CAPITOLO 1

GENERALITA'

1.1 - DEFINIZIONE DI SEGNALE E DI RUMORE

Si può definire "segnale" il risultato della misura di una grandezza fisica, al quale associamo un significato per noi interessante.

In Fig. 1.1 è schematizzata una esperienza di coincidenza su particelle cariche, mediante scintillatore plastico e fotomoltiplicatore (F.M.). Il "segnale" all'uscita di ciascun F.M. è una tensione variabile nel tempo, avente forma di un breve impulso, provocato dal passaggio della particella.

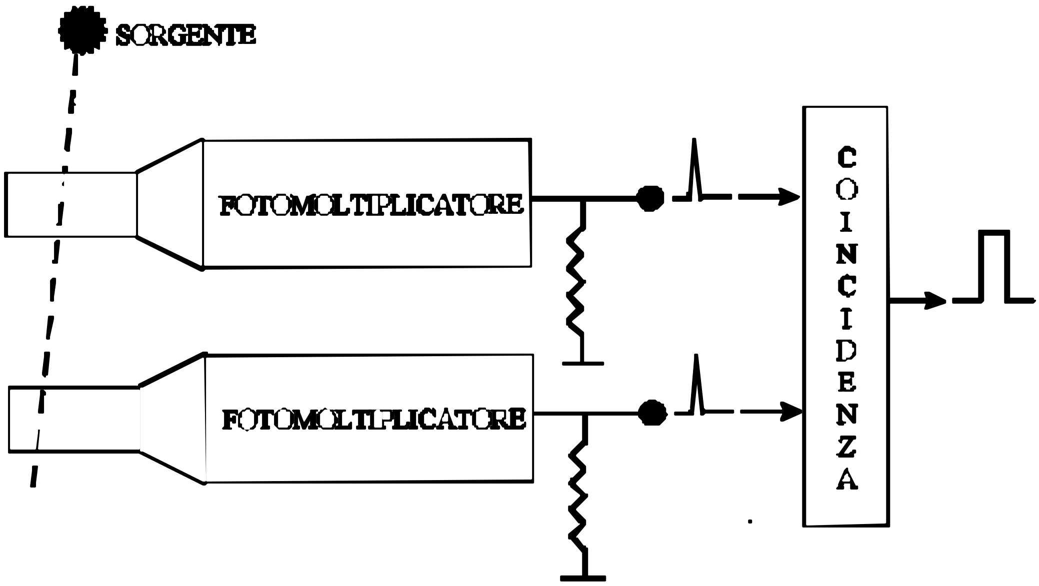

Figura 1.1

Le informazioni che si possono trarre da tale segnale sono, per es.:

- l'indicazione dell'avvenuto passaggio di una particella entro il cono di accettanza dei rivelatori; tale indicazione è data dalla coincidenza quando i due impulsi sono presenti contemporaneamente (a meno di δt, tempo di volo della particella fra i due rivelatori, che è possibile misurare e compensare).
- L'energia della particella (correlata all'ampiezza dell'impulso).
- La velocità della particella stessa (proporzionale a $1/\delta t$).
- Ecc.

Si può definire "*rumore*" un risultato della stessa misura, che sia per noi insignificante.

Riferendoci alla stessa esperienza precedente di Fig. 1.1, all'uscita di ciascun F.M. è possibile osservare impulsi di tensione, della stessa forma disegnata in Fig. 1.1, anche in assenza della sorgente. Essi sono generati da altre particelle cariche, indesiderate ma inevitabilmente presenti (raggi cosmici, radioattività ambientale,...). Questi impulsi costituiscono il "*fondo*".

Una attenta osservazione (su una scala dell'oscilloscopio dell'ordine dei mV/cm) può rivelare all'uscita di ciascun F.M. una tensione alternata, alla frequenza di rete, dovuta a non perfetto filtraggio delle alimentazioni.

Infine (su una scala dell'ordine dei μV/cm), è anche possibile osservare all'uscita del F.M. una tensione la cui ampiezza varia nel tempo in modo del tutto casuale e che, come si vedrà nel seguito, è generata tra l'altro dalla agitazione termica delle cariche libere nei componenti di cui è costituita l'elettronica del F.M.

In tutti i casi, il fatto che la generazione del segnale sia inevitabilmente accompagnata da questi fenomeni finisce col disturbare la corretta interpretazione dei risultati dell'esperimento: si dice pertanto che il segnale è accompagnato da rumore (noise).

E' chiaro che la distinzione fra "segnale" e "rumore" è puramente contingente, cioè legata all'esperimento attuale: ciò che è noise in una esperienza può essere segnale in un'altra. Per es., con lo stesso apparato di coincidenza di Fig. 1.1 si può misurare l'intensità della radiazione cosmica in funzione dell'angolo di incidenza: gli impulsi dei cosmici sono ora "segnale".

