

Lezioni di Analisi Matematica 3

corso di Laurea in Fisica

a.a. 2005-'06

G. Molteni

M. Vignati

VERSIONE PRELIMINARE 26.9.05

CAPITOLO 7

Il calcolo degli integrali multipli

Lo scopo di questo capitolo è fornire una tecnica che permette il calcolo dell'integrale di una funzione di n variabili, $n > 1$, senza ricorrere alla definizione data nel capitolo precedente. In breve, questa tecnica riduce il calcolo di un integrale multiplo (cioè rispetto ad n variabili) al calcolo di n integrali rispetto ad una sola variabile. Per molte funzioni sarà possibile sfruttare il legame tra l'integrazione secondo Lebesgue e quella secondo Riemann (vd. Sez. 6.6) ed utilizzare quindi le note tecniche di calcolo, basate essenzialmente sul Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.

Mantenendo una convenzione di scrittura già utilizzata in precedenza, indichiamo nel seguito un punto $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ sia come $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ sia come

$$\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n$$

dove, ovviamente, $1 \leq m, k < n$ e $m + k = n$.

Nello stesso spirito, se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e se $f \in L(E)$, indichiamo l'integrale di f su E indifferentemente con uno dei simboli

$$\int_E f \quad , \quad \int_E f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad , \quad \int_E f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} .$$

7.1. Il teorema di Fubini

Teorema 7.1 *Siano $1 \leq m, k < n$ con $m + k = n$, e sia $f \in L(\mathbb{R}^n)$. Allora:*

- i. Per q.o. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ la funzione $f(\mathbf{x}, \cdot)$ è integrabile in \mathbb{R}^k e per q.o. $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ la funzione $f(\cdot, \mathbf{y})$ è integrabile in \mathbb{R}^m .*
- ii. Le funzioni $\int_{\mathbb{R}^k} f(\cdot, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$ e $\int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \cdot) d\mathbf{x}$ sono integrabili in \mathbb{R}^m e in \mathbb{R}^k rispettivamente.*
- iii. Vale l'eguaglianza*

$$(7.1) \quad \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x} .$$

Le quantità presenti al I e al III membro della (7.1) sono dette *integrali iterati*.

Oss. 7.1 La scelta $k = 1$, $m = n - 1$ ci porta ad avere

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(\mathbf{x}, y) dy \right) d\mathbf{x}$$

e questa eguaglianza può anche essere scritta come

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) dz_n \right) dz_1 \dots dz_{n-1}.$$

Ripetendo questa operazione in modo da isolare una variabile alla volta otteniamo

$$(7.2) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \dots \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) dz_n \right) dz_{n-1} \right) \dots dz_2 \right) dz_1.$$

Oss. 7.2 Dall'enunciato del teorema precedente è anche chiaro che il ruolo delle variabili è completamente interscambiabile. Perciò il valore dell'integrale $\int_{\mathbb{R}^n} f$ può anche essere calcolato come

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \dots \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) dz_1 \right) dz_2 \right) \dots dz_{n-1} \right) dz_n$$

oppure permutando in qualsiasi modo l'ordine delle variabili di integrazione.

Oss. 7.3 Tra le conseguenze della *i.* possiamo leggere che quasi ogni $f(\mathbf{x}, \cdot)$ è misurabile in \mathbb{R}^k ; in realtà, per ottenere questo risultato è necessario molto meno dell'ipotesi $f \in L(\mathbb{R}^n)$. Si può dimostrare che la sola ipotesi $f \in \mathfrak{m}(\mathbb{R}^n)$ è sufficiente a garantire la misurabilità in \mathbb{R}^k delle restrizioni $f(\mathbf{x}, \cdot)$, per quasi ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$.

Applicando quest'ultima osservazione alla funzione caratteristica di un insieme $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ otteniamo

Teorema 7.2 Sia $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Allora l'insieme

$$(7.3) \quad E(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E\}$$

è misurabile in \mathbb{R}^k , per q.o. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$.

Gli insiemi in (7.3) sono detti *sezioni* di E .

Nel caso di un insieme $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e di una $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, pensiamo di estendere la funzione a tutto \mathbb{R}^n assegnandole valore nullo fuori da E (in pratica, considerando la $f\chi_E$); possiamo così applicare a questa funzione quanto fin qui enunciato, ottenendo il seguente risultato.

