

Lezioni di Analisi Matematica 3

corso di Laurea in Fisica

a.a. 2005-'06

G. Molteni

M. Vignati

VERSIONE PRELIMINARE 26.9.05

CAPITOLO 8

Definizione di varietà e teorema dei moltiplicatori di Lagrange

Supponiamo sia data una funzione $f : V \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, dove V è un sottoinsieme per ora non meglio specificato, ed immaginiamo di voler determinare i valori estremali di f ed i punti in cui tali valori sono assunti. Se V è un insieme aperto, ovvero se si è in presenza di quel problema solitamente detto “ricerca di estremi liberi”, allora lo studente ha già appreso nei precedenti corsi di analisi come questo problema possa essere efficacemente affrontato non appena f sia sufficientemente regolare, diciamo di tipo \mathcal{C}^2 . Sotto tale ipotesi, infatti, a partire dalla esistenza dello sviluppo di Taylor al secondo ordine per f si dimostra che ogni punto estremale deve essere stazionario (ovvero annullare il gradiente di f) e che tra i punti stazionari sono sicuramente estremali quelli nei quali la matrice hessiana risulta definita (positiva per i minimi e negativa per i massimi). Questo approccio si rivela inapplicabile quando V non è aperto perché nei punti del bordo di V la nozione di derivabilità per f non risulta ben definita. In realtà esiste anche un secondo risultato che affronta questo problema su basi totalmente diverse (si tratta infatti un risultato di topologia e non di calcolo differenziale), ed è il teorema di Weierstrass: se V è compatto ed f è continua allora f assume valori estremali assoluti. Tuttavia non sempre si avrà a che fare con insiemi compatti ed inoltre non sempre ci si potrà accontentare di un puro risultato di esistenza ma si dovranno esibire esplicitamente i punti ed i valori estremali. Per questi motivi il teorema di Weierstrass non può essere considerato conclusivo e si avverte la necessità di indagare ulteriormente il problema.

Il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, il principale risultato di questo capitolo, consente di affrontare efficacemente il problema nella situazione in cui f sia sufficientemente regolare ed il dominio V , pur non aperto, sia però un insieme dotato di buone proprietà geometriche, quali ad esempio l'esistenza dello spazio

tangente: ad esempio possibili insiemi V sono iperpiani, sfere, tori e loro deformazioni sufficientemente regolari. Questo teorema, nonostante la sua generalità, non consente di affrontare situazioni in cui V sia un insieme privo di questa struttura geometrica. Da questo punto di vista, infatti, il teorema dei moltiplicatori è in realtà un risultato prettamente geometrico, come sarà chiaro dalla esposizione seguente.

Il capitolo si compone di due sezioni; nella prima introduciamo i necessari concetti geometrici e la fondamentale definizione di varietà, nella seconda esporremo e dimostreremo il teorema di Lagrange.

8.1. Definizione di varietà

A partire dagli insiemi geometrici classici (curve, piani, sfere, tori ecc.), nell'ottocento è avvenuto un notevole processo di astrazione e generalizzazione che ha portato al concetto di varietà che è alla base della formulazione moderna della geometria differenziale. A chi lo incontra per la prima volta, tuttavia, esso suona un po' sconcertante dato che in esso i concetti di impronta geometrica sembrano assenti e tutto è formulato in termini di funzioni: stante a questa definizione una varietà, ovvero una cosa che aspira ad essere un oggetto geometrico, concreto, di fatto è una collezione di funzioni con speciali proprietà. Ovviamente si tratta solo di un sottoprodotto del processo di astrazione e la geometria vi è ancora contenuta nella sua interezza; anzi, in questo modo si possono ottenere risultati una volta impensabili.

Anche noi adotteremo questo punto di vista, ma data la complessità di questo concetto abbiamo deciso di esporne una versione semplificata. Evidentemente questo non è un fatto 'indolore' e sulla nozione di varietà da noi introdotta non è possibile sviluppare nella sua totalità l'intero edificio della geometria differenziale moderna, tuttavia esso si rivelerà sufficientemente duttile per poter raggiungere i nostri scopi che sono anzitutto formulare il teorema dei moltiplicatori e, successivamente, sviluppare il calcolo integrale su varietà. Il tutto con notevole generalità.

Def. 8.1 Un *dominio di* \mathbb{R}^n è un insieme che è la chiusura di un aperto di \mathbb{R}^n . Un *dominio-connesso di* \mathbb{R}^n è un insieme che è la chiusura di un aperto connesso di \mathbb{R}^n .

Oss. 8.1 Si noti la differenza tra l'essere D un dominio connesso (senza trattino), il che significa che D è connesso ed è la chiusura di un aperto, e l'essere D un dominio-connesso (col trattino) che significa che D è la chiusura di un aperto connesso. I due fatti non sono equivalenti: ad esempio, l'unione di due sfere chiuse con un punto di contatto è un dominio connesso ma non è un dominio-connesso. È tuttavia vero che ogni dominio-connesso è anche connesso. La terminologia purtroppo in questo caso non è delle più felici ma è qui comunque adottata per mantenere la compatibilità con altri testi.

Def. 8.2 Chiamiamo *prevarietà regolare di dimensione m* una funzione $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $n \geq m$ tale che:

- i. D è un dominio-connesso,
- ii. Φ può essere estesa in modo \mathcal{C}^1 ad un qualche aperto contenente D ,
- iii. Φ ristretta a $\overset{\circ}{D}$ è iniettiva,
- iv. lo jacobiano $J\Phi$ ha rango massimo (quindi m) in ogni punto di $\overset{\circ}{D}$.

Oss. 8.2 Talvolta, al posto di *ii.* capita di leggere “ Φ è di classe \mathcal{C}^1 in D ”; questa affermazione è però priva di significato poiché D è per definizione un chiuso e nei punti del suo bordo di per sé il concetto di differenziabilità non è definito. L'unico modo ‘semplice’ per dare senso a tale affermazione è intenderla come in *ii.*

Def. 8.3 Data una prevarietà regolare m dimensionale Φ , chiamiamo *sostegno della prevarietà* l'insieme $\text{Img } \Phi$ ed, equivalentemente, diremo che la funzione Φ costituisce una *parametrizzazione* dell'insieme $\text{Img } \Phi$.

Esempio 8.1 la mappa

$$\Phi : D := [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad \Phi(\vartheta) := \begin{pmatrix} \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

è una prevarietà di dimensione 1 in \mathbb{R}^2 ed il suo sostegno è la circonferenza $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (coordinate polari). ■

Esempio 8.2 la mappa

$$\Phi : D := [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad \Phi(\vartheta, \varphi) := \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

è una prevarietà di dimensione 2 in \mathbb{R}^3 il cui sostegno è la sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ (coordinate sferiche). Si noti la non biunivocità di Φ in ∂D . ■

Esempio 8.3 Procedendo per analogia coi casi precedenti non è difficile scoprire che la sfera unitaria in \mathbb{R}^n , ovvero l'insieme dei vettori \mathbf{v} di \mathbb{R}^n per i quali $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 1$ e indicata solitamente col simbolo S^{n-1} , è il sostegno di una prevarietà regolare di dimensione $n - 1$. Ad esempio S^3 è il sostegno di

$$\Phi : D := [0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \Phi(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) := \begin{pmatrix} \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \\ \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 \\ \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \\ \cos \vartheta_1 \end{pmatrix}.$$

Esempio 8.4 La mappa

$$\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Phi(\vartheta) := \begin{pmatrix} \sinh \vartheta \\ \cosh \vartheta \end{pmatrix}$$

è una prevarietà regolare di dimensione 1; il suo sostegno è un ramo dell'iperbole $x^2 - y^2 + 1 = 0$ (coordinate iperboliche). ■

Esempio 8.5 La mappa

$$\Phi : \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(\vartheta, \varphi) := \begin{pmatrix} \sinh \vartheta \sin \varphi \\ \sinh \vartheta \cos \varphi \\ \cosh \vartheta \end{pmatrix}$$

è una prevarietà regolare di dimensione 2: il suo sostegno è una falda dell'iperboloido ad due falde, di equazione $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$. ■

Esempio 8.6 Gli esempi precedenti possono essere generalizzati nel seguente modo: ogni componente connessa delle quadriche non degeneri di qualsiasi segnatura (ovvero l'insieme degli zeri di $\sum_{j=1}^k x_j^2 - \sum_{j=k+1}^n x_j^2 + 1 = 0$ per qualche k) è il sostegno di una prevarietà la cui parametrizzazione è ottenibile a partire da funzioni trigonometriche e/o iperboliche. ■