1.2 - SEGNALI DETERMINISTICI E SEGNALI CASUALI

In esperimenti particolarmente semplici si può dare del segnale una rappresentazione analitica esplicita x(t). Si parla in questo caso di segnale deterministico. x(t) è una funzione reale per segnali che siano fisicamente osservabili. A questo caso ci riferiremo generalmente nel seguito.

Per es., nel circuito di Fig. 1.2 la tensione ai capi di C (inizialmente scarico), dopo la chiusura dell'interruttore (t=0), è rappresentabile con la funzione

(1.1) $$x(t) = V(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

La disponibilità di un "modello matematico" per il segnale deterministico permette di prevedere l'andamento futuro del segnale stesso, senza necessità di effettuare misure.

Altre volte accade che il segnale osservato non è modellabile in maniera semplice. Osservando, per

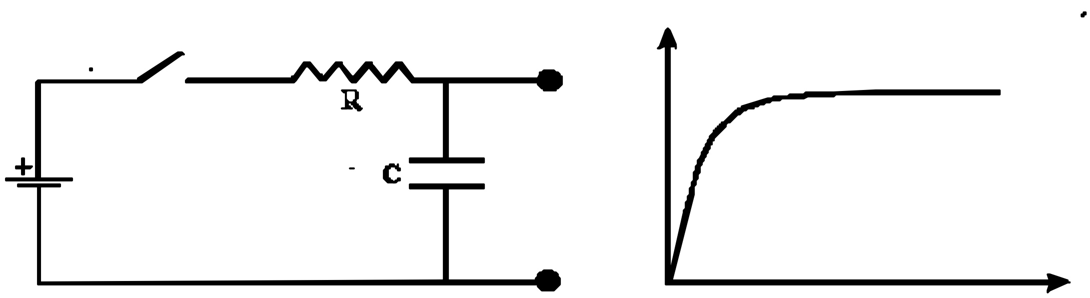

Figura 1.2

es., con un oscilloscopio, su opportuna scala, l'uscita di un amplificatore in assenza di segnale di entrata, si vedrà la tensione generata dal noise di cui si è già detto, il cui andamento nel tempo è del tutto casuale, nel senso che anche se si misurassero i valori ad ogni istante da -∞ a t, non sarebbe possibile da essi prevedere il valore esatto che la tensione assumerà a t+dt: non è quindi possibile scrivere una espressione analitica esplicita per x(t). Si parla in questo caso di segnale casuale (o random).

Va tuttavia sottolineato che la classificazione di un segnale come random ha, in linea di principio, valore provvisorio, nel senso che *attualmente* non è possibile o non è conveniente trovare la legge analitica che descriva il segnale stesso (a causa, per es., del gran numero di condizioni al contorno); ma non c'è ragione che vieti di pensare che ciò nel futuro diventi possibile. Per es., la tensione di rumore all'uscita dell'amplificatore potrebbe essere descritta analiticamente se si potessero determinare le equazioni del moto di tutti i portatori di carica in ciascun componente dell'amplificatore, per poter descrivere l'andamento delle differenze di potenziale provocate.

Da quanto ora detto, è chiaro che segnali rigorosamente deterministici non esistono nella realtà fisica, per la inevitabile presenza del rumore in qualunque esperimento. Ovviamente, poiché la distinzione tra segnale e rumore è contingente, anche il rumore può essere deterministico o random.

I segnali $x(t)$ di cui ci occuperemo per ora sono di tipo analogico, nel senso che la variabile indipendente t è continua, e la consideriamo definita in $(-\infty,+\infty)$. Nel Capitolo 5 vedremo come un segnale analogico sia rappresentabile in forma discreta $x[n]$, cioè mediante una sequenza di numeri.

1.3 - ENERGIA E POTENZA DI UN SEGNALE

Consideriamo il caso che il segnale x(t) sia una tensione, cioè:

$$x(t) = v(t)$$

E' noto che l'energia dissipata per effetto Joule in un tempo t e':

$$E = \int_0^t \frac{v^2(t)}{R} dt \tag{1.2}$$

Analogamente, se:

$$x(t) = i(t)$$

l'energia dissipata sarà:

$$E = \int_0^t i^2(t) R dt \tag{1.3}$$

Usando la notazione generica x(t) e considerando R=1 Ohm, si può scrivere in entrambi i casi:

$$E = \int_0^t x^2(t) dt \tag{1.4}$$

che può essere assunta come definizione di "energia" di un segnale arbitrario x(t) (cioè anche nel caso che x(t) non sia una tensione o una corrente) nell'intervallo (0, t), poiché si può sempre sottintendere un 1 con opportune dimensioni. L'energia totale di un segnale e':

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \tag{1.5}$$

convergente per segnali ad energia finita.