Teorema 7.3 (G. Fubini) Siano $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ con $n = m + k$, $1 \leq m, k < n$ ed $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ con $f \in \mathfrak{m}(E)$.

- i. Per quasi ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ la funzione $f(\mathbf{x}, \cdot)$ è misurabile in $E(\mathbf{x})$. Se poi $f \in L(E)$:
- ii. Per quasi ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ la funzione $f(\mathbf{x}, \cdot)$ è integrabile in $E(\mathbf{x})$.
- iii. La funzione $\mathbf{x} \mapsto \int_{E(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$ è integrabile in \mathbb{R}^m .
- iv. Vale la relazione

$$(7.4) \quad \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{E(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x} = \int_E f .$$

Inoltre, tutte le precedenti affermazioni rimangono valide scambiando m con k ed \mathbf{x} con \mathbf{y} .

7.2. Il teorema di Tonelli

L'equivalenza, espressa dalla formula (7.2), tra un integrale multiplo ed un integrale iterato permette di utilizzare tutti gli strumenti abituali del calcolo integrale, almeno nei casi in cui è possibile parlare di integrabilità secondo Riemann. Tuttavia, per applicare la formula (7.2) dobbiamo poter garantire l'integrabilità della funzione e i pochi criteri fino ad ora incontrati (vd. Cap. 6, Sez. 6.4) non sono facilmente utilizzabili per fare ciò.

D'altra parte, può anche accadere che tutti gli integrali iterati di una funzione esistano e coincidano tra loro, senza che questo implichi che la funzione sia integrabile e quindi che la (7.2) abbia senso.

Esempio 7.1 Dividiamo \mathbb{R}^2 in quadrati aperti di lato 1, utilizzando le famiglie delle rette verticali $\{x = k, k \in \mathbb{Z}\}$ ed orizzontali $\{y = h, h \in \mathbb{Z}\}$. Costruiamo la funzione f assegnandole valore $+1$ nei quadrati attraversati dalla bisettrice del I e III quadrante, valore -1 in quelli attraversati dalla bisettrice del II e IV quadrante, e valore 0 altrove. Lungo una qualsiasi sezione verticale od orizzontale la funzione f è integrabile ed ha integrale nullo, per cui

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy = 0 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx .$$

Tuttavia la funzione f non è integrabile in \mathbb{R}^2 , in quanto non lo è $|f|$; infatti, $|f|$ assume valore 1 in infiniti quadrati di area 1 e quindi $\int_{\mathbb{R}^2} |f| = +\infty$. ■

Benché questo esempio mostri che l'esistenza di ogni integrale iterato di f in E , ed il fatto che tutti abbiano lo stesso valore, non sono condizioni sufficienti per garantire l'integrabilità della funzione, questo può accadere solo per funzioni che non hanno segno costante. Infatti, vale il

Teorema 7.4 (L. Tonelli) *Siano $1 \leq m, k < n$ con $m + k = n$ e sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile. Allora:*

- i. La funzione $\int_{\mathbb{R}^k} f(\cdot, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$ è definita q.o. e misurabile in \mathbb{R}^m e la funzione $\int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \cdot) d\mathbf{x}$ è definita q.o. e misurabile in \mathbb{R}^k .*
- ii. Vale l'eguaglianza*

$$(7.5) \quad \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z}.$$

Oss. 7.4 Nel Cap. 6, Sez. 6.1 è stato definito l'integrale per ogni funzione misurabile e non-negativa. Questo fatto garantisce l'esistenza del terzo termine presente nella (7.5). Inoltre, per l'Oss. 7.3 sono misurabili (e ovviamente non-negative) le funzioni $f(\mathbf{x}, \cdot)$ e $f(\cdot, \mathbf{y})$, per quasi ogni scelta di $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ e di $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$. Perciò, sono definite q.o., e non-negative, le funzioni $\int_{\mathbb{R}^k} f(\cdot, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$ e $\int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \cdot) d\mathbf{x}$. La loro misurabilità, espressa dalla prima parte della tesi, garantisce che i primi due termini presenti nella (7.5) abbiano senso.

