

Lezioni di Analisi Matematica 3

corso di Laurea in Fisica

a.a. 2005-'06

G. Molteni

M. Vignati

VERSIONE PRELIMINARE 26.9.05

CAPITOLO 9

Integrazione su varietà: curve e superfici

9.1. Caso generale

Ricordiamo che una varietà regolare di dimensione m è una classe di equivalenza $[\Phi]$ secondo la relazione \sim individuata da una prevarietà Φ , dove per prevarietà intendiamo una mappa $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $m \leq n$, D un dominio-connesso, che è continua, biunivoca, di classe \mathcal{C}^1 in un aperto contenente D e con $J\Phi$ di rango m in ogni punto di D° .

Def. 9.1 Sia data una varietà regolare individuata da $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e ne sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ il sostegno. Sia f una funzione definita in V ed a valori reali. Diciamo che f è *misurabile* in V se la funzione $f \circ \Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ è misurabile.

Osserviamo che è corretto affermare, come si fa nella definizione precedente, che la misurabilità di f è una proprietà intrinseca alla varietà individuata da Φ . Infatti, se prendiamo una seconda prevarietà $\tilde{\Phi}$ equivalente a Φ allora per definizione di \sim -equivalenza esiste un cambiamento ammissibile di variabile ψ tale che $\tilde{\Phi} = \Phi \circ \psi$ e poiché ψ è un diffeomorfismo esso manda insiemi misurabili in insiemi misurabili (segue dal Teo. 7.5 e dal fatto che un diffeomorfismo è necessariamente un'applicazione lipschitziana) e quindi $f \circ \tilde{\Phi}$ risulta misurabile se e solo se $f \circ \tilde{\Phi} = (f \circ \Phi) \circ \psi$ è misurabile.

Def. 9.2 Sia data dunque una varietà regolare individuata da $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ di sostegno $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Sia f una funzione definita in V , a valori reali e misurabile in V . Diciamo che f è *Lebesgue-integrabile* in V se accade che

$$(9.1) \quad \int_D |(f \circ \Phi)(\mathbf{x})| \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} [\det(J\Phi)_{j_1, \dots, j_m}(\mathbf{x})]^2 \right)^{1/2} d\mathbf{x} < +\infty,$$

e quando ciò accade poniamo

$$\int_V f d\mu_V := \int_D (f \circ \Phi)(\mathbf{x}) \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} [\det(J\Phi)_{j_1, \dots, j_m}(\mathbf{x})]^2 \right)^{1/2} d\mathbf{x}.$$

Alcune spiegazioni riguardo i vari termini che appaiono in questa formula sono certamente doverose.

- nella formula precedente $d\mathbf{x}$ indica la consueta misura di Lebesgue sullo spazio \mathbb{R}^m al quale D appartiene.
- D è per definizione un dominio-connesso, quindi è chiuso ed in quanto boreliano è sicuramente Lebesgue-misurabile.
- il simbolo $(J\Phi)_{j_1, \dots, j_m}(\mathbf{x})$ indica la matrice di ordine $m \times m$ ottenuta prendendo le righe di posto j_1, j_2 fino a j_m nella matrice $(J\Phi)(\mathbf{x})$, che invece è di tipo $n \times m$.
- La somma $\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n}$ è fatta su tutte le possibili scelte di indici che soddisfano quelle richieste.
- Ogni elemento della matrice $J\Phi$ è una funzione continua perché per ipotesi Φ è di classe \mathcal{C}^1 , quindi anche il determinante di ogni matrice $(J\Phi)_{j_1, \dots, j_m}$ è continuo.
- Dall'osservazione precedente e dal fatto che per ipotesi $f \circ \Phi$ è Lebesgue-misurabile segue che l'integranda in (9.1) è Lebesgue-misurabile.
- Quando il sostegno V coincide con un dominio di \mathbb{R}^m , la nozione di integrale che abbiamo dato coincide con quella usuale poiché in tal caso Φ è l'identità quindi $n = m$, $J\Phi$ è la matrice identità e D coincide con V .

Una volta chiarita dunque la definizione, occorre mostrare che si tratta di una 'buona' definizione, nel senso che, come là affermato, esso dipende effettivamente solo dalla varietà definita dalla mappa Φ , ovvero che essa fornisce sempre il medesimo risultato quando Φ varia all'interno della propria classe di \sim equivalenza.

Proposizione 9.1 *Sia $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una prevarietà regolare di sostegno V . Sia $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Sia $\psi : A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un cambiamento ammissibile di variabile tale che $D \subseteq \psi(A)$. Allora*

$$\begin{aligned} & \int_D |(f \circ \Phi)(\mathbf{x})| \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} [\det(J\Phi)_{j_1, \dots, j_m}(\mathbf{x})]^2 \right)^{1/2} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\psi^{-1}(D)} |(f \circ (\Phi \circ \psi))(\mathbf{y})| \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} [\det(J(\Phi \circ \psi))_{j_1, \dots, j_m}(\mathbf{y})]^2 \right)^{1/2} d\mathbf{y}, \end{aligned}$$

dove l'uguaglianza è da intendersi tra elementi di $\overline{\mathbb{R}^+}$. Ne segue che l'integrabilità di f ed il valore di $\int_V f d\mu_V$ dipendono solo dalla varietà cui Φ appartiene.