Se l'integrale non converge (come accade per i segnali periodici), si definisce la "potenza" media del segnale:

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt \tag{1.6}$$

Si noti che:

se $P \neq 0 \rightarrow$ E è infinita

se $P = 0 \rightarrow$ E è finita

Vi sono segnali che non hanno né energia né potenza finite. Un esempio è il segnale

x(t) = exp(-kt) k cost

1.4 - SEGNALI ELEMENTARI

Si descrivono alcuni segnali semplici che, pur essendo ideali, possono essere approssimati più o meno bene nella realtà fisica e si rivelano molto utili in quanto si dirà in seguito.

- Gradino unitario.

E' definito come segue:

$$u(t-t_0) \begin{cases} = 1 & t>t_0 \\ = 0 & t<t_0 \end{cases} \tag{1.7}$$

ed è rappresentato in Fig. 1.3. Un gradino di altezza A si scriverà $Au(t-t_0)$.

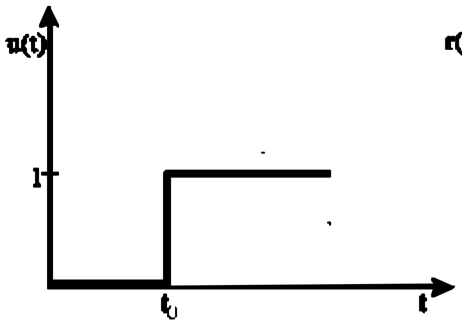

Figura 1.3

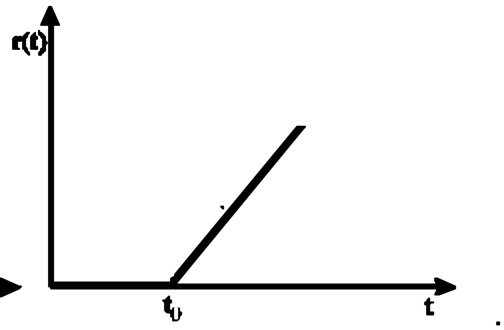

Figura 1.4

- Rampa unitaria.

E' definita come segue

$$r(t-t_0) \begin{cases} = t-t_0 & t>t_0 \\ = 0 & t<t_0 \end{cases} \tag{1.8}$$

ed è rappresentata in Fig. 1.4. Una rampa di pendenza b sarà $br(t-t_0)$. E' facile verificare che:

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(l)\,dl \tag{1.9}$$

e che:

$$u(t) = \frac{dr(t)}{dt} \qquad t \neq 0 \tag{1.10}$$

- Impulso rettangolare unitario.

Un impulso rettangolare di durata θ è definito come segue:

(1.11) $$\sqcap_{\frac{\theta}{2}}(t-t_0) = \begin{cases} 1 & t_0-\frac{\theta}{2}<t<t_0+\frac{\theta}{2} \\ 0 & altrove \end{cases}$$

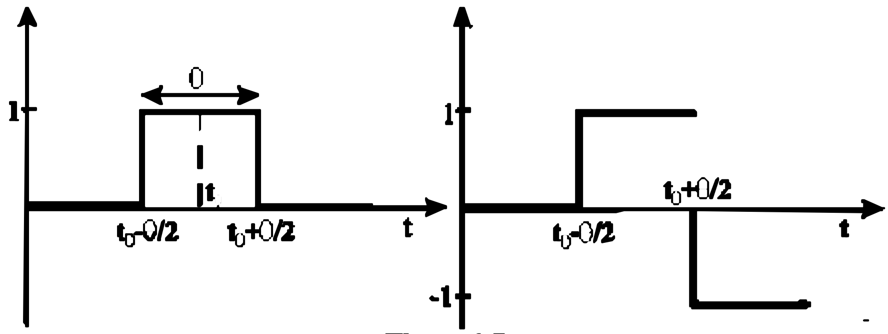

Figura 1.5

ed è rappresentato in Fig. 1.5a. E' anche chiamata funzione finestra. E' facile vedere che l'impulso rettangolare può essere costruito mediante due gradini, come mostrato in Fig. 1.5b.

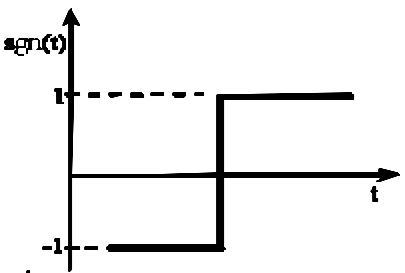

Figura 1.6

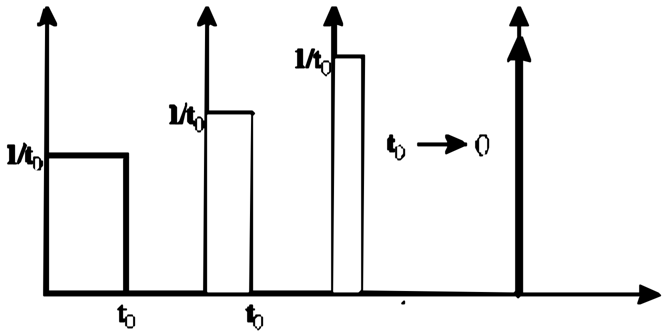

Figura 1.7

- La funzione segno.