Oss. 7.5 Il precedente risultato può ovviamente essere esteso a funzioni misurabili e non-negative definite in insiemi $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. In questo caso gli integrali iterati presenti nella (7.5) vanno calcolati sulle opportune sezioni di E .

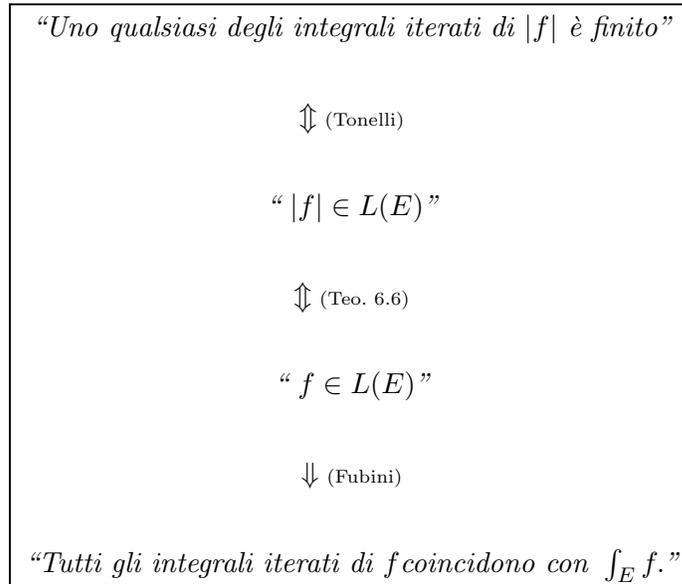
7.3. Il criterio di Fubini-Tonelli

Per una qualsiasi insieme $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ siamo ora in grado di trovare una soluzione, in termini di integrali iterati, per i seguenti problemi:

Problema 1: “Data una funzione $f \in \mathbf{m}(E)$, come stabilire se è integrabile?”

Problema 2: “In caso affermativo, come calcolare il valore del suo integrale?”

Combinando i risultati delle due precedenti sezioni abbiamo



Esempio 7.2 Stabilire se $f \in L(E)$, dove

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

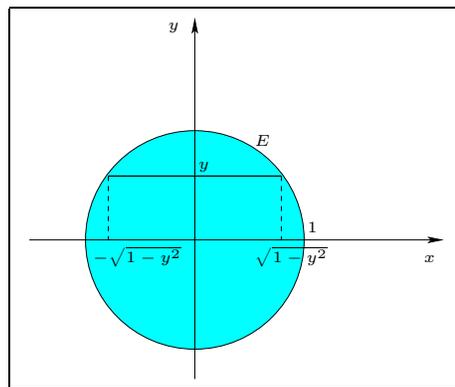


FIGURA 7.1.

L'insieme E è compatto, quindi misurabile. La funzione f è definita in $E \setminus \{(0, 0)\}$, e quindi q.o. in E ; inoltre, è continua in ogni punto del suo dominio e quindi misurabile. La sezione (orizzontale) $E(y)$ è vuota nel caso $|y| > 1$, mentre per $|y| \leq 1$ abbiamo $E(y) = [-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}]$ (vd. Fig. 7.1). La continuità delle restrizioni $f(\cdot, y)$ permette di calcolare gli integrali con la tecnica di Riemann e

quindi, per il teorema di Tonelli,

$$\begin{aligned}
 \int_E |f| &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{E(y)} |f(x, y)| dx \right) dy \\
 &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{|xy|}{x^2 + y^2} dx \right) dy \\
 &= \int_{-1}^1 |y| \left(2 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{x}{x^2 + y^2} dx \right) dy \\
 &= \int_{-1}^1 |y| \left(\log(x^2 + y^2) \Big|_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} \right) dy \\
 &= \int_{-1}^1 |y| [-\log(y^2)] dy \\
 &= -4 \int_0^1 y \log y dy = 1 < +\infty,
 \end{aligned}$$

perciò $f \in L(E)$. Per calcolare il valore di $\int_E f$ possiamo ora utilizzare il teorema di Fubini oppure notare che per ogni $y \in [-1, 1]$ la funzione $f(\cdot, y)$ è dispari e l'intervallo $E(y)$ è simmetrico rispetto ad $x = 0$, per cui tutti gli integrali $\int_{E(y)} f(x, y) dx$ sono nulli e quindi $\int_E f = 0$. ■

7.4. Cambiamento di variabili

In questa sezione vogliamo ottenere un risultato analogo a quello che, nella teoria dell'integrazione secondo Riemann, va sotto il nome di “metodo di integrazione per sostituzione”. Per far ciò, ci occupiamo dapprima di quel che accade quando ad un insieme misurabile di \mathbb{R}^n viene applicata una trasformazione.

