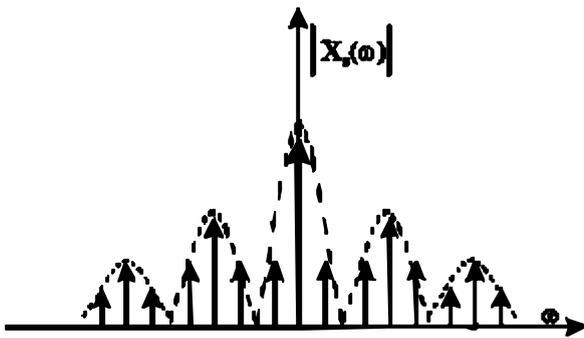
e con una ovvia estensione della (3.39) si ha

$$(3.56) \quad a_n = \frac{t_0}{T} \frac{\text{sen}\left(n\omega_0 \frac{t_0}{2}\right)}{n\omega_0 \frac{t_0}{2}}$$

per cui

$$(3.57) \quad X_s(\omega) = \frac{2\pi t_0}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(n\omega_0 \frac{t_0}{2}\right)}{n\omega_0 \frac{t_0}{2}} \delta(\omega - n\omega_0)$$

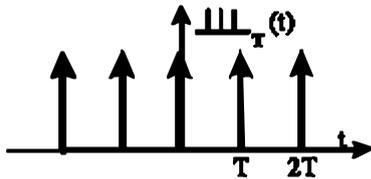
Lo spettro di ampiezza è in **Fig. 3.12**.



**Figura 3.12**

### ESEMPIO 3.VIII - FUNZIONE DI CAMPIONAMENTO IDEALE

Si tratta di una sequenza periodica di delta, **Fig. 3.13**:



**Figura 3.13**

$$(3.58) \quad x_s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

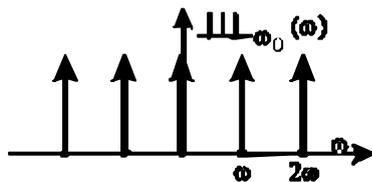
È anche chiamata 'funzione pettine', ed è indicata col simbolo  $\text{III}_T(t)$ . Analogamente al caso precedente, essendo

$$x_{sT}(t) = \delta(t) \quad -T/2 < t < T/2$$

si ha

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

e per la (3.52)



**Figura 3.14**

$$X_s(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - n\omega_0)$$

Quindi:

$$(3.59) \quad \text{III}_T(t) \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T} \text{III}_{\omega_0}(\omega)$$

Lo spettro di ampiezza è in **Fig. 3.14**.

### 3-8 LA TRASFORMATA DI LAPLACE

Questa trasformata trova essenzialmente applicazione nell'analisi dei sistemi lineari, e avremo occasione di usarla nel seguito.

La trasformata di Laplace (T.L.) di una funzione  $x(t)$  e'

$$(3.60) \quad T. L. \{x(t)\} = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

essendo  $s = \sigma + j\omega$  una variabile complessa, nota come frequenza complessa. Si noti che la T.F. può essere considerata un caso particolare della T.L. ( $\sigma = 0$ ).

La (3.60) definisce la T.L. bilaterale. Noi ci limiteremo a considerare il caso di funzioni reali e causali, che interessano i sistemi fisicamente realizzabili. Per esse, l'integrale è esteso da 0 ad  $\infty$ , e si parla di T.L. unilatera.

Si può vedere che per l'esistenza dell'integrale (3.60) è sufficiente che la  $x(t)$  sia tale che esista un  $\sigma_0$  per cui

$$(3.61) \quad \int_0^{\infty} |x(t) e^{-\sigma_0 t}| dt < \infty$$

La funzione  $x(t)$  può per esempio essere di ordine esponenziale, cioè

$$|x(t)| < M e^{\alpha t}$$

con  $M$  e  $\alpha$  costanti reali e positive; basta allora che sia  $\sigma_0 > \alpha$  ( $\alpha$  si chiama indice di crescita di  $x(t)$ ) perchè l'integrale (3.61) converga. È anche chiaro che l'integrale convergerà per tutti i  $\sigma > \sigma_0$ , cioè nel semipiano complesso ( $\sigma_0, j\omega$ ) a destra della retta di ascissa  $\sigma_0$  (ascissa di convergenza).