Dim. Anzitutto osserviamo che se F ed M sono matrici $n \times m$ e $m \times m$, rispettivamente, allora per ogni scelta di indici j_1, \dots, j_m vale l'identità

$$(FM)_{j_1, \dots, j_m} = F_{j_1, \dots, j_m} M,$$

di conseguenza dalla moltiplicatività del determinante (formula di Binet) segue che

$$\det[(FM)_{j_1, \dots, j_m}] = \det[F_{j_1, \dots, j_m}] \det[M].$$

Possiamo ora dimostrare la tesi. Infatti ponendo $\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{y})$ abbiamo

$$\begin{aligned} & \int_D |(f \circ \Phi)(\mathbf{x})| \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} [\det(J\Phi)_{j_1, \dots, j_m}(\mathbf{x})]^2 \right)^{1/2} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\boldsymbol{\psi}^{-1}(D)} |(f \circ \Phi)(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}))| \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} [\det(J\Phi)_{j_1, \dots, j_m}|\boldsymbol{\psi}(\mathbf{y})]^2 \right)^{1/2} d(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{y})). \end{aligned}$$

Dalla formula per il cambiamento di variabile segue che l'integrale precedente è

$$\begin{aligned} &= \int_{\boldsymbol{\psi}^{-1}(D)} |(f \circ \Phi)(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}))| \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} [\det(J\Phi)_{j_1, \dots, j_m}|\boldsymbol{\psi}(\mathbf{y})]^2 \right)^{1/2} |\det(J\boldsymbol{\psi})(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \\ &= \int_{\boldsymbol{\psi}^{-1}(D)} |(f \circ \Phi)(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}))| \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} [\det(J\Phi)_{j_1, \dots, j_m}|\boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}) \det(J\boldsymbol{\psi})|_{\mathbf{y}}]^2 \right)^{1/2} d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Usiamo ora quanto osservato in precedenza e la formula di derivazione di una funzione composta per funzioni di più variabili, ovvero l'identità $J(\Phi \circ \boldsymbol{\psi})(\mathbf{y}) = J\Phi|_{\boldsymbol{\psi}(\mathbf{y})} J\boldsymbol{\psi}|_{\mathbf{y}}$. Otteniamo così che

$$= \int_{\boldsymbol{\psi}^{-1}(D)} |(f \circ (\Phi \circ \boldsymbol{\psi}))(\mathbf{y})| \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} [\det(J(\Phi \circ \boldsymbol{\psi}))_{j_1, \dots, j_m}(\mathbf{y})]^2 \right)^{1/2} d\mathbf{y}$$

che è la tesi. ■

Def. 9.3 Data la definizione precedente, indicheremo con $d\mu_V$ la misura rispetto alla quale calcoliamo gli integrali in V , cioè

$$d\mu_V := \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} [\det(J\Phi)_{j_1, \dots, j_m}(\mathbf{x})]^2 \right)^{1/2} d\mathbf{x}.$$

Talvolta ci riferiremo a questa misura come alla *misura elementare su V* . Chiamiamo *misura della varietà* il valore dell'integrale $\int_V 1 d\mu_V$, finito o infinito che sia.

9.2. Curve e superfici

D'ora in poi specializziamo quanto introdotto nella sezione precedente ai casi delle curve (in \mathbb{R}^n) e delle superfici (in \mathbb{R}^3).

Def. 9.4 Una *curva* γ in \mathbb{R}^n è l'immagine di una funzione continua $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. La curva è detta *regolare* quando Φ è di classe $\mathcal{C}^1([a, b])$ e $\Phi'(t) \neq \mathbf{0}$ per ogni $t \in (a, b)$, ovvero, quando è il sostegno di una prevarietà Φ regolare di dimensione uno.

Def. 9.5 Una *superficie* S in \mathbb{R}^3 è l'immagine di una funzione continua $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ dove D è un dominio-connesso di \mathbb{R}^2 . La superficie è detta *regolare* quando Φ è di classe $\mathcal{C}^1(D)$ e $\text{Rank } J\Phi = 2$ in ogni punto di D° , ovvero, quando è il sostegno di una prevarietà regolare Φ di dimensione due in \mathbb{R}^3 .

Nei due casi appena introdotti la nozione di misura elementare data nella Def. 9.3 si semplifica notevolmente.

- Per le curve regolari (caso $m = 1$) la misura elementare è spesso indicata anche col simbolo ds e si ha:

$$ds := d\mu_V = \left(\sum_{j=1}^n \left[\frac{d\Phi_j}{dt}(t) \right]^2 \right)^{1/2} dt = \left\| \frac{d\Phi}{dt}(t) \right\| dt$$

dove Φ_j sono le componenti del vettore Φ . In questo caso la misura della curva, ovvero $\int_\gamma ds$, è anche detta *lunghezza* di γ .

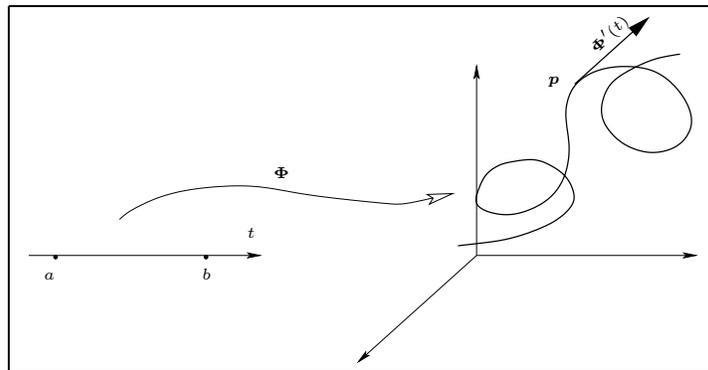


FIGURA 9.1: $ds = \left\| \frac{d\Phi}{dt}(t) \right\| dt$.