Def. 7.1 Una mappa $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ viene detta *lipschitziana in A* se esiste una costante $c = c_A > 0$ tale che

$$(7.6) \quad \|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})\|_{\mathbb{R}^n} \leq c \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\mathbb{R}^m} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A.$$

Dai corsi precedenti è noto che una condizione sufficiente perché \mathbf{F} sia lipschitziana in A è che sia differenziabile e che tutte le derivate parziali prime siano limitate. Questo accade, ad esempio, quando A sia un insieme compatto contenuto in un aperto U , ed $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1(U)$.

Le mappe lipschitziane hanno un “buon” comportamento nei confronti degli insiemi misurabili; vale infatti il seguente risultato, di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 7.5 *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un insieme aperto e sia $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $n \geq m$. Supponiamo che \mathbf{F} sia lipschitziana in ogni compatto $K \subset U$. Allora, per ogni insieme misurabile $E \subseteq U$ accade che:*

- i. L'insieme $\mathbf{F}(E)$ è misurabile in \mathbb{R}^n .*
- ii. Se $n > m$, la misura (n -dimensionale) di $\mathbf{F}(E)$ è nulla.*

Def. 7.2 Una mappa $\Phi : U \rightarrow V$ tra due sottoinsiemi aperti di \mathbb{R}^n è un *diffeomorfismo (globale)* se è biunivoca, ed inoltre se $\Phi \in \mathcal{C}^1(U)$ ed anche $\Phi^{-1} \in \mathcal{C}^1(V)$.

Questa nozione, specialmente nella sua forma più debole di *diffeomorfismo locale*, verrà trattata più a fondo nei capitoli successivi.

Oss. 7.6 La differenziabilità della funzione inversa Φ^{-1} implica l'esistenza della matrice jacobiana $J(\Phi^{-1})$ in ogni punto $\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x}) \in V$; poiché $J(\Phi^{-1})(\Phi(\mathbf{x})) = (J\Phi)^{-1}(\mathbf{x})$, questo significa che la matrice $J\Phi(\mathbf{x})$ deve essere invertibile in ogni $\mathbf{x} \in U$, ovvero

$$(7.7) \quad \det J\Phi(\mathbf{x}) \neq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in U .$$

Questa condizione non è sufficiente, da sola, a garantire che Φ sia un diffeomorfismo tra l'aperto U e l'immagine $V = \Phi(U)$ (questo insieme è aperto per il Teo. 3.6). Se però alla (7.7) uniamo la richiesta che Φ sia iniettiva, allora è possibile dimostrare che $\Phi : U \rightarrow \Phi(U) \subseteq V$ è un diffeomorfismo.

Ovviamente se $\Phi : U \rightarrow V$ è un diffeomorfismo tra aperti di \mathbb{R}^n allora la mappa Φ è lipschitziana in ogni compatto $K \subset U$, e pure Φ^{-1} è lipschitziana in ogni compatto di V , perciò

Corollario 7.1 *Siano U e V aperti in \mathbb{R}^n e sia $\Phi : U \rightarrow V$ un diffeomorfismo. Allora, un insieme $E \subseteq V$ è misurabile se e solo se l'insieme $\tilde{E} = \Phi^{-1}(E) \subseteq U$ è misurabile.*

Oltre a conservare la misurabilità degli insiemi, i diffeomorfismi conservano anche, per composizione, la misurabilità delle funzioni e, in un certo senso, la

loro integrabilità. Enunciamo questo risultato che, come vedremo nelle prossime sezioni, ha grande importanza per il calcolo esplicito di alcuni integrali.