**Table 3.1** Some Laplace transform pairs.

$f(t)$	$F(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0^-)$
$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0^-)$
$\int_{0^-}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$(-t)^n f(t)$	$\frac{d^n}{ds^n} F(s)$
$f(t - \alpha)u(t - \alpha)$	$e^{-s\alpha} F(s)$
$e^{\alpha t} f(t)$	$F(s - \alpha)$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$\delta(t)$	1
$\delta^{(n)}(t) = \frac{d^n \delta(t)}{dt^n}$	$s^n$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n$ ( $n$ an integer)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$
$\sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
$\cos \omega_0 t$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
$\sinh \beta t$	$\frac{\beta}{s^2 - \beta^2}$
$\cosh \beta t$	$\frac{s}{s^2 - \beta^2}$
$t^{-1/2}$	$(\pi/s)^{1/2}$
$t^k$ ( $k$ may not be an integer)	$\frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}}$

reperibili in letteratura.

La T.L. inversa è ottenuta in generale con una integrazione sul piano complesso, ma per i casi di interesse pratico si può usare un metodo più semplice, descritto più avanti.

La classe delle funzioni trasformabili secondo Laplace è più ampia di quelle trasformabili secondo Fourier. Per esempio, la funzione  $x(t)=k$ , che non ammette T.F. in senso stretto, ammette T.L.

$$K(s) = \int_0^{\infty} k e^{-st} dt = k \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{k}{s}$$

in tutto il semipiano  $\sigma > 0$ .

Si osservi che per le funzioni causali a modulo sommabile (per le quali è  $\sigma_0 = 0$ ) la T.L. coincide con la T.F. ponendo  $s=j\omega$ .

La **Tavola 3.1a,b,c** riporta un elenco di T.L.

La T.L. gode di proprietà simili a quelle della T.F., come è ovvio data la stretta interconnessione tra le due trasformate. Tali proprietà sono

$F(s)$	$f(t)$	$t > 0$
1	$\delta(t)$	unit impulse
$e^{-Ts}$	$\delta(t - T)$	delayed impulse
$\frac{1}{s + a}$	$e^{-at}$	
$\frac{1}{(s + a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$	$n = 1, 2, 3, \dots$
$\frac{1}{(s + a)(s + b)}$	$\frac{1}{b - a} (e^{-at} - e^{-bt})$	
$\frac{s}{(s + a)(s + b)}$	$\frac{1}{a - b} (ae^{-at} - be^{-bt})$	
$\frac{s + z}{(s + a)(s + b)}$	$\frac{1}{b - a} [(z - a)e^{-at} - (z - b)e^{-bt}]$	
$\frac{1}{(s + a)(s + b)(s + c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b - a)(c - a)} + \frac{e^{-bt}}{(c - b)(a - b)} + \frac{e^{-ct}}{(a - c)(b - c)}$	
$\frac{s + z}{(s + a)(s + b)(s + c)}$	$\frac{(z - a)e^{-at}}{(b - a)(c - a)} + \frac{(z - b)e^{-bt}}{(c - b)(a - b)} + \frac{(z - c)e^{-ct}}{(a - c)(b - c)}$	
$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$	
$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$	
$\frac{s + z}{s^2 + \omega^2}$	$\sqrt{\frac{z^2 + \omega^2}{\omega^2}} \sin(\omega t + \phi)$	$\phi \equiv \tan^{-1}(\omega/z)$
$\frac{s \sin \phi + \omega \cos \phi}{s^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t + \phi)$	
$\frac{1}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t$	

Si è detto che la T.L. trova vasta applicazione nello studio dei sistemi lineari: il motivo appare da quanto segue. Se consideriamo una rete elettrica costituita da elementi di circuito R,L,C, le equazioni che descrivono tale rete sono, nel dominio del tempo, equazioni integro-differenziali, come si comprende se si ricordano le relazioni tra tensione e corrente per i tre elementi bipolari suddetti