- Per le superfici regolari (caso $m = 2$) la misura elementare è spesso indicata anche col simbolo $d\sigma$ e si ha:

$$\begin{aligned} d\sigma &:= d\mu_V = \left((\partial_u\Phi_2\partial_v\Phi_3 - \partial_v\Phi_2\partial_u\Phi_3)^2 + (\partial_v\Phi_1\partial_u\Phi_3 - \partial_u\Phi_1\partial_v\Phi_3)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (\partial_u\Phi_2\partial_v\Phi_1 - \partial_v\Phi_2\partial_u\Phi_1)^2 \right)^{1/2} dudv \\ &= \|\partial_u\Phi \wedge \partial_v\Phi\| dudv, \end{aligned}$$

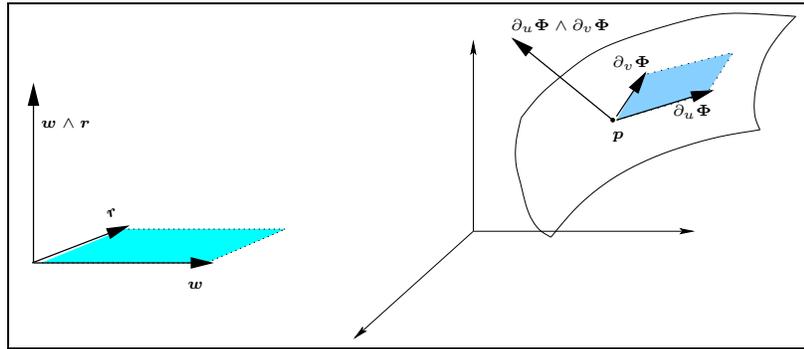
dove $\partial_u\Phi$ e $\partial_v\Phi$ sono i due vettori di \mathbb{R}^3 (quindi vettori colonna) che accostati compongono $J\Phi$ e $\partial_u\Phi \wedge \partial_v\Phi$ ne indica il prodotto vettore. Ricordiamo che per definizione il prodotto vettore di $\partial_u\Phi$ e $\partial_v\Phi$ è quel vettore le cui componenti lungo i versori e_1, e_2, e_3 sono calcolate a partire da quelle di $\partial_u\Phi$ e $\partial_v\Phi$ tramite la regola formale del ‘falso determinante’:

$$\partial_u\Phi \wedge \partial_v\Phi = \begin{vmatrix} e_1 & \partial_u\Phi_1 & \partial_v\Phi_1 \\ e_2 & \partial_u\Phi_2 & \partial_v\Phi_2 \\ e_3 & \partial_u\Phi_3 & \partial_v\Phi_3 \end{vmatrix}.$$

In questo caso la misura della superficie, ovvero $\int_S d\sigma$, è anche detta *area* di S .

Si osservi come la formula per la misura su curve sia particolarmente intuitiva quando espressa nella forma $ds = \left\| \frac{d\Phi}{dt}(t) \right\| dt$; il vettore $d\Phi/dt$, infatti, è un vettore appartenente allo spazio tangente e $\|d\Phi/dt\|$ ne è la lunghezza.

Anche la formula del $d\sigma$ ha una facile interpretazione che è utile tener presente. Supponiamo infatti che siano assegnati due vettori \mathbf{w} e \mathbf{r} di \mathbb{R}^3 . A meno di fare una rotazione del sistema di riferimento possiamo sempre supporre che tali vettori siano contenuti nel piano xOy . Il loro prodotto vettore $\mathbf{w} \wedge \mathbf{r}$ (quando descritto in termini intrinseci, senza fare appello alle coordinate) è allora un vettore parallelo all’asse z , diretto secondo ‘la regola della mano destra’, la cui lunghezza è pari $\|\mathbf{w}\| \cdot \|\mathbf{r}\| \sin \alpha$ dove α è l’angolo compreso tra \mathbf{w} e \mathbf{r} . Si osservi che $\|\mathbf{w}\| \cdot \|\mathbf{r}\| \sin \alpha$ è proprio l’area del parallelogramma delimitato da \mathbf{w} e \mathbf{r} . Nella definizione di $d\sigma$, quindi, è un po’ come se si usassero i vettori $\partial_u\Phi$ e $\partial_v\Phi$ del piano tangente per individuare un rettangolo, sempre nel piano tangente, di area $\|\partial_u\Phi \wedge \partial_v\Phi\|$.

FIGURA 9.2: $d\sigma = \|\partial_u \Phi \wedge \partial_v \Phi\| dudv$.

Osserviamo che in alcuni casi speciali le formule precedenti assumono una forma che è bene tenere presente. Questi sono:

- La varietà è il grafico di una funzione $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ di classe \mathcal{C}^1 . Allora la parametrizzazione $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è della forma $\Phi(t) = (t, \phi(t))^T$ e quindi

$$ds := d\mu_V = [1 + \|\phi'(t)\|^2]^{1/2} dt.$$

- La varietà è il grafico di una funzione $\phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe \mathcal{C}^1 . Allora la parametrizzazione $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è della forma $\Phi(u, v) = (u, v, \phi(u, v))^T$ e quindi

$$d\sigma := d\mu_V = [1 + (\partial_u \phi)^2 + (\partial_v \phi)^2]^{1/2} dudv.$$

Esempio 9.1 Calcolare la lunghezza della curva γ con parametrizzazione $\Phi(t) = (t, t^2/2)^T$ e $t \in [0, 1]$.