Teorema 7.6 *Siano U e V aperti in \mathbb{R}^n ed $\Phi : U \rightarrow V$ un diffeomorfismo. Sia $E \subseteq V$ un insieme misurabile e sia $\tilde{E} := \Phi^{-1}(E)$. Sia $f : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e sia $\tilde{f} := f \circ \Phi : U \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Allora:*

- i. La funzione $f : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è misurabile in V se e solo se la funzione $\tilde{f} := f \circ \Phi$ è misurabile in U .*
- ii. $f \in L(E)$ se e solo se $\tilde{f} |\det J\Phi| \in L(\tilde{E})$ ed in questo caso*

$$(7.8) \quad \begin{aligned} \int_E f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} &= \int_{\tilde{E}} \tilde{f}(\mathbf{x}) |\det J\Phi(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \\ &= \int_{\tilde{E}} f(\Phi(\mathbf{x})) |\det J\Phi(\mathbf{x})| d\mathbf{x} . \end{aligned}$$

- iii. se f è a valori non negativi, allora*

$$\int_E f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \pm\infty \quad \text{se e solo se} \quad \int_{\tilde{E}} f(\Phi(\mathbf{x})) |\det J\Phi(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = \pm\infty .$$

- iv. Come caso particolare, se utilizziamo $f = \chi_E$ abbiamo*

$$(7.9) \quad m_n(E) = \int_{\tilde{E}} |\det J\Phi(\mathbf{x})| d\mathbf{x} .$$

7.5. Alcuni cambiamenti di variabili

A] Coordinate polari nel piano

Se dal piano cartesiano \mathbb{R}^2 eliminiamo la semiretta $Z := \{(x, y) : x \geq 0; y = 0\}$ otteniamo l'aperto $V := \mathbb{R}^2 \setminus Z$ che può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'aperto $U := (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ per mezzo della mappa

$$U \ni (\rho, \vartheta) \mapsto (x, y) = \Phi(\rho, \vartheta) := (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \in V .$$

vd. Fig. 7.2.

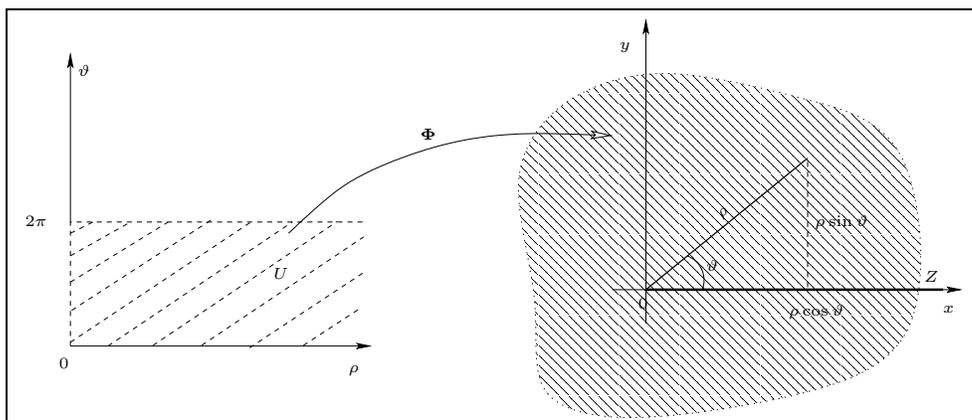


FIGURA 7.2.

Per questa mappa si ha

$$J\Phi(\rho, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\rho \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \rho \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \det J\Phi(\rho, \vartheta) = \rho > 0,$$

per cui, per quanto detto nell'Oss. 7.6, $\Phi : U \rightarrow V$ è un diffeomorfismo.

L'insieme Z ha ovviamente misura (bidimensionale) nulla; questo implica che per ogni insieme misurabile $E \subseteq \mathbb{R}^2$ e per ogni funzione $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ per la quale esista l'integrale $\int_E f$, si ha $\int_E f = \int_{E \setminus Z} f$. Perciò se indichiamo, seguendo le notazioni del Teor. 7.6,

$$\tilde{f}(\rho, \vartheta) := f(\Phi(\rho, \vartheta)) = f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta)$$

e

$$\widetilde{(E \setminus Z)} := \Phi^{-1}(E \setminus Z)$$

otteniamo

$$(7.10) \quad \int_E f(x, y) dx dy = \int_{\widetilde{(E \setminus Z)}} \tilde{f}(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta.$$

Oss. 7.7 Il semiasse positivo delle ascisse può essere rimpiazzato da una qualsiasi altra semiretta uscente dall'origine. Talvolta può essere più comodo usare il semiasse negativo delle ascisse, ed utilizzare come insieme U l'aperto $(0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$.