$$v(t) = Ri(t)$$

$$v(t) = L di(t)/dt$$

$$v(t) = 1/C \int i(t) dt$$

$F(s)$	$f(t)$	$t > 0$
$\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\frac{1}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t$	$\omega_d \equiv \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$
$\frac{s + \alpha}{(\beta + \alpha)^2 + \omega^2}$	$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	
$\frac{s + \alpha}{(\beta + \alpha)^2 + \omega^2}$	$\sqrt{\frac{(\beta - \alpha)^2 + \omega^2}{\omega^2}} e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \phi)$	$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\omega}{\beta - \alpha} \right)$
$\frac{1}{s}$	$u(t)$ or 1	unit step
$\frac{1}{s} e^{-Ts}$	$u(t - T)$	delayed step
$\frac{1}{s} (1 - e^{-Ts})$	$u(t) - u(t - T)$	rectangular pulse
$\frac{1}{s(s + \alpha)}$	$\frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$	
$\frac{1}{s(s + \alpha)(s + \beta)}$	$\frac{1}{\alpha\beta} \left( 1 - \frac{\beta e^{-\alpha t}}{\beta - \alpha} + \frac{\alpha e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} \right)$	
$\frac{\alpha + s}{s(s + \alpha)(s + \beta)}$	$\frac{1}{\alpha\beta} \left( s - \frac{\beta(s - \alpha)e^{-\alpha t}}{\beta - \alpha} + \frac{\alpha(s - \beta)e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} \right)$	
$\frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t)$	
$\frac{\alpha + s}{s(s^2 + \omega^2)}$	$\frac{s}{\omega^2} - \sqrt{\frac{s^2 + \omega^2}{\omega^2}} \cos(\omega t + \phi)$	$\phi = \tan^{-1}(\omega/s)$
$\frac{1}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$\frac{1}{\omega_n^2} - \frac{1}{\omega_n \omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi)$	$\omega_d \equiv \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ $\phi = \cos^{-1} \zeta$
$\frac{1}{s(s + \alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t})$	
$\frac{\beta + s}{s(s + \alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2} [s - \alpha e^{-\alpha t} + \alpha(\alpha - \beta) t e^{-\alpha t}]$	
$\frac{1}{s^2}$	$t$	unit ramp
$\frac{1}{s^2(s + \alpha)}$	$\frac{1}{\alpha^2} (\alpha t - 1 + e^{-\alpha t})$	
$\frac{1}{s^n}$ $n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$0! = 1$

Col formalismo di L., chiamando  $V(s)$  e  $I(s)$  le trasformate della tensione e della corrente, e assumendo condizioni iniziali nulle,  $v_C(0) = 0$  e  $i_L(0) = 0$  (cioè L e C inizialmente scarichi), le relazioni diventano, usando la Tav. 3.1

$$V(s) = RI(s)$$

$$V(s) = sLI(s)$$

$$V(s) = (1/sC)I(s)$$

È chiaro quindi che le equazioni integro-differenziali che descrivono la rete nel dominio del tempo diventano semplici equazioni algebriche nel dominio  $s$ . Si possono pertanto risolvere queste equazioni nel dominio  $s$ , convertendo poi il risultato nel dominio del tempo per antitrasformazione.

I sistemi lineari time invariant, descritti nel dominio del tempo dalla risposta impulsiva  $h(t)$  e nel dominio delle frequenze dalla risposta in frequenza  $H(\omega) = TF\{h(t)\}$ , sono descritti nel dominio  $s$  dalla “funzione di trasferimento”  $H(s) = TL\{h(t)\}$ . Si può vedere che tale funzione di trasferimento è generalmente esprimibile in forma razionale fratta, cioè come rapporto di due polinomi. In forma fattorizzata si ha

$$H(s) = \frac{\sum_1^n b_i s^i}{\sum_1^m a_i s^i} = \frac{k(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_n)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_m)} \quad m \geq n$$

La funzione di trasferimento si annulla per  $s = -z_i$ , e queste radici (che corrispondono a punti sul piano complesso, e possono essere o reali o a coppie complesse coniugate, e non necessariamente distinte) vengono chiamate gli “zeri” di  $H(s)$ . Analogamente, i punti  $s = -p_i$  sono i “poli” di  $H(s)$ .

Il comportamento di un sistema può essere completamente descritto (a meno della costante  $k$ ) dai poli e dagli zeri sul piano complesso, e quivi studiato. Vari metodi sono noti a questo scopo (Bode, Nyquist, luogo delle radici,...) ma esulano da questo corso.