La misura in γ è

$$d\mu_\gamma = ds = \|\Phi'(t)\| dt = \sqrt{1 + t^2} dt,$$

quindi

$$l(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_0^1 \sqrt{1 + t^2} dt,$$

poniamo $t = \sinh u$, da cui

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\text{settsinh } 1} \cosh^2 u du = \frac{1}{2} [\sinh u \cosh u + u] \Big|_0^{\text{settsinh } 1} \\ &= \frac{1}{2} [\sqrt{2} + \text{settsinh } 1] = \frac{1}{2} [\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})]. \end{aligned}$$

■

Esempio 9.2 Calcolare la lunghezza della curva γ il cui sostegno è la stella $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

La curva è costituita da quattro bracci, uno per ciascun quadrante, ciascuno dei quali è una curva regolare. I bracci hanno evidentemente la medesima lunghezza. Possiamo parametrizzare il braccio $\tilde{\gamma}$ con $x, y > 0$ nel seguente modo: $\Phi(\vartheta) = (\cos^3 \vartheta, \sin^3 \vartheta)^T$ con $\vartheta \in [0, \pi/2]$. La misura in $\tilde{\gamma}$ è

$$d\mu_{\tilde{\gamma}} = ds = \|\Phi'(\vartheta)\| d\vartheta = \sqrt{(-3\cos^2 \vartheta \sin \vartheta)^2 + (3\cos \vartheta \sin^2 \vartheta)^2} d\vartheta = \frac{3}{2} \sin 2\vartheta d\vartheta,$$

quindi

$$l(\gamma) = 4 \int_{\tilde{\gamma}} ds = \frac{3 \cdot 4}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\vartheta d\vartheta = 6.$$

■

Esempio 9.3 Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, calcolare la lunghezza della curva γ_n il cui sostegno è la stella $|x|^{2/n} + |y|^{2/n} = 1$. Qual è il valore $\lim_{n \rightarrow \infty} l(\gamma_n)$? Il risultato è in qualche modo prevedibile?

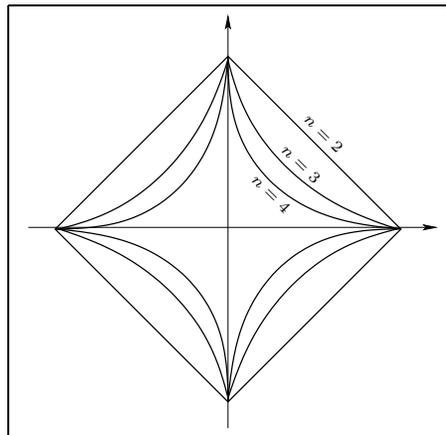


FIGURA 9.3: $|x|^{2/n} + |y|^{2/n} = 1$.

Come suggerito dall'esempio precedente, scomponiamo la curva nei suoi quattro bracci regolari corrispondenti ai vari quadranti. Sia $\tilde{\gamma}_n$ il braccio contenuto nel quadrante $x, y > 0$ che parametrizziamo tramite la funzione $\Phi_n(\vartheta) = (\cos^n \vartheta, \sin^n \vartheta)^T$

con $\vartheta \in [0, \pi/2]$. La misura in $\tilde{\gamma}_n$ è

$$\begin{aligned} d\mu_{\tilde{\gamma}_n} &= ds = \|\Phi'_n(\vartheta)\| d\vartheta = \sqrt{(-n \cos^{n-1} \vartheta \sin \vartheta)^2 + (n \cos \vartheta \sin^{n-1} \vartheta)^2} d\vartheta \\ &= n \sin \vartheta \cos \vartheta \sqrt{\cos^{2n-4} \vartheta + \sin^{2n-4} \vartheta} d\vartheta, \end{aligned}$$

quindi

$$l(\gamma_n) = 4 \int_{\tilde{\gamma}_n} ds = 4n \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \cos \vartheta \sqrt{\cos^{2n-4} \vartheta + \sin^{2n-4} \vartheta} d\vartheta$$

che con la sostituzione $\cos^2 \vartheta = v$ diventa

$$= 2n \int_0^1 \sqrt{v^{n-2} + (1-v)^{n-2}} dv = 4n \int_0^{1/2} \sqrt{v^{n-2} + (1-v)^{n-2}} dv.$$

I casi $n = 2$ (primitiva della radice di una costante) ed $n = 3$ (primitiva della radice di un polinomio di primo grado) sono semplici. Il caso $n = 4$ (primitiva di un polinomio di secondo grado) può essere calcolato utilizzando le funzioni iperboliche (o integrazione per parti), ottenendo:

$$\begin{cases} l(\gamma_2) = 4\sqrt{2}, \\ l(\gamma_3) = 6, \\ l(\gamma_4) = \frac{4}{\sqrt{2}}[\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})]. \end{cases}$$