Esempio 8.7 Ellisse (in \mathbb{R}^2) ed ellissoidi (in \mathbb{R}^3) possono essere descritti come sostegni di prevarietà semplicemente tenendo conto della lunghezza dei semiassi

propri. Ad esempio la mappa

$$\Phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad \Phi(\vartheta) := \begin{pmatrix} 2 \sin \vartheta \\ 3 \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

ha per sostegno l'ellisse $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 - 1 = 0$ (coordinate polari). ■

Esempio 8.8 Immagini diffeomorfe di prevarietà sono ancora prevarietà. Questo perché data una prevarietà Φ di dominio $D \in \mathbb{R}^m$ ed immagine in \mathbb{R}^n ed un qualsiasi diffeomorfismo Ψ (vd. Def. 7.2) di \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^n (o più semplicemente da un aperto contenente $\text{Img } \Phi$ in \mathbb{R}^n), la funzione $\Psi \circ \Phi$ è biunivoca e \mathcal{C}^1 in $\overset{\circ}{D}$ e continua in D . Inoltre $J(\Psi \circ \Phi) = (J\Psi) \cdot (J\Phi)$ e poiché per il teorema della mappa inversa ($J\Psi$) è in ogni punto invertibile, un teorema di algebra lineare garantisce che $\text{Rank } J(\Psi \circ \Phi) = \text{Rank } J\Phi = m$. Sono casi particolari di questa osservazione gli ellissoidi del punto precedente (di fatto immagini diffeomorfe di sfere). ■

Esempio 8.9 Insiemi quali quadrati (in \mathbb{R}^2), cubi (in \mathbb{R}^3) ed in genere tutti gli insiemi che presentino ‘degli spigoli sul bordo’ non possono essere pensati come immagini diffeomorfe di sfere poiché negli spigoli la mappa che trasforma la sfera nell’insieme dato non risulta differenziabile. Difatti è possibile dimostrare che essi non sono il sostegno di alcuna prevarietà. ■

Esempio 8.10 Data una qualsiasi funzione $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ di classe \mathcal{C}^1 , sia

$$\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \quad , \quad \Phi(\mathbf{u}) := \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{f}(\mathbf{u}) \end{pmatrix}.$$

È facile verificare che Φ soddisfa tutti i requisiti per essere considerata come una prevarietà di dimensione m . Dal punto di vista geometrico ciò significa che il grafico di f è il sostegno di una prevarietà. ■

Dunque una prevarietà regolare di dimensione m è in realtà una mappa $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ con certe caratteristiche. Ciò non toglie che in realtà si sia interessati non tanto a Φ , quanto alla sua immagine: il sostegno $\text{Img } \Phi$. Ci scontriamo subito però con un problema concettuale: l’insieme $\text{Img } \Phi$ è sostegno di molte prevarietà Φ diverse! Ciò significa che ogni volta che introduciamo un concetto basandoci sulla funzione Φ , per poterlo associare al suo sostegno dovremo mostrare come esso sia indipendente dalla particolare scelta di Φ , almeno fino a che Φ è scelta all’interno di una opportuna classe di equivalenza. Il nostro primo obiettivo,

quindi, è anzitutto chiarire quando due prevarietà Φ_1 e Φ_2 debbano considerarsi equivalenti.

Def. 8.4 Chiamiamo *cambiamento ammissibile di coordinate* una funzione $\psi : A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ definita in un aperto A , che risulti di classe \mathcal{C}^1 , invertibile con inversa di classe \mathcal{C}^1 . Un cambiamento ammissibile è quindi di fatto un diffeomorfismo tra l'aperto $A \subseteq \mathbb{R}^m$ e la sua immagine.

Si osservi che dal teorema della mappa aperta, Teor. 3.6, segue che $\psi(A)$ è a sua volta un aperto e che quindi anche ψ^{-1} è un cambiamento ammissibile di coordinate.

Def. 8.5 Date due prevarietà Φ_1 e Φ_2 definite rispettivamente sui domini-connessi D_1 e D_2 di \mathbb{R}^m , diciamo che Φ_1 è *equivalente* ad Φ_2 , in simboli $\Phi_1 \sim \Phi_2$, se hanno il medesimo sostegno ed esiste un cambiamento ammissibile di coordinate $\psi : A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ (A aperto), tale che $D_1 \subseteq A$ e $D_2 = \psi(D_1)$. Altrimenti detto, $\Phi_1 \sim \Phi_2$ se e solo se $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \psi$ per qualche cambiamento ammissibile di coordinate ψ .

Non è difficile dimostrare che quella appena definita è una relazione di equivalenza.

Esempio 8.11 In base alla definizione data le prevarietà $\Phi_1 : [\pi, 3\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\Phi_1(\vartheta) = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)^T$ e $\Phi_2 : [\sqrt{\pi}, \sqrt{3\pi}] \rightarrow \mathbb{R}^2$, definita da $\Phi_2(\vartheta) = (\cos \vartheta^2, \sin \vartheta^2)^T$ sono \sim -equivalenti. ■

Oss. 8.3 Perché due prevarietà siano equivalenti *non basta* che i sostegni siano il medesimo insieme: le due funzioni $\varphi_1, \varphi_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ con $\varphi_1(x) = x$ e $\varphi_2(x) = x^2$ sono due prevarietà, hanno lo stesso sostegno e tuttavia non sono equivalenti poiché l'unica funzione ψ per la quale si abbia $\varphi_2 = \varphi_1 \circ \psi$ è $\psi(x) = x^2$, ma questa funzione non è un cambiamento ammissibile di coordinate su nessun aperto contenente $[0, 1]$ dato che la sua inversa è \sqrt{x} che in 0 non è differenziabile.

Possiamo ora definire il concetto di varietà.

Def. 8.6 Chiamiamo *varietà regolare di dimensione m* la classe di equivalenza secondo la relazione \sim cui una data prevarietà appartiene.

Quando introdurremo un concetto utilizzando la mappa di parametrizzazione Φ potremo quindi sostenere di avere in realtà introdotto un concetto legato alla

sola varietà Φ/\sim da essa individuata ogni qual volta riusciremo a dimostrare che tale concetto è invariante per cambiamento ammissibile di coordinate.

Introduciamo fin da ora anche una seconda relazione di equivalenza, la cui importanza sarà però evidente solo nei capitoli successivi.

Def. 8.7 Date due prevarietà Φ_1 e Φ_2 definite rispettivamente sui domini-connessi D_1 e D_2 di \mathbb{R}^m , diciamo che Φ_1 è *strettamente equivalente* ad Φ_2 , in simboli $\Phi_1 \overset{\circ}{\sim} \Phi_2$ se hanno il medesimo sostegno ed esiste un cambiamento ammissibile di coordinate $\psi : A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ (A aperto), tale che $D_1 \subseteq A$, $D_2 = \phi(D_1)$, ed $\det(J\psi) > 0$ in ogni punto di D_1 . Detto in altro modo, $\Phi_1 \overset{\circ}{\sim} \Phi_2$ se e solo se $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \psi$ per qualche cambiamento ammissibile di coordinate ψ per il quale $\det(J\psi) > 0$.

Def. 8.8 Chiamiamo *varietà orientata* la classe di equivalenza secondo la relazione $\overset{\circ}{\sim}$ cui una data prevarietà appartiene.

Notiamo che la relazione di equivalenza $\overset{\circ}{\sim}$ è più fine della relazione \sim , nel senso che due prevarietà possono essere \sim -equivalenti senza essere $\overset{\circ}{\sim}$ -equivalenti. Si dimostra che ogni classe di \sim -equivalenza è composta da due sole classi di $\overset{\circ}{\sim}$ -equivalenza, dette *orientazioni* della varietà. Anche in tal caso, quando introdurremo un concetto utilizzando la mappa di parametrizzazione Φ potremo dire di avere in realtà introdotto un concetto legato alla sola *varietà orientata* $\Phi/\overset{\circ}{\sim}$ da essa individuata se e solo se saremo in grado di dimostrare che tale concetto è invariante rispetto ai cambiamenti di coordinate strettamente ammissibili.

Introdotte le fondamentali definizioni, torniamo ora ad analizzare il concetto di prevarietà, osservando come l'Es. 8.10 sia in un certo senso tipico. Usando il teorema di Dini, infatti, possiamo dimostrare il seguente risultato.