Descriviamo ora brevemente il metodo dello sviluppo in frazioni parziali per ricercare l’antitrasformata di  $L$ . Consideriamo dapprima il caso che la funzione di trasferimento abbia radici semplici. Il metodo consiste nell’imporre la seguente eguaglianza

$$H(s) = b_m + \frac{A_1}{s+p_1} + \frac{A_2}{s+p_2} + \dots + \frac{A_m}{s+p_m}$$

e nel cercare i coefficienti  $A_i$  che soddisfano l’eguaglianza. si trova

$$A_i = (s+p_i)H(s)|_{s=-p_i}$$

Ovviamente, sarà  $b_m = 0$  se  $m > n$ .

Nel caso invece che  $H(s)$  abbia radici doppie, e supponiamo per esempio che tale sia la radice  $p_1$ , lo sviluppo si scriverà?

$$H(s) = b_m + \frac{A_{11}}{s + p_1} + \frac{A_{12}}{(s + p_1)^2} + \frac{A_2}{s + p_2} + \dots + \frac{A_{m-1}}{s + p_{m-1}}$$

e si trova

$$A_{11} = \frac{d}{ds} [(s + p_1)^2 H(s)] \Big|_{s=-p_1}$$

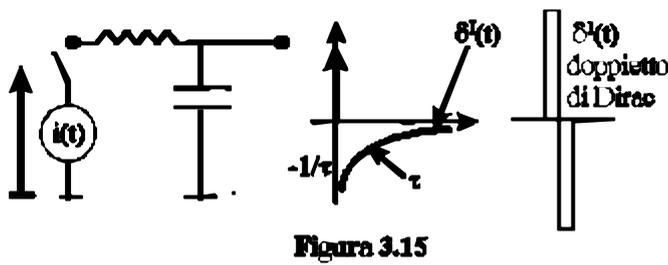
$$A_{12} = [(s + p_1)^2 H(s)] \Big|_{s=-p_1}$$

Il caso di radici con molteplicità maggiore è raro, e può comunque essere ritrovato in letteratura.

Una volta ottenuto lo sviluppo in frazioni parziali, basta cercare nelle tavole le antitrasformate delle singole frazioni.

Si danno di seguito alcuni esempi di applicazione del metodo.

**ESEMPIO 3.IX - FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DI UNA RETE RC PASSA-ALTO**



Se indichiamo con  $x(t)$  la tensione di eccitazione alla rete, **Fig. 3.15**, e con  $y(t)$  la tensione di risposta prelevata sulla resistenza, nel dominio del tempo si ha:

$$x(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + Ri(t)$$

Nel dominio  $s$ , con  $\tau=RC$  si ha

$$X(s) = I(s)/sC + RI(s) = I(s)(R + 1/sC) = I(s)((1 + s\tau)/sC)$$

da cui, con  $s_0 = 1/\tau$

$$Y(s) = RI(s) = sX(s)/(s + s_0)$$

Per es., ponendo  $X(s)=1$  (trasf. di L. della delta) e sviluppando in frazioni parziali, si ha

$$H(s) = s/(s+s_0) = b_1 + A/(s+s_0) = 1 - s_0/(s+s_0)$$

e infine

$$h(t) = \delta(t) - (1/\tau)\exp(-t/\tau)$$

rappresentata in fig. 3.15.

Analogamente, la risposta allo scalino  $u(t) \Leftrightarrow 1/s = X(s)$  e'

$$Y(s) = 1/(s+s_0)$$

da cui

$$y(t) = \exp(-t/\tau)$$

## ESEMPIO 3.X

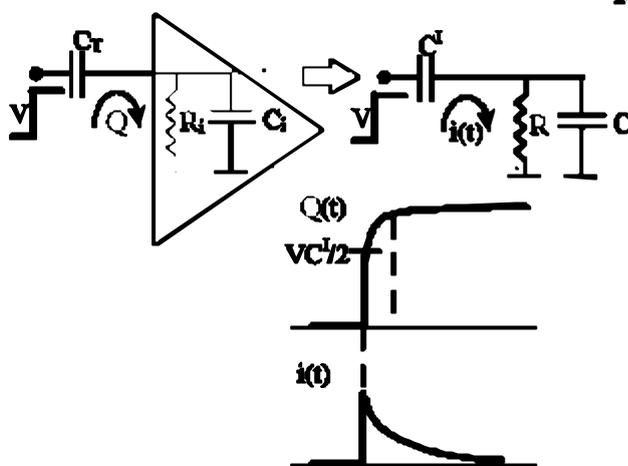


Figura 3.16

■ Nella rete di Fig. 3.16, il parallelo RC rappresenta l'impedenza di entrata di un generico amplificatore per impulsi, e C' una capacità di disaccoppiamento. Si applica all'entrata uno scalino di tensione  $V_u(t)$ ; si vuole sapere la carica Q iniettata all'entrata dell'amplificatore, cioè nel parallelo RC. Possiamo dapprima calcolare la corrente che scorre nel parallelo RC e poi integrarla.