Esempio 7.3 Calcolare l'integrale $\int_E f$ dove $f(x, y) = y$ ed

$$E := \{(x, y) : 0 \leq y; x + y \geq 0; x^2 + y^2 \leq 3\}.$$

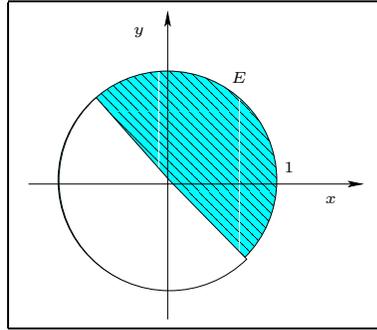


FIGURA 7.3.

La regione E è la parte del cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{3}$ situata nel semipiano superiore e a destra della bisettrice del II quadrante (vd. Fig. 7.3). A meno di insiemi di misura nulla essa è esprimibile in coordinate polari come

$$\tilde{E} = \{(\rho, \vartheta) : 0 \leq \rho \leq \sqrt{3}; 0 \leq \vartheta \leq 3\pi/4\}$$

per cui

$$\int_E f = \int_{\tilde{E}} \tilde{f}(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta = \left(\int_0^{\sqrt{3}} \rho^2 d\rho \right) \left(\int_0^{3\pi/4} \sin \vartheta d\vartheta \right) = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right).$$

■

Esempio 7.4 Calcolare il valore dell'integrale $I := \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$.

Si tratta dell'integrale di Lebesgue di una funzione di una sola variabile reale; l'integrale è certamente convergente, perché $0 \leq f(x) \leq \frac{c}{1+x^2}$ per qualche $c > 0$. Poiché f ha segno costante possiamo trattarlo come integrale improprio di Riemann. Tuttavia, non riusciamo ad esprimere una primitiva di f per mezzo di un'espressione che coinvolga un numero finito di funzioni elementari. In questo caso risulta conveniente passare alla funzione di due variabili $g(x, y) := f(x)f(y) = e^{-x^2-y^2}$. Infatti

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) dy \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) dx dy = \int_{(0, +\infty) \times (0, 2\pi)} \tilde{g}(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta \\ &= \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta \right) d\rho = 2\pi \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho \end{aligned}$$

$$= 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-s} ds = \pi$$

e quindi otteniamo $I = \sqrt{\pi}$. ■

B] Coordinate cilindriche nello spazio

L'aperto $U := (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme $V := \mathbb{R}^3 \setminus Z$, dove $Z := \{(x, y, z) : x \geq 0; y = 0\}$ è il semipiano che contiene l'asse z ed il semiasse positivo delle x . Questa corrispondenza biunivoca può essere realizzata tramite la mappa

$$\Phi : (\rho, \vartheta, z) \in U \mapsto (x, y, z) = (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta, z) \in V.$$

Per questa mappa si ha

$$J\Phi(\rho, \vartheta, z) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\rho \sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \rho \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \det J\Phi(\rho, \vartheta, z) = \rho > 0,$$

e quindi $\mathbf{F} : U \rightarrow V$ è un diffeomorfismo.

La misura (tridimensionale) di Z è nulla e quindi per ogni insieme misurabile $E \subseteq \mathbb{R}^3$ e per ogni funzione $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ per la quale esista l'integrale $\int_E f$, si ha

$$(7.11) \quad \int_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\widetilde{(E \setminus Z)}} \tilde{f}(\rho, \vartheta, z) \rho d\rho d\vartheta dz$$

dove

$$\tilde{f}(\rho, \vartheta, z) := f(\Phi(\rho, \vartheta, z)) = f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta, z) \quad \text{e} \quad \widetilde{(E \setminus Z)} := \Phi^{-1}(E \setminus Z).$$