Teorema 8.1 Sia Φ una prevarietà regolare di dimensione m ; ne siano D il dominio e $V \subseteq \mathbb{R}^n$ il sostegno. Sia V° quella parte di V che è immagine di D . Sia $p \in V^\circ$ un punto qualsiasi. Allora è possibile decomporre \mathbb{R}^n come prodotto cartesiano di \mathbb{R}^m ed \mathbb{R}^{n-m} e determinare due aperti U ed W in \mathbb{R}^m tali che

- $p \in \Phi(U)$,
- l'insieme $\Phi(U)$ è il grafico di una funzione $\phi : W \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ di classe \mathcal{C}^1 .

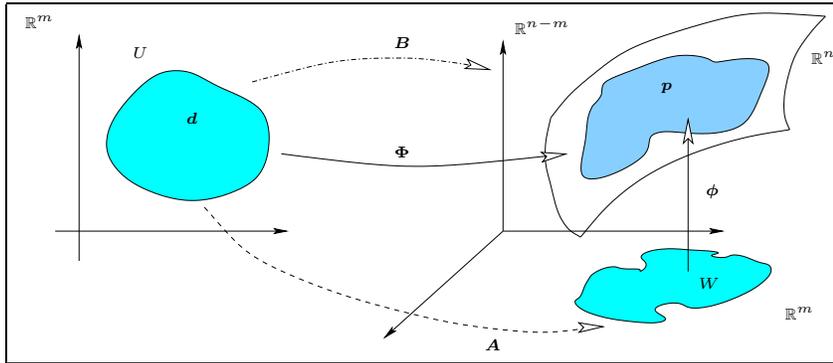


FIGURA 8.1

Dim. (vd. Fig. 8.1) Per ipotesi $p \in V^\circ$. Sia $d \in \overset{\circ}{D}$ l'unico punto tale che $\Phi(d) = p$. Siano $A : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $B : D \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ le funzioni ottenute proiettando la funzione Φ rispettivamente sullo spazio \mathbb{R}^m delle prime m coordinate e sullo spazio \mathbb{R}^{n-m} delle altre $n - m$ coordinate. Tali funzioni sono evidentemente di classe \mathcal{C}^1 in $\overset{\circ}{D}$. Osserviamo che lo jacobiano $(J\Phi)(d)$ è

$$(J\Phi)(d) := \begin{pmatrix} (JA)(d) \\ (JB)(d) \end{pmatrix}$$

che per ipotesi è una matrice $n \times m$ di rango m . A meno di procedere ad un riordinamento delle coordinate di \mathbb{R}^n possiamo supporre che sia $(JA)(d)$ la sottomatrice di rango m . Dato che essa è di ordine $m \times m$, l'essere di rango m implica che essa è invertibile. Il teorema della mappa inversa dimostra allora che esistono un intorno aperto $U \subseteq \overset{\circ}{D}$ di d , un intorno aperto W di $A(d)$ ed una funzione $A^{-1} : W \rightarrow U$ di classe \mathcal{C}^1 che è l'inversa della restrizione ad U della mappa A . Sia $\phi : W \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ definita dall'uguaglianza

$$\phi(w) := B \circ A^{-1}(w).$$

Evidentemente ϕ è di classe \mathcal{C}^1 e per come è stata costruita i punti del suo grafico sono tutti e soli i punti che appartengono all'immagine di U tramite Φ . ■

Quindi il sostegno di una prevarietà è sostanzialmente l'unione dei grafici di varie funzioni, almeno quando concentriamo la nostra attenzione su quella parte del sostegno che è immagine dell'interno del dominio di definizione di una sua parametrizzazione. Dato che è proprio a questo insieme cui saremo principalmente interessati in questa sezione è bene ribadire la definizione:

Def. 8.9 Sia Φ una prevarietà regolare di dimensione m ; ne siano D il dominio e V il sostegno. Con V° indichiamo quella parte di V che è immagine dell'interno $\overset{\circ}{D}$ di D .

Oss. 8.4 Osserviamo che l'insieme V° non è caratteristico di V ma dipende anche dalla parametrizzazione Φ adottata. Ad esempio, la circonferenza $x^2 + y^2 - 1 = 0$ se parametrizzata da $\Phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $\Phi(\vartheta) = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)^T$ ha come insieme V° l'insieme $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x \neq 1\}$. Se invece è parametrizzata da $\Phi : [\pi/2, 5\pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Phi(\vartheta) = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)^T$ ha come insieme V° l'insieme $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, y \neq 1\}$.

Nel resto della presente sezione concentreremo la nostra attenzione sull'insieme $\overset{\circ}{D}$ ed il corrispondente V° . Per tale motivo introduciamo anche la seguente definizione.

Def. 8.10 Sia Φ una prevarietà regolare di dimensione m ; ne siano D il dominio e V il sostegno. Chiamiamo *prevarietà aperta regolare di dimensione m* la restrizione di Φ al dominio $\overset{\circ}{D}$. Il sostegno della prevarietà aperta è quindi l'insieme V° .

Teorema 8.2 Sia Φ una prevarietà aperta regolare di dimensione m ; ne siano $\overset{\circ}{D}$ il dominio e $V^\circ \subseteq \mathbb{R}^n$ il sostegno. Sia $\mathbf{p} \in V^\circ$ un punto qualsiasi. Allora è possibile decomporre \mathbb{R}^n come prodotto cartesiano di \mathbb{R}^m ed \mathbb{R}^{n-m} e determinare due aperti U e W in \mathbb{R}^m ed una funzione $\psi : W \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ di classe \mathcal{C}^1 tale che

- $\mathbf{p} \in \Phi(U)$,
- $\psi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ se e solo se $\mathbf{q} \in \Phi(U)$,
- $(\text{Rank } J\psi)(\mathbf{q}) = n - m$ in ogni $\mathbf{q} \in \Phi(U)$.

Dim. (Vd. Fig. 8.2) Sia W l'aperto determinato in base al Teor. 8.1 e sia ϕ la funzione di classe \mathcal{C}^1 definita in W la cui esistenza è dimostrata in quel teorema. Definiamo $\psi : W \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$, $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{y} - \phi(\mathbf{x})$. È facile verificare che questa funzione soddisfa tutte le richieste. ■

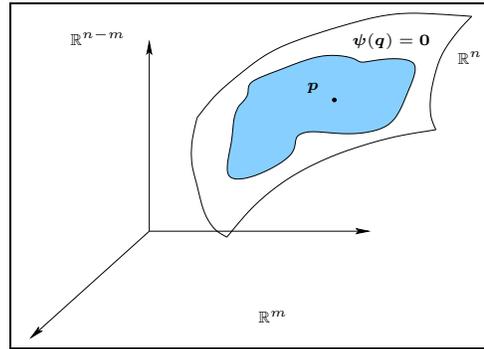


FIGURA 8.2

Il teorema precedente mostra che localmente V° coincide con l'insieme degli zeri di una funzione ψ di classe \mathcal{C}^1 . Il teorema di Dini consente di dimostrare la situazione opposta.

Teorema 8.3 *Sia A un aperto di \mathbb{R}^n e sia $\psi : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ una funzione di classe \mathcal{C}^1 . Supponiamo che $\psi(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ per un certo $\mathbf{p} \in A$ e che $(J\psi)(\mathbf{p})$ abbia rango $n - m$. allora l'insieme degli zeri di ψ è localmente il sostegno di una prevarietà aperta regolare di dimensione m .*

Dim. (Vd. Fig. 8.2) Immediata poiché per il teorema di Dini sappiamo che localmente l'insieme degli zeri è il grafico di una funzione di classe \mathcal{C}^1 . ■

Oss. 8.5 Dopo lunga fatica abbiamo scoperto che vi sono tre modi diversi di descrivere *localmente* la parte aperta del sostegno di una prevarietà regolare di dimensione m :

- (parametrizzazione) come immagine di una mappa Φ da un aperto di \mathbb{R}^m ad un aperto di \mathbb{R}^n (di classe \mathcal{C}^1 , biunivoca con jacobiano di rango m).
- (grafico) come grafico di una mappa ϕ da un aperto di \mathbb{R}^m ad un aperto di \mathbb{R}^{n-m} (mappa di classe \mathcal{C}^1).
- (implicito) come insieme degli zeri di una mappa ψ da un aperto di \mathbb{R}^n ad un aperto di \mathbb{R}^{n-m} (mappa di classe \mathcal{C}^1 e con jacobiano di rango $n - m$).

Abbiamo inoltre mostrato che le tre descrizioni sono equivalenti. Ciononostante ognuna si rivela particolarmente utile per esplorare particolari concetti quindi è bene che tutte e tre siano tenute presenti.

