CLASSE LIMITE DI UNA SUCCESSIONE DI NUMERI REALI

C. MADERNA, G. MOLTENI, M. VIGNATI

Consideriamo l'insieme

$$\overline{R} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

ottenuto aggiungendo all'insieme dei numeri reali i simboli $-\infty$ e $+\infty$. Introduciamo in $\overline{R}$ una relazione binaria $'' <''$ nel modo seguente: quando opera su una coppia di numeri reali, la relazione $'' <''$ coincide con la usuale relazione d'ordine in $\mathbf{R}$, mentre quando opera su una coppia in cui almeno uno dei due elementi è un simbolo, la relazione è così definita

$$\begin{array}{rcll} -\infty & < & +\infty & \\ -\infty & < & c & \text{per ogni } c \in \mathbf{R} \\ c & < & +\infty & \text{per ogni } c \in \mathbf{R} \end{array}$$

E' immediato verificare che $(\overline{R}, <)$ è un insieme totalmente ordinato, cioè che valgono le seguenti proprietà:
i) se $\alpha, \beta \in \overline{R}$, allora $\alpha \leq \beta$ oppure $\beta \leq \alpha$;
ii) se valgono contemporaneamente $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$, allora $\alpha = \beta$;
iii) se $\alpha, \beta, \gamma \in \overline{R}$ e $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \gamma$ allora $\alpha \leq \gamma$.

La presenza della relazione d'ordine in $\overline{R}$ permette di introdurre per i sottoinsiemi non vuoti $E \subseteq \overline{R}$ i concetti di massimo di E, minimo di E, maggiorante e minorante di E, estremo superiore ed estremo inferiore di E. Osserviamo, in particolare, che $-\infty = \min \overline{R}$,$+\infty = \max \overline{R}$. Inoltre ogni sottinsieme non vuoto $E \subseteq \overline{R}$ è limitato sia inferiormente che superiormente, poiché $-\infty$ e $+\infty$ sono rispettivamente un minorante e un maggiorante di E; infine ogni sottinsieme non vuoto $E \subseteq \overline{R}$ è dotato di estremo superiore e estremo inferiore.

DEFINIZIONE Sia $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbf{R}$ una successione di numeri reali. Diciamo che $\lambda \in \overline{R}$ è un valore limite della successione se esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}_{k\geq 1}$ tale che

$$\lambda = \lim_{k\to+\infty} a_{n_k} \ .$$

Chiamiamo classe limite della successione il sottoinsieme $\Lambda \subseteq \overline{R}$ costituito da tutti e soli i valori limite.

Date:

TEOREMA La classe limite di una successione $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbf{R}$ di numeri reali è non vuota.

Dim. Se $\{a_n\}_{n\geq 1}$ è una successione di numeri reali limitata, per il teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sua sottosuccessione convergente: ne segue che il limite della sottosuccessione è un valore limite e quindi $\Lambda \neq \emptyset$. Se $\{a_n\}_{n\geq 1}$ è una successione di numeri reali non limitata, ad esempio, superiormente, verifichiamo che $+\infty \in \Lambda$, cioè che esiste una sottosuccessione divergente a $+\infty$. (In modo analogo si verifica che se la successione è non limitata inferiormente, $-\infty \in \Lambda$). Costruiamo la sottosuccessione nel seguente modo: poiché $\{a_n\}_{n\geq 1}$ è non limitata superiormente, per ogni $M > 0$ esiste $\overline{n} = \overline{n}(M)$ tale che $a_{\overline{n}} > M$. Per $M = 1$, denotiamo con n_1 l'indice $\overline{n}(1)$; poiché $\{a_n\}_{n>n_1}$ è non limitata superiormente, fissato $M = 2$, esiste $\overline{n}(2)$ tale che $a_{\overline{n}} > 2$ e $\overline{n} > n_1$;denotiamo con n_2 l'indice $\overline{n}(2)$. Iterando il procedimento, costruiamo una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}_{k\geq 1}$ tale che

$$a_{n_k} > k \qquad\qquad \text{per ogni } k \geq 1 \ .$$

Dal criterio del confronto otteniamo quindi che $\{a_{n_k}\}_{k\geq 1}$ diverge a $+\infty$.▲

Si può dimostrare il seguente risultato

TEOREMA La classe limite di una successione $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbf{R}$ di numeri reali ha massimo e minimo in $\overline{R}$.