Purtroppo non è possibile calcolare esplicitamente il valore dell'integrale per nessun $n > 4$ perché l'integranda in tali casi è la radice di un polinomio di grado maggiore di 2 ed è noto che la sua primitiva non è esprimibile in termini delle cosiddette 'funzioni elementari' (cioè di x^α , $\sin x$, $\cos x$, $\exp x$ e loro combinazioni algebriche). Ciononostante possiamo calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} l(\gamma_n)$ adottando un punto di vista geometrico: al crescere di n le stelle γ_n sono inscatolate e tendono alla stella degenera costituita dai soli quattro bracci $\{(x, 0) : |x| \leq 1\} \cup \{(0, y) : |y| \leq 1\}$ la cui lunghezza è 8 (ogni braccio è percorso due volte). È allora abbastanza chiaro che deve essere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l(\gamma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4n \int_0^{1/2} \sqrt{v^{n-2} + (1-v)^{n-2}} dv = 8.$$

Una dimostrazione che non faccia appello all'interpretazione geometrica ma utilizzi solo strumenti analitici è la seguente: possiamo ottenere una maggiorazione

osservando che $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ quando $a, b \geq 0$ e quindi

$$\begin{aligned} l(\gamma_n) &= 4n \int_0^{1/2} \sqrt{v^{n-2} + (1-v)^{n-2}} dv \\ &\leq 4n \int_0^{1/2} v^{n/2-1} + (1-v)^{n/2-1} dv = 4n \left[\frac{2}{n} \cdot \frac{1}{2^{n/2}} + \frac{2}{n} \left(1 - \frac{1}{2^{n/2}}\right) \right] = 8. \end{aligned}$$

Mentre una minorazione è possibile ad esempio nel seguente modo:

$$\begin{aligned} l(\gamma_n) &= 4n \int_0^{1/2} \sqrt{v^{n-2} + (1-v)^{n-2}} dv \geq 4n \int_0^{1/\sqrt{n}} (1-v)^{n/2-1} dv \\ &= 8 \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n/2} \right] = 8 \left[1 - e^{\frac{n}{2} \log\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \right] \rightarrow 8. \end{aligned}$$

Dal teorema del confronto dei limiti segue che $l(\gamma_n) \rightarrow 8$. ■

Esempio 9.4 Calcolare la lunghezza della curva γ che in coordinate polari è parametrizzata da $\rho = \sin^2 \vartheta$ con $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

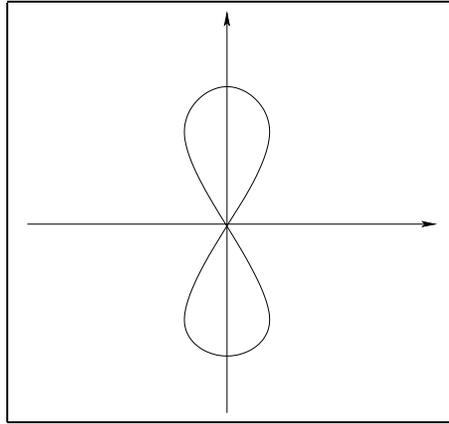


FIGURA 9.4: $\rho = \sin^2 \vartheta$.

La parametrizzazione data lega le coordinate polari mentre le formule che consentono di determinare la lunghezza di una curva sono in coordinate cartesiane. Dato che il legame tra polari e cartesiane è $x = \rho \cos \vartheta$, $y = \rho \sin \vartheta$, in coordinate cartesiane la curva data è parametrizzata da $\Phi(\vartheta) = (\sin^2 \vartheta \cos \vartheta, \sin^3 \vartheta)^T$. La misura in γ è quindi

$$\begin{aligned} d\mu_\gamma &= ds = \|\Phi'(\vartheta)\| d\vartheta = \sqrt{(2 \sin \vartheta \cos^2 \vartheta - \sin^3 \vartheta)^2 + (3 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta)^2} d\vartheta \\ &= |\sin \vartheta| \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta} d\vartheta. \end{aligned}$$

Si osservi che per $\vartheta = \pi$ l'elemento di lunghezza si annulla: questo mostra che la curva in realtà non è regolare ed infatti in $\vartheta = \pi$ essa presenta un'auto-intersezione (vedasi Fig. 9.4), contraddicendo quindi l'ipotesi secondo cui per essere una prevarietà regolare la mappa deve essere biunivoca nella parte aperta del suo dominio, in questo caso in $(0, 2\pi)$. Ciononostante la curva data è unione di due curve regolari corrispondenti ai domini $\vartheta \in [0, \pi]$ e $\vartheta \in [\pi, 2\pi]$ per le quali la misura è comunque quella trovata in precedenza, di conseguenza la lunghezza della curva è data dal seguente integrale:

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_{\gamma} ds = \int_0^{2\pi} |\sin \vartheta| \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta} d\vartheta \\ &= 2 \int_0^{\pi} \sin \vartheta \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta} d\vartheta = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 3t^2} dt \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} [2\sqrt{3} + \operatorname{settsinh} \sqrt{3}] = 4 + \frac{2}{\sqrt{3}} \log(2 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

■

Esempio 9.5 Calcolare la lunghezza della spirale lineare $\rho = \vartheta$ con $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

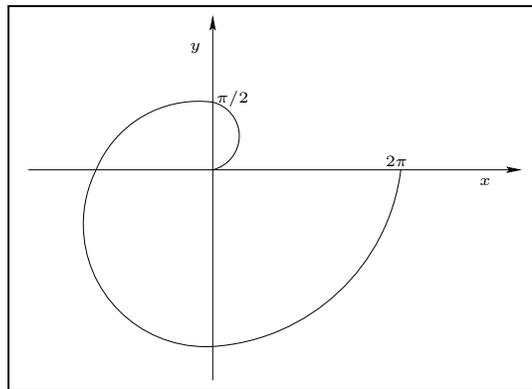


FIGURA 9.5: $\rho = \vartheta$.