Ricordiamo la seguente costruzione algebrica. (vd. Fig. 8.3) Sia $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ un punto qualsiasi. Sia $E_{\mathbf{p}}$ l'insieme delle frecce fuoriuscenti da \mathbf{p} . Ogni freccia è

caratterizzata univocamente da direzione, verso e lunghezza. In E_p si definisce un'operazione di somma ($\mathbf{u} + \mathbf{v}$ è la freccia uscente da \mathbf{p} che è diagonale del parallelogramma individuato da \mathbf{u} e \mathbf{v}) ed un'operazione di moltiplicazione per scalare ($\lambda \mathbf{u}$ è la freccia diretta come \mathbf{u} , con lunghezza dilatata di un fattore $|\lambda|$ e verso uguale od opposto a quello di \mathbf{u} a seconda che λ sia positivo o negativo). Si dimostra che rispetto a queste operazioni E_p è uno spazio vettoriale di dimensione n . Si noti che gli elementi di E_p non sono vettori di \mathbb{R}^n , a meno che \mathbf{p} sia l'origine di \mathbb{R}^n .

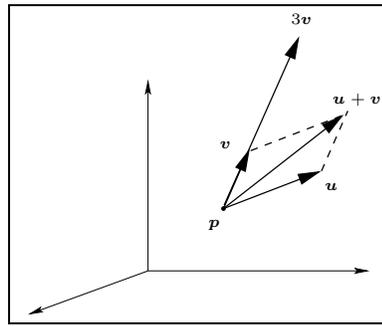


FIGURA 8.3

Oss. 8.6 L'insieme di tutti gli spazi E_p di \mathbb{R}^n conferisce ad \mathbb{R}^n la struttura che in algebra è detta struttura *affine*.

Def. 8.11 Sia Φ una prevarietà aperta regolare di dimensione m ; ne siano $\overset{\circ}{D}$ il dominio e $V^\circ \subseteq \mathbb{R}^n$ il sostegno. Sia \mathbf{p} un punto di V° . Chiamiamo *spazio tangente a V° in \mathbf{p}* , indicato con $T_p V^\circ$, l'insieme dei vettori $\mathbf{v} \in E_p$ per i quali esiste un ϵ reale positivo ed una mappa $\mathbf{L} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe \mathcal{C}^1 tale che

$$\mathbf{L}(0) = \mathbf{p}, \quad \mathbf{L}'(0) = \mathbf{v}, \quad \mathbf{L}(t) \in V^\circ \quad \forall t.$$

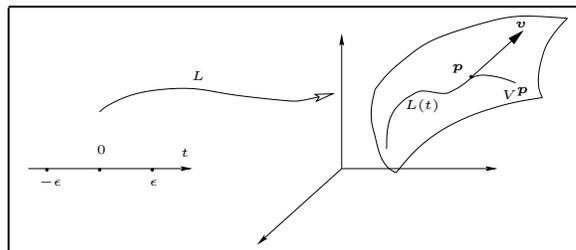


FIGURA 8.4: Vettori dello spazio tangente.

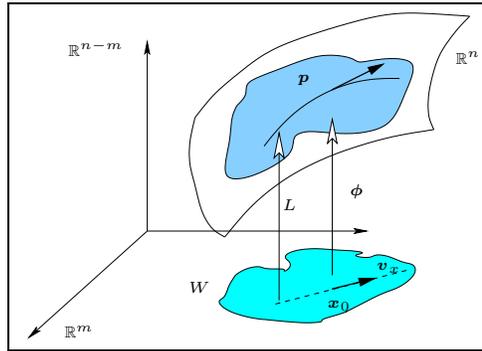


FIGURA 8.5

Teorema 8.4 (spazio tangente) *Sia Φ una prevarietà aperta regolare di dimensione m ; ne siano \mathring{D} il dominio e $V^\circ \subseteq \mathbb{R}^n$ il sostegno. Sia \mathbf{p} un punto di V° . Allora $T_{\mathbf{p}}V^\circ$ è uno spazio vettoriale di dimensione m (quindi di dimensione uguale a quella della prevarietà).*

Dim. Sappiamo che in un intorno di \mathbf{p} il sostegno V° può essere descritto come luogo degli zeri di una funzione $\psi : A \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ di classe \mathcal{C}^1 sull'aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Sappiamo inoltre che possiamo scegliere ψ in modo che lo jacobiano $J\psi$ abbia rango $n - m$ in ogni punto di A in cui ψ si annulla. Dimosteremo che $T_{\mathbf{p}}V^\circ$ coincide con il $\ker(J\psi)(\mathbf{p})$, dimostrando in tal modo sia che $T_{\mathbf{p}}V^\circ$ è uno spazio vettoriale (cosa non del tutto ovvia dalla sua definizione), sia che la sua dimensione è m (infatti dal teorema di nullità più rango sappiamo che $\dim(\ker(J\psi)(\mathbf{p})) + \text{Rank}(J\psi)(\mathbf{p}) = n$ ed inoltre sappiamo che $\text{Rank}(J\psi)(\mathbf{p}) = n - m$).

Sia $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}V^\circ$ e sia \mathbf{L} la funzione associata a \mathbf{v} (in base alla Def. 8.11). Per ipotesi $\mathbf{L}(t) \in V^\circ$ e quindi $\psi(\mathbf{L}(t)) = \mathbf{0}$ per ogni t . Derivando rispetto a t questa relazione nel punto $t = 0$ otteniamo

$$(J\psi)\Big|_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

quindi $\mathbf{v} \in \ker(J\psi)(\mathbf{p})$, e dato che \mathbf{v} è arbitrario abbiamo di fatto dimostrato che $T_{\mathbf{p}}V^\circ \subseteq \ker(J\psi)(\mathbf{p})$.

Dal fatto che $\text{Rank}(J\psi)(\mathbf{p}) = n - m$ sappiamo di poter decomporre \mathbb{R}^n nel prodotto cartesiano di \mathbb{R}^m ed \mathbb{R}^{n-m} , i cui vettori sono indicati rispettivamente con \mathbf{x} e con \mathbf{y} scelti in modo che $(J_{\mathbf{y}}\psi)(\mathbf{p})$ sia invertibile. Consideriamo l'equazione $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$. Dal teorema di Dini sappiamo di poter esplicitare la variabile \mathbf{y} rispetto alla \mathbf{x} , ovvero sappiamo che esiste una $\phi : W \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ di classe \mathcal{C}^1 tale che

$\psi(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{x} \in W$. Anche i punti di V° in un intorno di \mathbf{p} sono zeri di ψ e dato che ϕ è localmente unica (sempre per il teorema di Dini) concludiamo che il grafico di ϕ è localmente un intorno di \mathbf{p} in V° . Sia \mathbf{v} un vettore nel $\ker(J\psi)(\mathbf{p})$, quindi $(J\psi)\big|_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v} = 0$. Dette \mathbf{v}_x e \mathbf{v}_y le due proiezioni di \mathbf{v} nello spazio delle \mathbf{x} e delle \mathbf{y} , la relazione precedente diventa:

$$(J_x\psi)\big|_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v}_x + (J_y\psi)\big|_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v}_y = 0 \quad \implies \quad \mathbf{v}_y = -((J_y\psi)\big|_{\mathbf{p}})^{-1}(J_x\psi)\big|_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v}_x,$$

poiché per ipotesi $(J_y\psi)(\mathbf{p})$ è invertibile. Sia \mathbf{x}_0 la proiezione di \mathbf{p} sullo spazio delle \mathbf{x} . Definiamo $\mathbf{L} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{L}(t) := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}_x \\ \phi(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}_x) \end{pmatrix},$$

dove $\epsilon > 0$ è sufficientemente piccolo perché $\phi(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}_x)$ esista. È evidente che $\mathbf{L}(0) = \mathbf{p}$ e ricordando la formula data dal teorema di Dini per lo jacobiano della funzione implicita ϕ si ha:

$$\mathbf{L}'(0) := \begin{pmatrix} \mathbf{v}_x \\ (J\phi)\big|_{\mathbf{x}_0} \cdot \mathbf{v}_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_x \\ -((J_y\psi)\big|_{\mathbf{p}})^{-1}(J_x\psi)\big|_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v}_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_x \\ \mathbf{v}_y \end{pmatrix} = \mathbf{v}.$$

In questo modo abbiamo dimostrato che $\ker(J\psi)(\mathbf{p}) \subseteq T_{\mathbf{p}}V^\circ$. Questa inclusione, unita a quella dimostrata precedentemente, completa la dimostrazione del teorema. ■

Oss. 8.7 Nella dimostrazione precedente abbiamo provato la seguente importante analogia localmente V° è il luogo degli zeri di ψ e $T_{\mathbf{p}}V^\circ$ è il luogo degli zeri di $(J\psi)(\mathbf{p})$.