Scriviamo l'equazione della maglia direttamente col formalismo di L.

$$V/s = I(s)/sC' + I(s)R\alpha/(s+\alpha) =$$

avendo posto  $\alpha=1/\tau$ . Continuando

$$= I(s)/s(1/C' + sR\alpha/(s+\alpha))$$

da cui si ricava l'integrale della corrente

$$\frac{I(s)}{s} = \frac{V/s}{1/C' + \frac{sR\alpha}{s+\alpha}} = \frac{V/s}{\frac{s+\alpha}{C'(s+\alpha)}} = \frac{VC'(s+\alpha)}{s[s(1+\alpha RC') + \alpha]} = \frac{VC'(s+\alpha)}{s(1+\alpha RC')(s + \frac{\alpha}{1+\alpha RC'})}$$

che si scrive infine ( $k=1+\alpha RC'$ )

$$\frac{I(s)}{s} = \frac{VC'}{k} \frac{s+\alpha}{s(s + \frac{\alpha}{k})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{\alpha}{k}}$$

Si ha

$$A = VC'$$

$$B = VC'(1-k)/k$$

e quindi

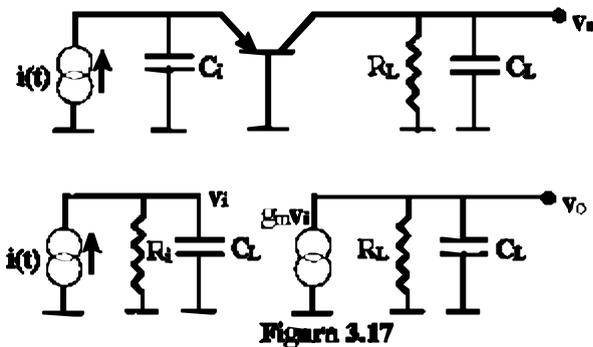
$$Q(t) = VC' \left( 1 + \frac{1-k}{k} e^{-\frac{at}{k}} \right) = VC' \left( 1 - \frac{C}{C+C'} e^{-\frac{t}{\tau'}} \right)$$

avendo posto  $\tau' = R(C+C')$ .

Se per es.  $R=50$  ohm,  $C=C'=3$  pF, si ha  $\tau'=0.3$  nsec. La  $Q(t)$  e la  $i(t)$  sono rappresentate in fig. 3.16: nel circuito viene iniettata una carica  $Q=C'V$  in un tempo inferiore al nsec, in pratica una delta

come si avrebbe se l'impedenza di entrata dell'amplificatore fosse realmente zero.

**ESEMPIO 3.XI**



**Figura 3.17**

Consideriamo l'amplificatore base comune, schematicamente rappresentato in **Fig. 3.17**.  $C_i$  è la capacità totale all'entrata;  $R_L$ ,  $C_L$  sono il carico. L'eccitazione è una delta di corrente, e si vuole la funzione di trasferimento. In fig. è indicato il modello equivalente (semplificato), caratterizzato dalla

transconduttanza dell'amplificatore stesso.. Nelle applicazioni che interessano, tipicamente è  $C_i = C_L = \sim \text{pF}$ ; inoltre,  $R_i = 1/g_m \ll R_L$ . Per es.,  $R_i = 50 \text{ ohm}$ ,  $C_i = C_L = 2 \text{ pF}$ ,  $R_L = 10 \text{ k}$ . Pertanto,  $\tau_i = R_i C_i \ll \tau_L = R_L C_L$ .