E' così definita:

(1.12) $$\mathrm{sgn}(t-t_0) \begin{cases} = -1 & t<t_0 \\ = 1 & t>t_0 \end{cases}$$

ed è rappresentata in Fig. 1.6.

- La delta.

Questo segnale è la idealizzazione di un impulso estremamente breve ma di area finita. Cominciamo col definire la delta in maniera euristica, cioè intuitiva, come illustrato in Fig. 1.7.

La $\delta(t)$ così definita ha area unitaria. La delta avente area A è $A\delta(t)$. In Fig. 1.8 è mostrata una delta di area A all'istante t_0, cioè $A\delta(t-t_0)$.

La descrizione intuitiva della $\delta(t)$ non si presta ad un uso operativo di questa funzione, in quanto non è possibile definirne le proprietà. Per far questo, occorre ricorrere al concetto di funzione generalizzata, o distribuzione, che viene brevemente introdotto.

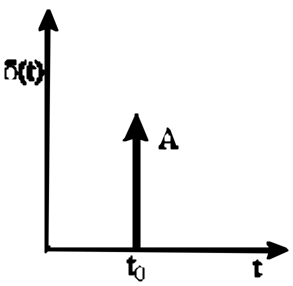

Figura 1.8

Come è noto, una funzione ordinaria f(t) è un processo che associa ad un numero t_0 (il valore assunto dalla variabile t nel dominio di definizione) un altro numero dipendente da t_0, $N_O = f(t_0)$.

Una distribuzione D(t) è invece un processo che associa ad una funzione ordinaria $\Phi(t)$ un numero dipendente da $\Phi(t)$, $N_D(\Phi(t))$. E' conveniente esprimere tale numero sotto forma di integrale definito:

(1.13) $$N_D(\Phi(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) D(t) dt$$

perché è comodo far coincidere le sue proprietà con quelle degli integrali (linearità,...).

La δ di Dirac è una distribuzione che associa ad una funzione $\Phi(t)$, continua in t=0, il numero $\Phi(0)$:

(1.14) $$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) d(t) dt = \Phi(0)$$

Si noti, per inciso, che anche una funzione ordinaria f(t) può essere considerata una distribuzione, la quale associa ad una funzione $\Phi(t)$ il numero

(1.15) $$N_D(\Phi(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) f(t) dt$$

che dipende da $\Phi(t)$.

Alcune proprietà della $\delta(t)$ sono le seguenti.

Proprietà 1.

Ponendo $\Phi(t)=1$, si ha dalla (1.15)

(1.16) $$\int_{-\infty}^{\infty} d(t)dt = 1$$

cioè la δ(t) ha area unitaria.

Proprietà 2.

(1.17) $$d(at) = \frac{1}{|a|}d(t)$$

La dimostrazione, qui omessa, parte considerando l'integrale (1.15) e facendo il cambiamento di variabile t=x/a.

Proprietà 3.

(1.18) $$\delta(t) = \delta(-t)$$

deriva dalla (1.17) con a=-1. La δ è quindi una funzione pari.

Proprietà 4.

(1.19) $$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)d(t-a)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)d(a-t)dt = \Phi(a)$$

come si può verificare col cambiamento di variabile t-α=x.

Proprietà 5.

(1.20) $$f(t)\delta(t-\alpha) = f(\alpha)\delta(t-\alpha)$$

che si può dimostrare sostituendo a Φ(t) nella (1.19) prima Φ(t)·f(t) e poi Φ(t)·f(α). Da questa proprietà sembrerebbe di poter concludere che δ(t) è nulla per ogni t≠0. Questa dizione può risultare comoda, anche se è formalmente scorretta, poiché la delta non è una funzione definita per ogni t.

Proprietà 6.

(1.21) $$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)\frac{d^n d(t)}{dt^n}dt = (-1)^n \frac{d^n\Phi(t)}{dt^n}\Big|_{t=0}$$

Proprietà 7.

(1.22) $$d(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

si può dimostrare con la (1.16), verificando che la distribuzione du/dt associa a Φ(t) il numero Φ(0), come δ(t).

Comunemente, la δ viene rappresentata con una freccia verticale di altezza proporzionale alla sua area.

Bibliografia

G. Cooper, C. McGillem, Methods of signal and system analysis. Holt, Rinehart, Winston