Def. 8.12 Sia Φ una prevarietà aperta regolare di dimensione m ; ne siano $\overset{\circ}{D}$ il dominio e $V^\circ \subseteq \mathbb{R}^n$ il sostegno. Sia \mathbf{p} un punto di V° . Sia \mathbf{v} un vettore di $E_{\mathbf{p}}$. Per definizione \mathbf{v} è detto *ortogonale* a V in \mathbf{p} quando \mathbf{v} è ortogonale a $T_{\mathbf{p}}V^\circ$.

Corollario 8.1 (spazio ortogonale) Sia Φ una prevarietà aperta regolare di dimensione m ; ne siano $\overset{\circ}{D}$ il dominio e $V^\circ \subseteq \mathbb{R}^n$ il sostegno. Sia \mathbf{p} un punto di V° . Sia $\psi : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ una mappa di classe \mathcal{C}^1 definita in un aperto A il cui annullarsi descrive i punti di V° in un intorno aperto di \mathbf{p} ed il cui jacobiano ha rango $n - m$ in \mathbf{p} . Allora l'insieme dei vettori di $E_{\mathbf{p}}$ ortogonali a V in \mathbf{p} è uno spazio vettoriale generato dai vettori trasposti delle righe di $(J\psi)(\mathbf{p})$.

Dim. Abbiamo già dimostrato che $T_{\mathbf{p}}V^\circ = \ker(J\psi)(\mathbf{p})$ e per definizione un vettore è ortogonale a V in \mathbf{p} se e solo se è ortogonale a $T_{\mathbf{p}}V^\circ$. Siano \mathbf{e}_j per $j = 1, \dots, n-m$ i vettori di $E_{\mathbf{p}}$ (quindi scritti come vettori colonna) tali che

$$(J\psi)(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \dots \\ \mathbf{e}_{n-m}^T \end{pmatrix}.$$

L'uguaglianza $T_{\mathbf{p}}V^\circ = \ker(J\psi)(\mathbf{p})$ mostra che ogni \mathbf{e}_j è ortogonale ad $T_{\mathbf{p}}V^\circ$. D'altra parte gli $n-m$ vettori \mathbf{e}_j sono indipendenti poiché il rango di $(J\psi)(\mathbf{p})$ è $n-m$. Infine, lo spazio dei vettori ortogonali a $T_{\mathbf{p}}V^\circ$ ha dimensione $n - \dim(T_{\mathbf{p}}V^\circ) = n - m$, quindi i vettori \mathbf{e}_j generano l'intero spazio ortogonale. ■

Qualche esempio è necessario. Consideriamo la sfera di \mathbb{R}^3 , vista come luogo degli zeri della mappa $\psi(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Lo jacobiano di ψ è semplicemente il suo gradiente: $J\psi = \nabla\psi = (2x, 2y, 2z)$. In base al teorema precedente, in ogni punto (x_0, y_0, z_0) della sfera il vettore $\nabla\psi = (2x_0, 2y_0, 2z_0)$ è ortogonale alla sfera o meglio, allo spazio tangente, cosa di cui è facile convincersi.

Più in generale, sia $\psi : \mathbb{R}^{(n-1)+1} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe \mathcal{C}^1 . Per ogni $c \in \mathbb{R}$ consideriamo l'insieme dei punti in cui ψ assume il valore c : tale insieme è generalmente detto *insieme di livello c* di ψ . Osserviamo che si tratta del luogo degli zeri della funzione $\psi_c := \psi - c$ e che quindi $J\psi_c = J\psi = \nabla\psi$. Supponiamo quindi che $\nabla\psi$ non sia nullo in alcun punto della superficie di livello in esame (questo equivale a richiedere che $J\psi_c$ abbia rango massimo in ogni punto del suo insieme degli zeri che quindi è localmente il sostegno di una prevarietà). Allora dal teorema precedente concludiamo che $\nabla\psi$ è *in ogni punto ortogonale alla superficie di livello*.

Oss. 8.8 L'osservazione precedente può essere così interpretata: sia ψ il potenziale di un qualche campo di forze. Per definizione di potenziale la forza \mathbf{F} è in ogni punto ottenuta a partire da ψ tramite la relazione $\mathbf{F} = -\nabla\psi$ (il meno è frutto della convenzione che vuole che i punti di equilibrio stabili siano i minimi del potenziale, ma la sua presenza non modifica questo discorso). Le curve $\psi = c$ sono le curve equipotenziali ed il teorema precedente dunque afferma che *il campo di forze \mathbf{F} è ortogonale alle superfici equipotenziali*: un fatto che può essere messo ben in evidenza per esempio nel caso del potenziale gravitazionale osservando una

qualsiasi carta topografica (le linee di livello dei rilievi montuosi sono ortogonali alle linee di scorrimento dei fiumi), nel caso magnetostatico (le linee equipotenziali sono ortogonali alle linee lungo le quali si dispone la limatura di ferro) e nel caso elettrostatico (le linee equipotenziali sono ortogonali alle linee lungo le quali si muove una particella carica).

Esempio 8.12 Sia

$$\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi(x, y, z) := \begin{pmatrix} x^3 + xy^2 + z^3 \\ xy + x - yz \end{pmatrix}$$

e si consideri le soluzioni di $\psi(x, y, z) = \mathbf{0}$. Il punto $\mathbf{p} := (0, 1, 0)$ soddisfa l'equazione e

$$J\psi_{\mathbf{p}} := \begin{pmatrix} 3x^2 + y^2 & 2xy & 3z^2 \\ y + 1 & x - z & -y \end{pmatrix} \Big|_{(0,1,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Evidentemente $\text{Rank}(J\psi)(\mathbf{p}) = 2$, quindi l'insieme degli zeri è localmente il sostegno di una prevarietà regolare di dimensione 1 (Teor. 8.3), quindi una curva. Lo spazio tangente in \mathbf{p} alla curva ha dimensione 1 (Teor. 8.4) e lo spazio ortogonale ha dimensione due. I due vettori $(1, 0, 0)^T$ e $(2, 0, -1)^T$ generano lo spazio ortogonale (Cor. 8.1). ■

8.2. Il teorema di Lagrange

Supponiamo ora che sia assegnata una funzione $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, U aperto, e di volerne determinare gli estremanti non nel proprio dominio U , ma in una parte di esso, V , che risulta essere il luogo degli zeri di una seconda funzione $\psi : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ di classe \mathcal{C}^1 con jacobiano di rango $n-m$ in ogni punto di V . V è quindi localmente il sostegno di una prevarietà aperta regolare di dimensione m . Supponiamo che anche f sia di classe \mathcal{C}^1 . Dalla teoria delle funzioni di più variabili è noto che ∇f è un vettore di \mathbb{R}^n che indica la direzione di massima crescita. Poiché questo è un fatto importante ne ricordiamo la dimostrazione.

Proposizione 8.1 *Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, sia \mathbf{x}_0 un punto interno di U e supponiamo che f sia differenziabile in \mathbf{x}_0 con $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$. Allora, al variare di \mathbf{v} tra i vettori di \mathbb{R}^n di norma 1, la derivata direzionale $(D_{\mathbf{v}}f)(\mathbf{x}_0)$ assume il suo massimo valore quando \mathbf{v} è parallelo ed equiverso con $\nabla f(\mathbf{x}_0)$.*

Dim. Essendo per ipotesi f differenziabile in \mathbf{x}_0 ,

$$(D_{\mathbf{v}}f)(\mathbf{x}_0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos(\alpha) = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \cos(\alpha)$$

dove α è l'angolo delimitato dai vettori $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ e \mathbf{v} . Evidentemente la derivata è massima quando $\alpha = 0$ ovvero quando \mathbf{v} è diretto come $\nabla f(\mathbf{x}_0)$. ■

Perché un punto \mathbf{p} di V sia estremante vincolato a V per f è quindi necessario che la direzione di massima crescita di f sia ortogonale al vincolo V , ovvero che $(\nabla f)(\mathbf{p}) \perp T_{\mathbf{p}}V^\circ$; se così non fosse, infatti, esisterebbe un cammino lungo il vincolo, passante per \mathbf{p} ed avente come vettore di direzione in \mathbf{p} la proiezione (non nulla) di $(\nabla f)(\mathbf{p})$ su $T_{\mathbf{p}}V^\circ$ (questo perché la proiezione è sul tangente in \mathbf{p} a V e V è, almeno localmente, una varietà regolare): seguendo tale cammino il valore di f cresce in modo monotono (almeno in un intorno di \mathbf{p} sufficientemente piccolo), per cui \mathbf{p} non sarebbe un punto estremante per f .