La curva è data in coordinate polari ma per poter applicare le definizioni abbiamo bisogno della sua parametrizzazione in coordinate cartesiane. Dato che il legame tra le polari e le cartesiane è $x = \rho \cos \vartheta$, $y = \rho \sin \vartheta$, in tali coordinate la curva è

parametrizzata da $\Phi(\vartheta) = (\vartheta \cos \vartheta, \vartheta \sin \vartheta)^T$ e quindi la misura in γ è

$$\begin{aligned} d\mu_\gamma &= ds = \|\Phi'(\vartheta)\| d\vartheta \\ &= \sqrt{(\cos \vartheta - \vartheta \sin \vartheta)^2 + (\sin \vartheta + \vartheta \cos \vartheta)^2} d\vartheta \\ &= \sqrt{1 + \vartheta^2} d\vartheta, \end{aligned}$$

così la lunghezza della curva è pari a:

$$l(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \vartheta^2} d\vartheta = \frac{1}{2} [2\pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \text{settsinh}(2\pi)].$$

■

Esempio 9.6 Calcolare l'area della sfera di raggio 1 in \mathbb{R}^3 .

Parametrizziamo la sfera tramite le coordinate polari:

$$\Phi : D = [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(\vartheta, \varphi) := \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Lo Jacobiano di Φ è

$$J\Phi = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \sin \varphi & \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \cos \varphi & -\sin \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta & 0 \end{pmatrix} =: [\partial_\vartheta \Phi : \partial_\varphi \Phi],$$

quindi

$$\begin{aligned} d\mu_V &=: d\sigma = \|\partial_\vartheta \Phi \wedge \partial_\varphi \Phi\| d\vartheta d\varphi \\ &= [(-\sin^2 \vartheta \sin \varphi)^2 + (-\sin^2 \vartheta \cos \varphi)^2 + \\ &\quad + (-\sin \vartheta \cos \vartheta \sin^2 \varphi - \sin \vartheta \cos \vartheta \cos^2 \varphi)^2]^{1/2} d\vartheta d\varphi \\ &= \sqrt{\sin^4 \vartheta + \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta} d\vartheta d\varphi = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\text{Area}(V) = \int_V d\sigma = \int_D \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = 4\pi.$$

■

Esempio 9.7 Calcolare la misura di S^3 (ricordiamo che con tale simbolo si intende la sfera di raggio 1 in \mathbb{R}^4).

Parametizziamo la sfera tramite le coordinate polari:

$$\Phi : D = [0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) := \begin{pmatrix} \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \\ \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 \\ \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \\ \cos \vartheta_1 \end{pmatrix}.$$

lo Jacobiano di Φ è

$$J\Phi = \begin{pmatrix} \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 & \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3 & \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 \\ \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 & \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_3 & -\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \\ \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 & -\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 & 0 \\ -\sin \vartheta_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi in base alla definizione di misura $d\mu_{S^3}$ abbiamo che

$$\begin{aligned} d\mu_{S^3} &= \\ & \left[\begin{array}{ccc} \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 & \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_3 & -\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \\ \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 & -\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 & 0 \\ -\sin \vartheta_1 & 0 & 0 \end{array} \right]^2 \\ & + \left[\begin{array}{ccc} \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 & \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3 & \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 \\ \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 & -\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 & 0 \\ -\sin \vartheta_1 & 0 & 0 \end{array} \right]^2 \\ & + \left[\begin{array}{ccc} \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 & \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3 & \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 \\ \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 & \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_3 & -\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \\ -\sin \vartheta_1 & 0 & 0 \end{array} \right]^2 \\ & + \left[\begin{array}{ccc} \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 & \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3 & \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 \\ \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 & \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_3 & -\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \\ \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 & -\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 & 0 \end{array} \right]^2 \Bigg]^{1/2} d\vartheta_1 d\vartheta_2 d\vartheta_3 \\ & = \sin^2 \vartheta_1 \sin \vartheta_2 d\vartheta_1 d\vartheta_2 d\vartheta_3. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}\mu_{S^3}(S^3) &= \int_V d\mu_V = \int_D \sin^2 \vartheta_1 \sin \vartheta_2 d\vartheta_1 d\vartheta_2 d\vartheta_3 \\ &= \int_0^\pi \sin^2 \vartheta_1 d\vartheta_1 \int_0^\pi \sin \vartheta_2 d\vartheta_2 \int_0^{2\pi} d\vartheta_3 \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot 2\pi = 2\pi^2.\end{aligned}$$

■

Esempio 9.8 Calcolare la misura della sfera S^n (la sfera di raggio 1 in \mathbb{R}^{n+1}).