Col formalismo di L si ha

$$V_i = IZ_i = IR_i/(1+s\tau_i)$$

$$V_o = g_m V_i Z_L = I g_m R_i R_o / (1+s\tau_i)(1+s\tau_o) = I G_o / (1+s\tau_i)(1+s\tau_o)$$

E quindi

$$H(s) = \frac{V_o}{I} = \frac{G_o a_i a_L}{(s+a_i)(s+a_L)} = \frac{A}{s+a_i} + \frac{B}{s+a_L}$$

Si ottiene

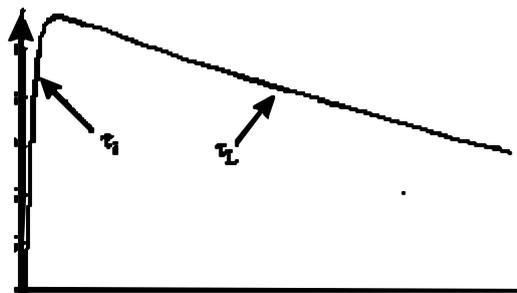
$$A = -B = -G_o \alpha_i \alpha_L / (\alpha_i - \alpha_L)$$

e infine ( $I=1$ )

$$v_o(t) = \frac{G_o a_i a_L}{a_i - a_L} (e^{-t/\tau_L} - e^{-t/\tau_i})$$

Si noti che per  $t \ll \tau_L$ , si ha

$$v_o(t) \approx k(1 - e^{-t/\tau_i})$$



**Figura 3.18**

pertanto, il tempo di salita della risposta alla delta è determinato dal polo ad alta frequenza  $\tau_i$  ( $f_i = 1/2\pi\tau_i = 1.59 \text{ GHz}$ ). Analogamente, si può vedere che il polo dominante dell'amplificatore  $\tau_L$  ( $f_L = 7.96 \text{ MHz}$ )

determina la lunghezza della coda della risposta.

La forma della risposta alla delta è mostrata in **Fig. 3.18**

È facile vedere che il max della risposta si ha per

$$t = \frac{t_L t_i}{t_L - t_i} \ln \frac{t_L}{t_i} \approx \ln \frac{t_L}{t_i}$$

Con i valori assegnati, si ha  $\tau_i=0.1$  nsec,  $\tau_L=20$  nsec ed il max viene raggiunto dopo 5.3 nsec. Il tempo di salita sarà dell'ordine di 2-3 nsec (attenzione: non si può usare la relazione  $t_r=2.2 RC$ , la quale vale solo quando l'eccitazione è uno scalino!).

La risposta della rete allo scalino sarà

$$V_o=H(s)/s = G_o \alpha_i \alpha_L / s(s+\alpha_i)(s+\alpha_L) = A/s + B/(s+\alpha_i) + C/(s+\alpha_L)$$

e si trova

$$A=G_o$$

$$B=G_o \alpha_L / (\alpha_i - \alpha_L)$$

$$C=-G_o \alpha_i / (\alpha_i - \alpha_L)$$

Antitrasformando

$$v_o(t) = G_o \left( 1 + \frac{a_L}{a_i - a_L} e^{-\frac{t}{t_i}} - \frac{a_i}{a_i - a_L} e^{-\frac{t}{t_L}} \right)$$

Tenendo conto dei valori numerici assegnati

$$\alpha_i / (\alpha_i - \alpha_L) \approx 1$$

$$\alpha_L / (\alpha_i - \alpha_L) \approx 0.005$$

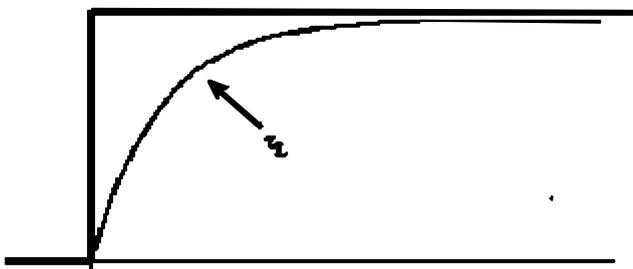
per cui

$$v_o(t) \approx G_o \left( 1 - e^{-\frac{t}{t_L}} \right)$$

In **Fig. 3.19** è mostrato l'andamento temporale della risposta. Il tempo di salita è come noto

$t_r \approx 2.2 R_L C_L$ , dipende cioè dal polo dominante ad alta frequenza.

È importante notare, come questo esempio dimostra, che il tempo di salita della risposta di un amplificatore **dipende dall'eccitazione**. Nel nostro caso, un amplificatore con una banda passante relativamente bassa ha una risposta alla



**Figura 3.19**

delta con un fronte di salita rapidissimo; l'effetto della b.p. si manifesta nella lunga coda.

Comunemente, per “tempo di salita di un amplificatore” si intende il tempo di salita della risposta al gradino, ma occorre fare attenzione a non confondere.

Bibliografia