Esempio 7.5 *Calcolare il volume della regione E compresa tra la sfera di centro $(0, 0, R)$ e raggio R , ed il cono di equazione $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, contenente il centro della sfera.*

La regione può essere descritta come $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2; z \geq 2\sqrt{x^2 + y^2}\}$ e questo equivale a chiedere

$$2\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq R + \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}.$$

Passando a coordinate cilindriche, a meno di insiemi di misura nulla dobbiamo calcolare il volume della regione $\tilde{E} := \{(\rho, \vartheta, z) : 2\rho \leq z \leq R + \sqrt{R^2 - \rho^2}\}$

e quindi non abbiamo limitazioni su $\vartheta \in (0, 2\pi)$, mentre ρ deve soddisfare la restrizione $0 \leq \rho \leq \frac{4}{5}R$ (vd. Fig. 7.4).

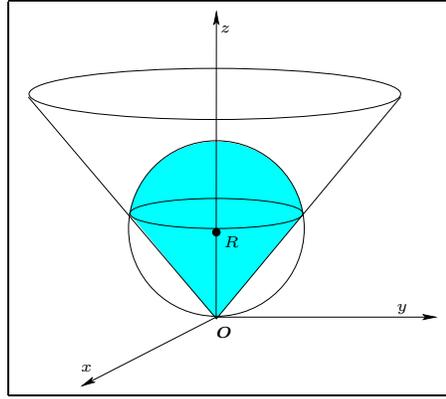


FIGURA 7.4.

Così

$$\begin{aligned} m_3(E) &= \int_0^{4R/5} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{2\rho}^{R+\sqrt{R^2-\rho^2}} dz \right) d\vartheta \right) \rho d\rho \\ &= 2\pi \int_0^{4R/5} \left(R + \sqrt{R^2 - \rho^2} - 2\rho \right) \rho d\rho \\ &= \dots = \frac{12}{25}\pi R^3. \end{aligned}$$

■

C] Coordinate sferiche in \mathbb{R}^3

L'insieme $V := \mathbb{R}^3 \setminus Z$ con $Z := \{(x, y, z) : x \geq 0; y = 0\}$ può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme $U := (0, +\infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ tramite la mappa

$$\Phi : (\rho, \vartheta, \varphi) \in U \mapsto (x, y, z) = (\rho \sin \vartheta \cos \varphi, \rho \sin \vartheta \sin \varphi, \rho \cos \vartheta) \in V.$$

Qui $\rho := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ha il significato di distanza di (x, y, z) dall'origine, mentre le coordinate ϑ e φ hanno il ruolo di coordinate angolari: φ può essere letta come longitudine, e ϑ come co-latitudine (cioè $\vartheta \rightarrow 0^+$ ci porta verso il polo Nord della sfera di raggio ρ ; $\vartheta = \pi/2$ descrive i punti dell'equatore, situato sul piano xy ; $\vartheta \rightarrow \pi^-$ ci porta verso il polo Sud) (vd. Fig. 7.5).

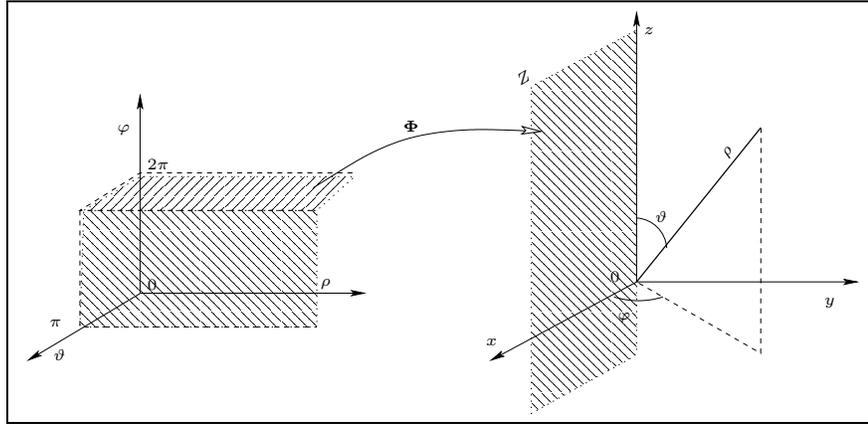


FIGURA 7.5.