Si tratta di un interessante problema che è indubbiamente complesso, almeno se affrontato coi mezzi tutto sommato ancora abbastanza ‘rozzi’ di cui disponiamo. È tuttavia fattibile e può essere un utile esempio. La parametrizzazione è

$$\Phi : D = [0, \pi]^{n-1} \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$

$$\Phi(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-1}, \vartheta_n) := \begin{pmatrix} \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cdots \sin \vartheta_{n-1} \sin \vartheta_n \\ \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cdots \sin \vartheta_{n-1} \cos \vartheta_n \\ \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cdots \cos \vartheta_{n-1} \\ \dots \\ \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \\ \cos \vartheta_1 \end{pmatrix}.$$

Come suggerito dai casi $n = 1, 2, 3$ già analizzati in precedenza, dopo un lungo conto (diretto o per induzione), si trova che

$$d\mu_{S^n} = \sin^{n-1} \vartheta_1 \sin^{n-2} \vartheta_2 \sin^{n-3} \vartheta_3 \dots \sin \vartheta_{n-1} d\vartheta_1 d\vartheta_2 \dots d\vartheta_n,$$

quindi la misura di S^n è

$$\mu_{S^n}(S^n) = \int_{S^n} d\mu_{S^n} = \int_D \sin^{n-1} \vartheta_1 \sin^{n-2} \vartheta_2 \sin^{n-3} \vartheta_3 \dots \sin \vartheta_{n-1} d\vartheta_1 d\vartheta_2 \dots d\vartheta_n$$

che per il teorema di Fubini può anche essere scritto come

$$= \mu_{S^{n-1}}(S^{n-1}) \cdot \int_0^\pi \sin^{n-1} \vartheta_1 d\vartheta_1.$$

L’ultima formula consente di calcolare la misura di S^n a partire da quella di S^{n-1} , a patto di calcolare l’integrale di $\sin^{n-1} \vartheta_1$. Vi sono vari modi per calcolare il valore di questo integrale, il più rapido è il seguente.

Anzitutto calcoliamo $\int_0^\pi \sin^m \vartheta d\vartheta$ per ogni m , otterremo poi per specializzazione al caso $m = n - 1$ l’integrale di nostro interesse. Osserviamo che $\int_0^\pi \sin^m \vartheta d\vartheta = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^m \vartheta d\vartheta$. Supponiamo $m \geq 2$, altrimenti l’integrale è immediato. Integrando per parti abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin^m \vartheta \, d\vartheta &= \int_0^{\pi/2} \sin^{m-1} \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \\
&= -\sin^{m-1} \vartheta \cos \vartheta \Big|_0^{\pi/2} + (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} \vartheta \cos^2 \vartheta \, d\vartheta \\
&= (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} \vartheta (1 - \sin^2 \vartheta) \, d\vartheta \\
&= (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} \vartheta \, d\vartheta - (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin^m \vartheta \, d\vartheta
\end{aligned}$$

e quindi abbiamo trovato che:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m \vartheta \, d\vartheta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & m = 0, \\ 1 & m = 1, \\ \frac{m-1}{m} \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} \vartheta \, d\vartheta & m \geq 2. \end{cases}$$

L'ultima relazione consente di calcolare l'integrale di indice m ricorsivamente. Ricordando che per definizione il simbolo $m!! := m \cdot (m-2) \cdot (m-4) \cdots$ quando $m \geq 1$ mentre convenzionalmente $0!! := 1$ (quindi $5!! = 5 \cdot 3 \cdot 1$ e $6!! = 6 \cdot 4 \cdot 2$), abbiamo trovato che

$$\int_0^{\pi} \sin^m \vartheta \, d\vartheta = \begin{cases} \frac{(m-1)!!}{m!!} \pi & m \text{ pari}, \\ \frac{(m-1)!!}{m!!} 2 & m \text{ dispari}, \end{cases}$$

e quindi

$$\mu_{S^n}(S^n) = \begin{cases} 2\pi & n = 1, \\ \mu_{S^{n-1}}(S^{n-1}) \cdot \frac{(n-2)!!}{(n-1)!!} \pi & n \geq 3 \text{ e dispari}, \\ \mu_{S^{n-1}}(S^{n-1}) \cdot \frac{(n-2)!!}{(n-1)!!} 2 & n \text{ pari}, \end{cases}$$

che ricorsivamente consentono di calcolare $\mu_{S^n}(S^n)$ per ogni n . Dalle relazioni precedenti è anche possibile determinare una formula chiusa che può essere dimostrata facilmente per induzione:

$$\mu_{S^n}(S^n) = \frac{2^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor} \pi^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}}{(n-1)!!} \quad \forall n \geq 1.$$

Un'ultima curiosità: la successione precedente tende a 0 per $n \rightarrow \infty$ (il fattoriale diverge in modo più che esponenziale): raggiunge il suo massimo assoluto quando $n = 8$. ■

Esempio 9.9 (*Superfici di rivoluzione*). Supponiamo che nel piano xOz dello spazio \mathbb{R}^3 sia data una curva $x = f(z)$ con f di classe \mathcal{C}^1 sull'intervallo $[a, b]$ e a valori non negativi. Ruotando tale curva attorno all'asse z si genera una superficie detta appunto superficie di rivoluzione. Determinare l'area di tale superficie.

