# Lezioni di Analisi Matematica 3

## corso di Laurea in Fisica

## a.a. 2005-'06

G. Molteni

M. Vignati

CAPITOLO 6

# L'integrale secondo Lebesgue

Anche in questo capitolo ci occupiamo di funzioni $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, definite in sottoinsiemi *misurabili* $E \subseteq \mathbb{R}^n$, a valori nell'insieme $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Lo scopo che ci proponiamo è definire, per alcune di queste funzioni, una nozione di integrale, detto *integrale secondo Lebesgue*[1], in modo che siano soddisfatte due proprietà: 1) nel caso $n = 1$ ed $E = [a, b]$ le funzioni integrabili secondo Riemann siano anche integrabili secondo Lebesgue e i due integrali coincidano; 2) se $f \geq 0$ l'integrale sia riconducibile alla misura $(n+1)$-dimensionale della regione sotto al grafico di $f$.

## 6.1. L'integrale per funzioni non-negative

Nella Sez. 3 del Cap. 5 abbiamo definito le funzioni semplici ed abbiamo visto che una funzione semplice e misurabile ammette un'unica rappresentazione

$$s = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{E_j} \tag{6.1}$$

con gli $E_j$ misurabili e mutuamente disgiunti, e i $c_j$ non nulli e distinti tra loro.

**Def. 6.1** Sia $s : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ semplice e misurabile. Il suo *integrale (secondo Lebesgue)* sull'intero dominio è definito come

$$\int_{\mathbb{R}^n} s(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} := \sum_{j=1}^{N} c_j\, m(E_j), \tag{6.2}$$

mentre il suo integrale relativo ad un sottoinsieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^n$ è definito da

$$\int_E s(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} := \int_{\mathbb{R}^n} s(\boldsymbol{x}) \cdot \chi_E(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}\ . \tag{6.3}$$

[1] Henri Lebesgue (1875-1941). La formulazione completa della sua teoria dell'integrazione è del 1902.

**Def. 6.2** Sia $f:\, E \to [0,+\infty]$, misurabile in $E$. Il suo *integrale (secondo Lebesgue) su* $E$ è definito come

$$\int_E f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} := \sup \int_E s(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \tag{6.4}$$

dove l'estremo superiore è calcolato rispetto a tutte le funzioni semplici e misurabili che soddisfano $0 \le s(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{x})$ in $E$.

È immediato osservare che questa definizione coincide con

$$\int_E f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} := \sup \sum_j \left[\inf_{\boldsymbol{x}\in E_j} f(\boldsymbol{x})\right] m\left(E_j\right) \tag{6.4'}$$

dove l'estremo superiore è calcolato al variare di tutte le partizioni finite $E = \cup_{j=1}^{N} E_j$ di $E$ in sottoinsiemi misurabili e mutuamente disgiunti.

Talvolta, per brevità di notazione, indichiamo l'integrale $\int_E f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$ con il simbolo

$$\int_E f\,d\boldsymbol{x} \quad \text{oppure} \quad \int_E f$$

mentre altre volte utilizziamo la notazione più estesa

$$\int_E f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n\,.$$

Dalla (6.4') sono chiare le proprietà di annullamento e di monotonìa dell'integrale rispetto alla funzione integranda e all'insieme di integrazione, espresse dal

**Teorema 6.1**

*i.* *Se $f \equiv 0$ in $E$, allora $\int_E f = 0$.*
*ii.* *Se $m(E) = 0$ ed $f \ge 0$ è misurabile in $E$, allora $\int_E f = 0$.*
*iii.* *Se $f$ e $g$ sono funzioni misurabili in $E$, con $0 \le g \le f$ in $E$, allora $\int_E g \le \int_E f$.*
*iv.* *Se $A, B$ sono insiemi misurabili, con $A \subset B$ e se $f \ge 0$ è misurabile in $B$, allora $\int_A f \le \int_B f$.*

### 6.2. Il sottografico di una funzione non-negativa

Per una funzione $f:\, E \to [0,+\infty]$ possiamo definire il *grafico* come l'insieme $\Gamma(f,E)$ dei punti $(\boldsymbol{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ per i quali $y = f(\boldsymbol{x}) < +\infty$, cioè

$$\Gamma(f,E) := \left\{(\boldsymbol{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \boldsymbol{x} \in E,\ y = f(\boldsymbol{x}) < +\infty\right\} \tag{6.5}$$

ed il *sottografico* $S(f,E)$ come la regione sottostante al grafico, ovvero

$$S(f,E) := \{(\boldsymbol{x},y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \boldsymbol{x} \in E, 0 \le y \le f(\boldsymbol{x}) \quad \text{se} \quad f(\boldsymbol{x}) < +\infty\} \cup \cup \left\{(\boldsymbol{x},y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \boldsymbol{x} \in E, 0 \le y < +\infty \quad \text{se} \quad f(\boldsymbol{x}) = +\infty\right\}. \tag{6.6}$$

Nel caso la funzione $f$ assuma il valore costante $c \in (0,+\infty]$ in $E$, il sottografico $S(f,E)$ è una regione cilindrica in $\mathbb{R}^{n+1}$, verticalmente illimitata se $c = +\infty$. Per regioni di questo tipo vale un risultato del tutto prevedibile, la cui dimostrazione, peraltro noiosa, omettiamo.