Dal Cor. 8.1 sappiamo che lo spazio ortogonale è generato dalle righe della matrice $(J\psi)(\mathbf{p})$ e quindi scopriamo il seguente criterio.

Teorema 8.5 (moltiplicatori di Lagrange) *Sia U un aperto di \mathbb{R}^n e siano date due funzioni $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ e $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ di classe \mathcal{C}^1 . Supponiamo che il rango di $J\psi$ sia $n - m$ in un punto \mathbf{p} in cui $\psi(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$. Allora, condizione necessaria affinché f abbia un estremo (locale) in \mathbf{p} vincolato all'insieme degli zeri della funzione ψ è che il gradiente $\nabla f(\mathbf{p})$ sia una combinazione lineare delle righe della matrice $(J\psi)(\mathbf{p})$, ovvero è necessario che esista il vettore $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{n-m}$ (vettore riga) tale che*

$$(8.1) \quad \nabla f(\mathbf{p}) = \boldsymbol{\lambda} \cdot (J\psi)(\mathbf{p}).$$

Oss. 8.9 Nel sistema precedente sia il punto \mathbf{p} che il vettore $\boldsymbol{\lambda}$ sono incogniti, di conseguenza abbiamo in tutto $n + (n - m) = 2n - m$ incognite. Il sistema $\nabla f(\mathbf{p}) = \boldsymbol{\lambda} \cdot (J\psi)(\mathbf{p})$ fornisce solo n equazioni. Vi sono però altre $n - m$ equazioni di cui tener conto: per ipotesi infatti $\psi(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$; in tutto otteniamo quindi $2n - m$ equazioni in $2n - m$ incognite.

Esempio 8.13 *Determinare gli estremi assoluti di $f(x, y) = x^3 - y^2$ sulla ellisse $\psi(x, y) := x^2 + 4y^2 - 1 = 0$.*

Gli estremi esistono poiché l'ellisse è un compatto ed f è continua. Il teorema precedente mostra che i punti estremali devono essere anche stazionari vincolati,

ovvero devono risolvere il sistema

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla \psi \\ \psi = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 3x^2 = \lambda \cdot 2x \\ -2y = \lambda \cdot 8y \\ x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \end{cases} \implies (x, y) \in \left\{ (\pm 1, 0), (0, \pm \frac{1}{2}), (-\frac{1}{6}, \pm \frac{\sqrt{35}}{12}) \right\}.$$

Calcolando il valore di f in questi punti si scopre che il massimo assoluto di f è 1, assunto in $(1, 0)$, ed il minimo assoluto è -1 , assunto in $(-1, 0)$. Gli altri punti, se sono estremali, lo sono solo localmente. ■

Esempio 8.14 *Determinare gli estremi assoluti di $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ sulla intersezione di $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ con $x + y + z - 1 = 0$.*

Il primo vincolo è la sfera di raggio 2 e centro $\mathbf{0}$, il secondo è un piano. La loro intersezione è quindi una circonferenza, che è un compatto, garantendo così l'esistenza degli estremi assoluti per la funzione continua f . Il teorema dei moltiplicatori mostra che nei punti estremanti il gradiente di f , ovvero $(3x^2, 3y^2, 3z^2)$, deve essere combinazione lineare delle righe dello jacobiano del vincolo, ovvero di $(2x, 2y, 2z)$ (primo vincolo scalare) e $(1, 1, 1)$ (secondo vincolo scalare). Devono quindi esistere le costanti λ e μ tali che

$$\begin{cases} 3x^2 = 2x\lambda + \mu \\ 3y^2 = 2y\lambda + \mu \\ 3z^2 = 2z\lambda + \mu \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Sommando le relazioni si trova che $\lambda = 6 - 3\mu/2$, quindi eliminando questa variabile dal sistema si ha

$$\begin{cases} 3x^2 = x(12 - 3\mu) + \mu \\ 3y^2 = y(12 - 3\mu) + \mu \\ 3z^2 = z(12 - 3\mu) + \mu \\ x + y + z - 1 = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{1}{6}(12 - 3\mu \pm \sqrt{9\mu^2 - 60\mu + 144}) \\ y = \frac{1}{6}(12 - 3\mu \pm \sqrt{9\mu^2 - 60\mu + 144}) \\ z = \frac{1}{6}(12 - 3\mu \pm \sqrt{9\mu^2 - 60\mu + 144}) \\ x + y + z - 1 = 0, \end{cases}$$

in cui tutte le otto possibili combinazioni di segno \pm devono essere considerate. Sostituendo nell'ultima equazione, si trova che le combinazioni di segni $(+, +, +)$ e $(-, -, -)$ non hanno soluzioni per μ , mentre la combinazione $(+, +, -)$ (e le sue

permutazioni), dà la soluzione $\mu = \frac{1}{6}(20 + \sqrt{22})$ e la combinazione $(-, -, +)$ (e le sue permutazioni), dà la soluzione $\mu = \frac{1}{6}(20 - \sqrt{22})$. Concludendo, si trovano in tutto sei punti stazionari vincolati:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{6}(12 - 3\mu_1 + \sqrt{9\mu_1^2 - 60\mu_1 + 144}) \\ y = \frac{1}{6}(12 - 3\mu_1 + \sqrt{9\mu_1^2 - 60\mu_1 + 144}) \\ z = \frac{1}{6}(12 - 3\mu_1 - \sqrt{9\mu_1^2 - 60\mu_1 + 144}) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{e sue permutazioni, dove} \\ \mu_1 = \frac{1}{6}(20 + \sqrt{22}), \end{array}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{6}(12 - 3\mu_2 - \sqrt{9\mu_2^2 - 60\mu_2 + 144}) \\ y = \frac{1}{6}(12 - 3\mu_2 - \sqrt{9\mu_2^2 - 60\mu_2 + 144}) \\ z = \frac{1}{6}(12 - 3\mu_2 + \sqrt{9\mu_2^2 - 60\mu_2 + 144}) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{e sue permutazioni, dove} \\ \mu_2 = \frac{1}{6}(20 - \sqrt{22}). \end{array}$$

Calcolando il valore di f nei vari punti si scopre che quelli del primo blocco sono dei minimi assoluti (valore ≈ 0.9), mentre quelli del secondo sono dei massimi assoluti (valore ≈ 6.6). ■

Oss. 8.10 Dal punto di vista puramente formale, il teorema dei moltiplicatori mostra che sotto le opportune ipotesi, gli estremanti di f sui punti del vincolo $\psi = \mathbf{0}$ devono essere estremanti *liberi* per la funzione $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) := f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda} \cdot \psi(\mathbf{x})$ (notare che $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e che $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{n-m}$).

Oss. 8.11 Il teorema dei moltiplicatori è estremamente importante per le sue implicazioni teoriche: ad esempio l'invarianza formale della lagrangiana in meccanica razionale (ovvero il fatto che dato un sistema meccanico con certi requisiti 'minimi', le equazioni di moto si scrivano sempre nella forma $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$ per una certa funzione \mathcal{L} , qualunque sia il sistema di coordinate adottato) segue proprio dall'osservazione precedente. Un altro esempio: in meccanica statistica i numeri di occupazione dei vari livelli energetici sono stabiliti determinando la configurazione che rende massima la probabilità dello stato sotto il vincolo che la somma delle energie delle varie particelle sia pari all'energia totale del sistema ed il vincolo che il numero totale di molecole di ogni specie chimica sia fissato (in questo caso le componenti del vettore $\boldsymbol{\lambda}$ sono dette *potenziali chimici*). Invece, dal punto di vista eminentemente 'pratico' spesso il teorema dei moltiplicatori risulta di difficile applicazione poiché aggiunge nuove incognite, il vettore $\boldsymbol{\lambda}$, al problema. Talvolta,

infatti, è possibile esprimere in vincolo in forma parametrica e quando ciò è possibile è generalmente conveniente usare questa parametrizzazione per determinare i punti estremanti.