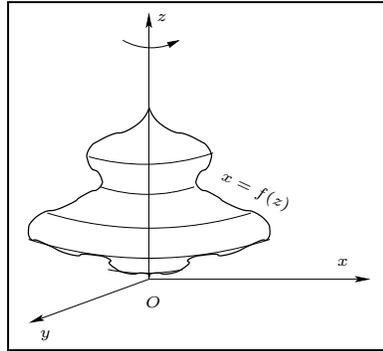


FIGURA 9.6: *superficie di rivoluzione.*

Data la simmetria del problema è sicuramente una buona idea utilizzare in \mathbb{R}^3 le coordinate cilindriche con generatrice lungo l'asse z , ovvero descrivere (x, y, z) in termini dei parametri (ρ, φ, u) tramite le relazioni:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = u, \quad \text{con } (\rho, \varphi, u) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}.$$

In queste coordinate la superficie è descritta da $\rho = f(u)$, quindi nelle coordinate cartesiane è

$$\Phi : [0, 2\pi] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z)^T = \Phi(\varphi, u) = (f(u) \cos \varphi, f(u) \sin \varphi, u)^T.$$

Lo jacobiano di questa mappa è

$$J\Phi = \begin{pmatrix} -f(u) \sin \varphi & f'(u) \cos \varphi \\ f(u) \cos \varphi & f'(u) \sin \varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: [\partial_\varphi \Phi : \partial_u \Phi],$$

quindi

$$\begin{aligned} d\mu_V =: d\sigma &= \|\partial_\varphi \Phi \wedge \partial_u \Phi\| d\varphi du = [(f(u) \cos \varphi)^2 + (f(u) \sin \varphi)^2 + \\ &+ (f(u)f'(u) \sin^2 \varphi + f(u)f'(u) \cos^2 \varphi)^2]^{1/2} d\varphi du \\ &= f(u) \sqrt{1 + f'(u)^2} d\varphi du. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \text{Area}(V) &= \int_V d\sigma = \int_D f(u) \sqrt{1 + f'(u)^2} d\varphi du \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b f(u) \sqrt{1 + f'(u)^2} du = 2\pi \int_a^b f(u) \sqrt{1 + f'(u)^2} du. \end{aligned}$$

Un'interpretazione interessante della formula precedente è la seguente: $2\pi f(u)$ è la lunghezza della circonferenza alla quota u attorno all'asse z , mentre $\sqrt{1 + f'(u)^2} du$ è l'elemento di lunghezza lungo la curva: il loro prodotto risulta essere l'elemento di area sulla superficie in esame. ■

Spesso si ha a che fare con insiemi che di per sé non sono sostegni di prevarietà e che tuttavia possono essere pensati come unione di prevarietà: ad esempio una linea spezzata o che presenti un punto angoloso nello spazio non è il sostegno di una prevarietà (nei punti angolosi la sua mappa di parametrizzazione, qualunque essa sia, non può essere di classe \mathcal{C}^1) e tuttavia è decomponibile come unione dei suoi segmenti che singolarmente presi sono invece sostegni di prevarietà. È importante che il calcolo integrale che andiamo definendo sia esteso in modo da comprendere anche questa situazione; ciò è fatto nel modo seguente: se V_1 e V_2 sono il sostegno di prevarietà regolari la cui intersezione ha misura nulla sia rispetto alla misura di V_1 che a quella di V_2 e se f è una funzione Lebesgue-integrabile sia in V_1 che in V_2 , allora si definisce

$$(9.2) \quad \int_{V_1 \cup V_2} f d\mu := \int_{V_1} f d\mu_{V_1} + \int_{V_2} f d\mu_{V_2}.$$

Oss. 9.1 Supponiamo che $V_1 \cup V_2$ sia una varietà regolare: questo non è sempre vero ma talvolta accade. In tal caso il termine di sinistra nella (9.2) ha già una sua definizione quindi la formula in tal caso esprime non una definizione di qualcosa che è privo di significato ma un'uguaglianza tra oggetti definiti altrove: tale uguaglianza è corretta? Se così non fosse allora dovremmo rinunciare alla definizione precedente, pena la non coerenza della teoria che stiamo costruendo. Fortunatamente si può dimostrare che l'uguaglianza (quando di uguaglianza si tratta) è sempre soddisfatta: la dimostrazione è però non semplice e preferiamo ometterla in queste lezioni.

La definizione precedente viene ulteriormente estesa nel seguente modo: siano V_1 e V_2 il sostegno di prevarietà regolari e siano $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, allora

$$(9.3) \quad \int_{a_1 V_1 + a_2 V_2} f d\mu := a_1 \int_{V_1} f d\mu_{V_1} + a_2 \int_{V_2} f d\mu_{V_2}$$

purché f sia una funzione Lebesgue-integrabile sia in V_1 che in V_2 . Osserviamo che di per sé il simbolo $a_1 V_1 + a_2 V_2$ è appunto solamente una sequenza di simboli priva di significato dato che non abbiamo mai definito una operazione di somma tra varietà e tanto meno una operazione di prodotto per scalare. Si tratta cioè di una *somma formale*: questa notazione, per quanto possa apparire ‘strana’ ora, si rivelerà particolarmente utile in seguito.

Oss. 9.2 La (9.2) può essere vista come un caso particolare della (9.3) dato che appare abbastanza sensato interpretare $V_1 + V_2$ come $V_1 \cup V_2$, almeno quando V_1 e V_2 sono disgiunte. Non si può però tentare di dare significato geometrico al simbolo $\frac{1}{2}V_1 - \frac{3}{5}V_2$ e quindi è molto meglio pensare a somme del tipo $a_1 V_1 + a_2 V_2$ come a pure somme formali.

In conclusione, osserviamo che nel caso di somme formali con un numero finito di addendi otteniamo per iterazione della definizione (9.3) la seguente uguaglianza:

$$\int_{\sum_{j=1}^m a_j V_j} f d\mu = \sum_{j=1}^m a_j \int_{V_j} f d\mu_{V_j}$$

valida per ogni $a_j \in \mathbb{R}$ purché ogni V_j sia una varietà regolare ed f sia Lebesgue-integrabile su ciascuna di esse.