**Proposizione 6.1** *Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $c \in [0,+\infty]$, ed $s(\boldsymbol{x}) := c\chi_E(\boldsymbol{x})$. Se $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, si ha $S(s,E) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{n+1})$ e*

$$m_{n+1}(S(s,E)) = c \cdot m_n(E) = \int_{\mathbb{R}^n} s\ . \tag{6.7}$$

In particolare, il sottografico della funzione non-negativa, semplice e misurabile in (6.1) è misurabile (in $\mathbb{R}^{n+1}$) e ha misura

$$m_{n+1}\left(S(s,E)\right) = \sum_{j=1}^{N} c_j m_n(E_j) = \int_E s\ . \tag{6.8}$$

Come prima conseguenza di questo risultato, abbiamo

**Proposizione 6.2** *Siano $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ ed $f : E \to [0,+\infty]$, misurabile in $E$. Allora*

$$m_{n+1}\left(\Gamma(f,E)\right) = 0\ . \tag{6.9}$$

**Dim.** Per ogni $\varepsilon > 0$, il sottoinsieme di $E$ in cui $f$ assume valori finiti è unione disgiunta dei sottoinsiemi misurabili $E_j := f^{-1}([j\varepsilon,(j+1)\varepsilon))$, ed il grafico $\Gamma(f,E_j)$ è contenuto nel cilindro $E_j \times [j\varepsilon,(j+1)\varepsilon)$, $j \in \mathbb{N}$, la cui misura $(n+1)$-dimensionale è $\varepsilon m_n(E_j)$, per cui

$$m^*_{n+1}\left(\Gamma(f,E)\right) \le \sum_{j\in\mathbb{N}} m^*_{n+1}\left(\Gamma(f,E_j)\right) \le \varepsilon m_n(E);$$

dall'arbitrarietà di $\varepsilon$ segue la tesi se $m_n(E) < +\infty$. Se invece $m_n(E) = +\infty$, applichiamo questo risultato alla famiglia di insiemi limitati $\{E \cap B_k(\mathbf{0})\} \nearrow E$. ■

**Proposizione 6.3** *Siano $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ ed $f : E \to [0,+\infty]$, misurabile in $E$. Allora il sottografico $S(f,E)$ è misurabile (in $\mathbb{R}^{n+1}$).*

**Dim.** Per il Teorema 5.5 esiste una successione $\{s_k\}_{k\geq 1}$ di funzioni semplici, misurabili e nulle fuori da $E$ tali che $0 \leq s_k \uparrow f$. Perciò

$$S(s_k, E) \cup \Gamma(f, E) \nearrow S(f, E) \tag{6.10}$$

e la tesi segue dalla due proposizioni precedenti. ■

**Oss. 6.1** Viceversa, è possibile dimostrare che se il sottografico di una funzione non-negativa è misurabile (in $\mathbb{R}^{n+1}$) allora la funzione è misurabile. Questo fatto motiva la nostra scelta di utilizzare, in questo capitolo e nel seguente, solo funzioni misurabili.

**Teorema 6.2** *Siano $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ ed $f : E \to [0, +\infty]$, misurabile in $E$. Allora*

$$\int_E f = m_{n+1}\left(S(f, E)\right) \ . \tag{6.11}$$

**Dim.** Come nella dimostrazione della Prop. 6.3 troviamo una successione $\{s_k\}_{k\geq 1}$ di funzioni semplici, misurabili e nulle fuori da $E$ tali che $0 \leq s_k \uparrow f$, e per queste funzioni vale la (6.10). La definizione di $\int_E f$ come estremo superiore degli integrali delle semplici, misurabili e limitate da $f$ mostra che

$$\int_E f \geq \int_E s_k \overset{(6.8)}{=} m_{n+1}(S(s_k, E)) \overset{(6.9)}{=} m_{n+1}(S(s_k, E) \cup \Gamma(f, E)).$$