Esempio 8.15 Consideriamo l'Es. 8.13. Qui il vincolo può essere parametrizzato tramite la funzione

$$\Phi(\vartheta) := (\cos \vartheta, \frac{1}{2} \sin \vartheta)^T \quad \text{con } \vartheta \in [0, 2\pi).$$

I valori di f nei punti del vincolo sono quindi quelli assunti dalla mappa $g(\vartheta) := f|_V = (\cos \vartheta)^3 - 2(\frac{1}{2} \sin \vartheta)^2$. Gli estremi vincolati di f devono quindi essere estremi liberi di g e di conseguenza devono risolvere $dg/d\vartheta = 0$, ovvero $\cos \vartheta \sin \vartheta (3 \cos \vartheta + \frac{1}{2}) = 0$. I punti così trovati sono evidentemente gli stessi già determinati in precedenza. ■

La condizione espressa dal teorema dei moltiplicatori è meramente necessaria per l'esistenza di un punto estremante. Evidentemente c'è bisogno anche di un criterio sufficiente. Purtroppo l'unico criterio di una qualche validità generale non è particolarmente elegante e consiste semplicemente in un adattamento del solito criterio sull'incremento secondo.

Teorema 8.6 (condizione suff. estremi vincolati) *Sia U un aperto di \mathbb{R}^n e sia $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ una funzione di classe \mathcal{C}^2 . Sia \mathbf{p} un punto tale che $\psi(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ e supponiamo che il rango di $J\psi$ sia $n - m$ in \mathbf{p} . Sia V° il sostegno della varietà aperta regolare e di dimensione m costituita localmente dagli zeri di ψ . Sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ di classe \mathcal{C}^2 e supponiamo che \mathbf{p} sia un punto stazionario per f vincolato a V , ovvero sia una soluzione del sistema (8.1). Sia $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m})$ il vettore per il quale $\nabla f(\mathbf{p}) = \boldsymbol{\lambda} \cdot (J\psi)(\mathbf{p})$. Sia $(Hf)_\mathbf{p}$ l'operatore Hessiano di f nel punto \mathbf{p} e siano $(H\psi_1)_\mathbf{p}, \dots, (H\psi_{n-m})_\mathbf{p}$ gli operatori Hessiani delle componenti $\psi_1, \dots, \psi_{n-m}$ di ψ nel punto \mathbf{p} . Definiamo*

$$(H_\psi f)_\mathbf{p} := (Hf)_\mathbf{p} - \sum_{j=1}^{n-m} \lambda_j (H\psi_j)_\mathbf{p}.$$

Allora

- Se $\langle \mathbf{v}, (H_\psi f)_\mathbf{p} \mathbf{v} \rangle > 0$ per ogni vettore $\mathbf{v} \in \ker(J\psi)(\mathbf{p})$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, allora \mathbf{p} è un punto di minimo relativo per f vincolato a V° .

- Se $\langle \mathbf{v}, (H_{\psi}f)_{\mathbf{p}} \mathbf{v} \rangle < 0$ per ogni vettore $\mathbf{v} \in \ker(J\psi)(\mathbf{p})$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, allora \mathbf{p} è un punto di massimo relativo per f vincolato a V° .
- Se esistono \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 nel $\ker(J\psi)(\mathbf{p})$, per i quali $\langle \mathbf{v}_1, (H_{\psi}f)_{\mathbf{p}} \mathbf{v}_1 \rangle > 0$ e $\langle \mathbf{v}_2, (H_{\psi}f)_{\mathbf{p}} \mathbf{v}_2 \rangle < 0$, allora \mathbf{p} non è né massimo né minimo per f vincolato a V° ed in tal caso è detto punto di sella.

Dim. Sia $\epsilon > 0$ e sia $\mathbf{L} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ una funzione di classe \mathcal{C}^2 per la quale $\psi(\mathbf{L}(t)) = \mathbf{0}$ per ogni t e con $\mathbf{L}(0) = \mathbf{p}$: tale mappa esiste in virtù del teorema di Dini e delle ipotesi assunte su ψ (in particolare si usa qui il fatto che ψ è di classe \mathcal{C}^2). Essa costituisce una curva regolare il cui sostegno è contenuto in V° e passante per \mathbf{p} . Osserviamo che f ha in \mathbf{p} un massimo (o minimo od una sella) vincolato a V° se e solo se $f \circ \mathbf{L}$ ha in $t = 0$ un massimo (o un minimo od una sella) per ogni mappa \mathbf{L} soddisfacente le richieste precedenti. Per derivazioni successive, da

$$\psi_j(\mathbf{L}(t)) = 0 \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon), \quad \forall j = 1, \dots, n-m,$$

seguono le relazioni

$$\begin{cases} \nabla \psi_j(\mathbf{L}(t)) \cdot \mathbf{L}'(t) = 0, & \forall t \in (-\epsilon, \epsilon), \\ \langle \mathbf{L}'(t), H\psi_j(\mathbf{L}(t)) \mathbf{L}'(t) \rangle + \nabla \psi_j(\mathbf{L}(t)) \cdot \mathbf{L}''(t) = 0, & \forall j = 1, \dots, n-m, \end{cases}$$

e quindi

$$(8.2) \quad \begin{cases} \nabla \psi_j(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{L}'(0) = 0, & \forall j = 1, \dots, n-m. \\ \langle \mathbf{L}'(0), H\psi_j(\mathbf{p}) \mathbf{L}'(0) \rangle + \nabla \psi_j(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{L}''(0) = 0, \end{cases}$$

Consideriamo lo sviluppo di Taylor di $f \circ \mathbf{L}$ in $t = 0$ al secondo ordine. Dalle relazioni (8.2) otteniamo che il termine di primo ordine è

$$\nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{L}'(0) = \boldsymbol{\lambda} \cdot (J\psi)(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{L}'(0) = 0.$$

Quello di secondo è

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{L}'(0), Hf(\mathbf{p}) \mathbf{L}'(0) \rangle + \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{L}''(0) \\ &= \langle \mathbf{L}'(0), Hf(\mathbf{p}) \mathbf{L}'(0) \rangle + \boldsymbol{\lambda} \cdot (J\psi)(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{L}''(0) \\ &= \langle \mathbf{L}'(0), Hf(\mathbf{p}) \mathbf{L}'(0) \rangle + \sum_{j=1}^{n-m} \lambda_j (\nabla \psi_j)(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{L}''(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \mathbf{L}'(0), Hf(\mathbf{p}) \mathbf{L}'(0) \rangle - \sum_{j=1}^{n-m} \lambda_j \langle \mathbf{L}'(0), H\psi_j(\mathbf{p}) \mathbf{L}'(0) \rangle \\
&= \langle \mathbf{L}'(0), (H_\psi f)_\mathbf{p} \mathbf{L}'(0) \rangle.
\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$f \circ \mathbf{L}(t) = f(\mathbf{p}) + \langle \mathbf{L}'(0), (H_\psi f)_\mathbf{p} \mathbf{L}'(0) \rangle \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Dallo sviluppo precedente segue la tesi una volta osservato che $\mathbf{L}'(0) \in \ker J\psi(\mathbf{p})$ e che dalle ipotesi assunte su ψ segue che ogni vettore di $\ker J\psi(\mathbf{p})$ è $\mathbf{L}'(0)$ per qualche funzione \mathbf{L} . ■

Esempio 8.16 Considerando l'Es. 8.13, trovare gli estremi di $f(x, y) = x^3 - y^2$ sulla ellisse $\psi(x, y) := x^2 + 4y^2 - 1 = 0$.

I punti stazionari vincolati sono:

$$(x, y) \in \{(\pm 1, 0), (0, \pm \frac{1}{2}), (-\frac{1}{6}, \pm \frac{\sqrt{35}}{12})\}.$$

Il gradiente di ψ è $(2x, 8y)$. I vettori \mathbf{v} dello spazio tangente sono quelli ortogonali al gradiente di ψ e quindi sono tutti i multipli scalari di $(8y, -2x)^T$. La matrice Hessiana di ψ è $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ e quella di f è $\begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

- In $(1, 0)$ abbiamo

$$\nabla\psi|_{(1,0)} = (2, 0), \quad \nabla f|_{(1,0)} = (3, 0), \quad \implies \lambda = 3/2.$$

Inoltre,

$$(H_\psi f)|_{(1,0)} = (Hf)|_{(1,0)} - \lambda(H\psi)|_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix}$$

e $\mathbf{v} = \alpha(0, -2)^T$, quindi $\langle \mathbf{v}, (H_\psi f)|_{(1,0)} \mathbf{v} \rangle = -56\alpha^2$ perciò $(1, 0)$ è un *massimo relativo*.