DEFINIZIONE Data una successione $\{a_n\}_{n\geq 1}$ di numeri reali, chiamiamo limite superiore e limite inferiore della successione il massimo e il minimo della sua classe limite; in simboli, poniamo

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \max\Lambda \qquad\qquad \liminf_{n\to+\infty} a_n = \min\Lambda \ .$$

Il limite superiore è anche detto massimo limite e denotato con i simboli

$$\max\lim_{n\to+\infty} a_n \qquad \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n$$

mentre il limite inferiore è detto anche minimo limite e denotato anche

$$\min\lim_{n\to+\infty} a_n \qquad \underline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n \ .$$

ESEMPI

1) Sia $a_n = (-1)^n$, cioè consideriamo la successione

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, ...$$

La classe limite è costituita dai numeri reali ± 1. Quindi

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = 1 \qquad \liminf_{n\to+\infty} a_n = -1 \ .$$

2) La classe limite della successione $\{a_n\}$ definita come

$$0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, 6, 0, 7, ...$$

è costituita da $\lambda = 0$ e $\lambda = +\infty$. Quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\sup a_n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty}\inf a_n = 0\ .$$

3) La classe limite della successione

$$1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...$$

è costituita da tutti gli interi naturali. Quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\sup a_n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty}\inf a_n = 1\ .$$

4) Sia $\{a_n\}$ una successione regolare, convergente o divergente.Poiché ogni sottosuccessione è anch'essa regolare, convergente allo stesso limite o divergente con lo stesso segno rispettivamente, la classe limite è costituita da un solo elemento, il limite della successione. Ne segue che il limite superiore e il limite inferiore coincidono e sono uguali al limite.

5) L'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è un insieme numerabile e quindi può essere elencato in una successione $\{q_n\}_{n\geq 1}$. Si può verificare che la classe limite di $\{q_n\}_{n\geq 1}$ è tutto $\overline{R}$.

Dalla definizione di limite superiore e inferiore seguono immediatamente le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\inf a_n &\leq \lim_{n\to+\infty}\sup a_n \\
\lim_{n\to+\infty}\inf (-a_n) &= -\lim_{n\to+\infty}\sup a_n \\
\lim_{n\to+\infty}\sup (-a_n) &= -\lim_{n\to+\infty}\inf a_n
\end{aligned}$$

Inoltre, poiché il limite inferiore l e il limite superiore L sono elementi della classe limite, essi sono in particolare limiti di opportune sottosuccessioni estratte dalla successione.

Vale anche il seguente teorema:

TEOREMA Se

$$\lim_{n\to+\infty}\sup a_n = L \in \mathbf{R}\ ,$$

allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tale che

$$a_n < L + \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geq n_0.$$

Se

$$\lim_{n\to+\infty}\inf a_n = l \in \mathbf{R}\ ,$$

allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_1 = n_1(\varepsilon)$ tale che

$$a_n > l - \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geq n_1.$$

Dim. Dimostriamo la tesi relativa al limite superiore. Ragioniamo per assurdo: esiste $\varepsilon^* > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$ esiste almeno un $m > n$ tale che $a_m \geq L + \varepsilon^*$.

Preso $n = 1$, sia n_1 l'intero m corrispondente. Preso n_1, sia n_2 l'intero m corrispondente a n_1, e iteriamo il procedimento. in questo modo costruiamo una sottosuccessione della successione data tale che

$$a_{n_k} \geq L + \varepsilon^* \qquad \text{per ogni } k.$$

Se $\{a_{n_k}\}_k$ è limitata, per il teorema di Bolzano-Weierstrass è possibile estrarre una sua sottosuccessione convergente; ma questa è in particolare una sottosuccessione di $\{a_n\}_n$ e il suo limite, sia α, soddisfa necessariamente la disuguaglianza

$$\alpha \geq L + \varepsilon^* \ .$$

siamo giunti ad un assurdo, poiché $\alpha \in \Lambda$ e $\alpha > L = \max \Lambda$.

Se $\{a_{n_k}\}_k$ è non limitata superiormente, allora esiste una sottosuccessione divergente a $+\infty$ e ancora siamo giunti ad un assurdo, poiché $+\infty$ sarebbe un valore limite.