Per la mappa Φ abbiamo

$$J\Phi(\rho, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \rho \cos \vartheta \cos \varphi & -\rho \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & \rho \cos \vartheta \sin \varphi & \rho \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -\rho \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\det J\Phi(\rho, \vartheta, \varphi) = \rho^2 \sin \vartheta > 0 \quad \text{in } U.$$

Quindi $\Phi : U \rightarrow V$ è un diffeomorfismo; per ogni insieme misurabile $E \subseteq \mathbb{R}^3$ e per ogni funzione $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ per la quale esista l'integrale $\int_E f$ si ha allora

$$(7.12) \quad \int_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\widetilde{(E \setminus Z)}} \tilde{f}(\rho, \vartheta, \varphi) \rho^2 \sin \vartheta d\rho d\vartheta d\varphi$$

dove

$$\tilde{f}(\rho, \vartheta, \varphi) := f(\Phi(\rho, \vartheta, \varphi)) = f(\rho \sin \vartheta \cos \varphi, \rho \sin \vartheta \sin \varphi, \rho \cos \vartheta).$$

Esempio 7.6 Calcolare il volume della regione E dell'Es. 7.5, utilizzando coordinate sferiche.

Le condizioni $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2; z \geq 2\sqrt{x^2 + y^2}\}$ vengono tradotte in coordinate sferiche come

$$\begin{cases} \rho^2 - 2R\rho \cos \vartheta \leq 0 \\ \rho \cos \vartheta \geq 2\rho \sin \vartheta \end{cases}, \quad \begin{cases} \rho \leq 2R \cos \vartheta \\ \cos \vartheta \geq 2 \sin \vartheta \end{cases}, \quad \begin{cases} \rho \leq 2R \cos \vartheta \\ \tan \vartheta \leq 1/2 \end{cases}$$

che porta ad avere $0 < \vartheta \leq \vartheta_0$, dove $\vartheta_0 := \arctan(1/2)$ (e quindi $\sin \vartheta_0 = 1/\sqrt{5}$, $\cos \vartheta_0 = 1/\sqrt{5}$). Così

$$\begin{aligned} m_3(E) &= 2\pi \int_0^{\vartheta_0} \left(\int_0^{2R \cos \vartheta} \rho^2 d\rho \right) \sin \vartheta d\vartheta \\ &= \frac{16}{3} \pi R^3 \int_0^{\vartheta_0} \cos^3 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \\ &= \dots = \frac{12}{25} \pi R^3. \end{aligned}$$

■

D] Coordinate sferiche in \mathbb{R}^n

La funzione Φ che alle n variabili

$$(\rho, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}) \in U := (0, +\infty) \times (0, \pi) \times \dots \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$$

associa i valori $\mathbf{x} = \Phi(\rho, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1})$ definiti come

$$\begin{cases} x_1 &= \rho \cos \vartheta_1 \\ x_2 &= \rho \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \\ x_3 &= \rho \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 \\ \dots & \dots \dots \dots \\ x_{n-1} &= \rho \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{n-2} \cos \vartheta_{n-1} \\ x_n &= \rho \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{n-2} \sin \vartheta_{n-1} \end{cases}$$

realizza un diffeomorfismo tra U e $V := \mathbb{R}^n \setminus Z$, dove $Z := \{(x_1, \dots, x_n) : x_{n-1} \geq 0; x_n = 0\}$. È possibile dimostrare che

$$\det J\Phi(\rho, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}) = \rho^{n-1} (\sin \vartheta_1)^{n-2} (\sin \vartheta_2)^{n-3} \dots \sin \vartheta_{n-2}.$$

Così, per ogni insieme misurabile $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e per ogni funzione $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ per la quale esista l'integrale $\int_E f$ si ha

(7.13)

$$\begin{aligned} &\int_E f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{\widetilde{(E \setminus Z)}} \tilde{f}(\rho, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}) \rho^{n-1} (\sin \vartheta_1)^{n-2} (\sin \vartheta_2)^{n-3} \dots \sin \vartheta_{n-2} d\rho d\vartheta_1 \dots d\vartheta_{n-1}. \end{aligned}$$