- In $(-1, 0)$ abbiamo

$$\nabla\psi|_{(-1,0)} = (-2, 0), \quad \nabla f|_{(-1,0)} = (3, 0), \quad \implies \lambda = -3/2.$$

Inoltre,

$$(H_\psi f)|_{(-1,0)} = (Hf)|_{(-1,0)} - \lambda(H\psi)|_{(-1,0)} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

e $\mathbf{v} = \alpha(0, 2)^T$, quindi $\langle \mathbf{v}, (H_{\psi}f)|_{(-1,0)} \mathbf{v} \rangle = 10\alpha^2$ perciò $(-1, 0)$ è un *minimo relativo*.

- In $(-\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{35}}{12})$ abbiamo

$$\nabla\psi|_{(-\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{35}}{12})} = (-\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{35}}{3}), \quad \nabla f|_{(-\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{35}}{12})} = (\frac{1}{12}, -\frac{\sqrt{35}}{6}), \quad \implies \lambda = -1/4.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} (H_{\psi}f)|_{(-\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{35}}{12})} &= (Hf)|_{(-\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{35}}{12})} - \lambda(H\psi)|_{(-\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{35}}{12})} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e $\mathbf{v} = \alpha(-\frac{2\sqrt{35}}{3}, -\frac{1}{3})^T$, quindi $\langle \mathbf{v}, (H_{\psi}f)|_{(-\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{35}}{12})} \mathbf{v} \rangle = -70\alpha^2/9$ perciò $(-\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{35}}{12})$ è un *massimo relativo*.

- In $(-\frac{1}{6}, -\frac{\sqrt{35}}{12})$ abbiamo

$$\nabla\psi|_{(-\frac{1}{6}, -\frac{\sqrt{35}}{12})} = (-\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{35}}{3}), \quad \nabla f|_{(-\frac{1}{6}, -\frac{\sqrt{35}}{12})} = (\frac{1}{12}, \frac{\sqrt{35}}{6}), \quad \implies \lambda = -1/4.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} (H_{\psi}f)|_{(-\frac{1}{6}, -\frac{\sqrt{35}}{12})} &= (Hf)|_{(-\frac{1}{6}, -\frac{\sqrt{35}}{12})} - \lambda(H\psi)|_{(-\frac{1}{6}, -\frac{\sqrt{35}}{12})} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e $\mathbf{v} = \alpha(\frac{2\sqrt{35}}{3}, -\frac{1}{3})^T$, quindi $\langle \mathbf{v}, (H_{\psi}f)|_{(-\frac{1}{6}, -\frac{\sqrt{35}}{12})} \mathbf{v} \rangle = -70\alpha^2/9$ perciò $(-\frac{1}{6}, -\frac{\sqrt{35}}{12})$ è un *massimo relativo*.

- In $(0, \frac{1}{2})$ abbiamo

$$\nabla\psi|_{(0, \frac{1}{2})} = (0, 4), \quad \nabla f|_{(0, \frac{1}{2})} = (0, -1), \quad \implies \lambda = -1/4.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} (H_{\psi}f)|_{(0, \frac{1}{2})} &= (Hf)|_{(0, \frac{1}{2})} - \lambda(H\psi)|_{(0, \frac{1}{2})} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e $\mathbf{v} = \alpha(-4, 0)^T$, quindi $\langle \mathbf{v}, (H_{\psi}f)|_{(0, \frac{1}{2})} \mathbf{v} \rangle = 8\alpha^2$ perciò $(0, \frac{1}{2})$ è un *minimo relativo*.

- In $(0, -\frac{1}{2})$ abbiamo

$$\nabla\psi|_{(0, -\frac{1}{2})} = (0, -4), \quad \nabla f|_{(0, -\frac{1}{2})} = (0, 1), \quad \implies \lambda = -1/4.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} (H_{\psi f})|_{(0, -\frac{1}{2})} &= (Hf)|_{(0, -\frac{1}{2})} - \lambda(H\psi)|_{(0, -\frac{1}{2})} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e $\mathbf{v} = \alpha(4, 0)^T$, quindi $\langle \mathbf{v}, (H_{\psi f})|_{(0, -\frac{1}{2})} \mathbf{v} \rangle = 8\alpha^2$ perciò $(0, -\frac{1}{2})$ è un *minimo relativo*. ■

Esempio 8.17 Determinare gli estremi di $f(x, y, z) = x^3 - 4xy^2 + z^3$ sul vincolo $\psi(x, y, z) = 0$ dove $\psi(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 - 1$.

Anzitutto osserviamo che $\nabla\psi \neq \mathbf{0}$ nei punti in cui $\psi = 0$ e che quindi possiamo determinare i punti stazionari vincolati risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla \psi \\ \psi = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 3x^2 - 4y^2 = 2\lambda x \\ -8xy = -2\lambda y \\ 3z^2 = 2\lambda z \\ x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

ottenendo i punti

$$(x, y, z) \in \{(0, 0, \pm 1), (\pm 1, 0, 0), \pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})\}.$$

Le matrici hessiane di f ed ψ sono rispettivamente

$$Hf = \begin{pmatrix} 6x & -8y & 0 \\ -8y & -8x & 0 \\ 0 & 0 & 6z \end{pmatrix}, \quad H\psi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

ed il gradiente di ψ è $(2x, -2y, 2z)$. Analizziamo separatamente i vari punti.

- Punto $(0, 0, 1)$. Qui $\nabla\psi = (0, 0, 2)$ e $\nabla f = (0, 0, 3)$ quindi $\lambda = 3/2$, per cui

$$\begin{aligned} (H_{\psi}f)|_{(0,0,1)} &= (Hf)|_{(0,0,1)} - \lambda(H\psi)|_{(0,0,1)} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Inoltre, il generico vettore \mathbf{v} appartenente allo spazio tangente è in realtà il generico vettore perpendicolare a $\nabla\psi|_{(0,0,1)} = (0, 0, 2)$ e quindi è della forma

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Il prodotto scalare $\langle \mathbf{v}, (H_{\psi}f)|_{(0,0,1)} \mathbf{v} \rangle$ così è dato da:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, (H_{\psi}f)|_{(0,0,1)} \mathbf{v} \rangle &= (\alpha \ \beta) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &= (\alpha \ \beta) \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

gli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ hanno segni opposti quindi il punto $(0, 0, 1)$ è un *punto di sella*.

- Punto $(0, 0, -1)$. Procedendo come nel caso precedente si dimostra che anche questo punto è un *punto di sella*.
- Punto $(1, 0, 0)$. In questi punti $\nabla\psi(1, 0, 0) = (2, 0, 0)$ e $\nabla f(1, 0, 0) = (3, 0, 0)$ quindi $\lambda = 3/2$, per cui

$$\begin{aligned} (H_{\psi}f)|_{(1,0,0)} &= (Hf)|_{(1,0,0)} - \lambda(H\psi)|_{(1,0,0)} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Inoltre, il generico vettore \mathbf{v} appartenente allo spazio tangente è il generico vettore perpendicolare a $\nabla\psi|_{(0,0,1)} = (2, 0, 0)$ e quindi è della forma

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Il prodotto scalare $\langle \mathbf{v}, (H_{\psi}f)|_{(1,0,0)} \mathbf{v} \rangle$ così è dato da:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, (H_{\psi}f)|_{(1,0,0)} \mathbf{v} \rangle &= (\alpha \ \beta) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &= (\alpha \ \beta) \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

gli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ sono negativi quindi il punto $(1, 0, 0)$ è un *punto di massimo relativo*.

- Punto $(-1, 0, 0)$. Procedendo come nel caso precedente si dimostra che anche è un *punto di sella*.
- Punto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Qui $\nabla\psi(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ e $\nabla f(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = (3/2, 0, 3/2)$ quindi $\lambda = 3/2\sqrt{2}$, per cui

$$\begin{aligned} (H_{\psi}f)|_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})} &= (Hf)|_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})} - \lambda(H\psi)|_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})} \\ &= \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -4\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Inoltre, il generico vettore \mathbf{v} appartenente allo spazio tangente è in realtà il generico vettore perpendicolare a $\nabla\psi|_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})} = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ e quindi è della forma

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Il prodotto scalare $\langle \mathbf{v}, (H_{\psi}f)|_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})} \mathbf{v} \rangle$ così è dato da:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, (H_{\psi}f)|_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})} \mathbf{v} \rangle &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

gli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} -5/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$ sono di segno opposto quindi il punto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ è un *punto di sella*.

- Punto $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}})$. Procedendo come nel caso precedente si dimostra che anche questo punto è un *punto di sella*.

■