La tesi relativa al limite inferiore si dimostra in modo del tutto analogo.
▲

COROLLARIO Sia $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una successione di numeri reali. Allora

$$\lim \inf_{n\to+\infty} a_n = \lim \sup_{n\to+\infty} a_n \qquad (*)$$

se e solo se $\{a_n\}_{n\geq 1}$ è regolare.

Dim. Se la successione è regolare, abbiamo visto (esempio 3) che la classe limite contiene un solo elemento e quindi il minimo e il massimo di Λ coincidono.

Viceversa supponiamo che valga la $(*)$: allora $\Lambda = \{\alpha\}$ con $\alpha \in \overline{R}$. Se $\alpha \in \mathbf{R}$, allora per il teorema precedente si ha che per ogni $\varepsilon > 0$

$$\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon \qquad \text{definitivamente}$$

cioè

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha.$$

Se $\alpha = +\infty$, dimostriamo che $\{a_n\}_{n\geq 1}$ diverge a $+\infty$, cioè che per ogni $M > 0$ esiste n_0 tale che per ogni $n \geq n_0$ si ha $a_n > M$. Ragioniamo per assurdo: esiste $M^* > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$ esiste $m > n$ tale che $a_m \leq M^*$. Posto $n = 1$, denotiamo con n_1 l'intero m corrispondente; posto $n = n_1$ denotiamo con n_1 l'intero corrispondente e iteriamo così il procedimento. Otteniamo una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}_{k\geq 1}$ tale che

$$a_{n_k} \leq M^* \qquad \text{per ogni } k$$

cioè una sottosuccessione limitata superiormente; essa è anche limitata inferiormente (altrimenti la classe limite conterrebbe anche $-\infty$) e quindi per il teorema di Bolzano-Weierstrass ha una sottosuccessione convergente; sia a^*

il suo limite. Siamo giunti ad un assurdo, poiché a^* dovrebbe appartenere a Λ.

La dimostrazione che se $\alpha = -\infty$ allora $\{a_n\}_{n\geq 1}$ diverge a $-\infty$ è del tutto analoga.▲

I concetti di,limite superiore e inferiore di una successione di numeri reali possono essere introdotti anche in un modo differente; presentiamo qui il procedimento e enunciamo il relativo risultato.

Sia $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbf{R}$; per ogni $n \geq 1$ poniamo

$$\begin{aligned} b_n &:= \inf_{k\geq n} a_k = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ...\} \\ c_n &:= \sup_{k\geq n} a_k = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ...\} \ . \end{aligned}$$

Osserviamo che le successioni $\{b_n\}_{n\geq 1}$ e $\{c_n\}_{n\geq 1}$ sono in generale successioni in $\overline{R}$ e non in $\mathbf{R}$: infatti, se $\{a_n\}_{n\geq 1}$ è non limitata inferiormente, $b_n = -\infty$ per ogni n e, se $\{a_n\}_{n\geq 1}$ è non limitata superiormente, $c_n = +\infty$ per ogni n. Se però $\{a_n\}_{n\geq 1}$ è una successione limitata, allora $\{b_n\}_{n\geq 1}$ e $\{c_n\}_{n\geq 1}$ sono successioni di numeri reali e in particolare risultano essere successioni monotone: infatti per ogni n si ha

$$b_n \leq b_{n+1} \qquad\qquad c_n \geq c_{n+1} \ ,$$

cioè $\{b_n\}_{n\geq 1}$ è monotona crescente e $\{c_n\}_{n\geq 1}$ è monotona decrescente. Esse sono quindi regolari e

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \sup_{n\geq 1} b_n \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} c_n = \inf_{n\geq 1} c_n.$$

Comunque sia la successione $\{a_n\}_{n\geq 1}$, possiamo considerare

$$\sup_{n\geq 1}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right) \qquad\qquad \inf_{n\geq 1}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right) \ .$$

TEOREMA Sia $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbf{R}$. Allora

$$\begin{aligned} \lim\inf_{n\to+\infty} a_n &= \sup_{n\geq 1}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right) \\ \lim\sup_{n\to+\infty} a_n &= \inf_{n\geq 1}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right). \end{aligned}$$