Per la (6.10) sappiamo che $m_{n+1}(S(s_k, E) \cup \Gamma(f, E))$ tende a $m_{n+1}(S(f, E))$ e quindi passando al limite nella relazione precedente otteniamo

$$\int_E f \geq m_{n+1}\left(S(f, E)\right) \ . \tag{6.12}$$

Viceversa, sia $s$ una qualsiasi funzione semplice, misurabile e per la quale $s(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x})$ per ogni $\boldsymbol{x} \in E$. Allora $S(s, E) \subseteq S(f, E)$ e quindi

$$\int_E s = m_{n+1}(S(s, E)) \leq m_{n+1}(S(f, E)),$$

dove la prima uguaglianza è giustificata dalla (6.8). Passando all'estremo superiore su tutte le $s$ semplici, misurabili e con $s(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x})$ abbiamo

$$\int_E f \leq m_{n+1}\left(S(f, E)\right) \ . \tag{6.13}$$

Tenendo conto di (6.12) e (6.13) la dimostrazione è completa. ■

## 6.3. Proprietà dell'integrale di funzioni non-negative

**Proposizione 6.4** *Sia $f \in \mathfrak{m}(E)$, $f \geq 0$, ed $E = \cup_j E_j$ unione numerabile di insiemi misurabili e mutuamente disgiunti. Allora*

$$\int_E f = \sum_j \int_{E_j} f \; . \tag{6.14}$$

**Dim.** Il sottografico $S(f, E)$ è unione numerabile e disgiunta degli $S(f, E_j)$ e la tesi segue da (6.11) e dal Teor. 4.5. ■

**Teorema 6.3 (diseguaglianza di Tchebyshev)** *Sia $f \in \mathfrak{m}(E)$, $f \geq 0$; per ogni $a > 0$ vale la diseguaglianza*

$$m_n\left(\{\boldsymbol{x} \in E :\, f(\boldsymbol{x}) > a\}\right) \leq \frac{1}{a} \int_E f \; . \tag{6.15}$$

**Dim.** L'insieme $E_a := \{\boldsymbol{x} \in E :\, f(\boldsymbol{x}) > a\}$ è misurabile; per la (6.7) ed il Teor. 6.1 abbiamo

$$a\, m_n(E_a) = \int_{E_a} a \leq \int_{E_a} f \leq \int_E f \; .$$

■

**Corollario 6.1** *Sia $f \in \mathfrak{m}(E)$, $f \geq 0$; se $\int_E f$ è finito, allora $f < +\infty$ q.o. in $E$.*

**Dim.** Se $f$ assume valore $+\infty$ sul sottoinsieme (misurabile) $E_\infty \subseteq E$, da (6.15) abbiamo

$$m_n(E_\infty) \leq m_n(E_a) \leq \frac{1}{a} \int_E f$$

per ogni $a > 0$; poiché $\int_E f$ è finito risulta $m_n(E_\infty) = 0$. ■

I risultati *i.-iii.* del Teor. 6.1 possono essere generalizzati nel modo seguente.

**Teorema 6.4**

*i.* *Siano $f, g \in \mathfrak{m}(E)$, $f, g \geq 0$. Se $g \leq f$ q.o. in $E$, allora $\int_E g \leq \int_E f$. In particolare, $f = g$ q.o. in $E$ implica $\int_E f = \int_E g$.*

*ii.* *Sia $f \in \mathfrak{m}(E)$, $f \geq 0$. Allora $\int_E f = 0$ se e solo se $f = 0$ q.o. in $E$.*

**Dim.**

*i.* L'insieme $E$ è unione disgiunta dei due sottoinsiemi misurabili

$$A := \{\boldsymbol{x} \in E : \, g(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x})\} \quad \text{e} \quad Z := \{\boldsymbol{x} \in E : \, g(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{x})\}$$

ed inoltre $m_n(Z) = 0$. Per la Prop. 6.4 e il Teor. 6.1 abbiamo

$$\int_E g = \int_A g + \int_Z g = \int_A g \leq \int_A f = \int_A f + \int_Z f = \int_E f \, .$$

*ii.* Se $f = 0$ q.o., utilizziamo $g = 0$ nel punto precedente. Se $\int_E f = 0$ utilizziamo (6.15) con $a > 0$ arbitrario per avere $m_n(\{\boldsymbol{x} \in E : \, f(\boldsymbol{x}) > 0\}) = 0$, cioè $f = 0$ q.o. .

■

Una delle conseguenze di quest'ultimo teorema è la possibilità di definire l'integrale $\int_E f$ anche quando $f$ è definita solo quasi ovunque in $E$, ed è quasi ovunque non-negativa.

Il prossimo risultato esprime il comportamento lineare dell'integrale delle funzioni non-negative. Ne omettiamo la dimostrazione, che può essere facilmente dedotta direttamente dalla definizione (formula 6.4) o dall'eguaglianza, espressa dal Teor. 6.2, tra l'integrale di $f$ e la misura del suo sottografico.

**Teorema 6.5 (linearità)**

*i.* *Siano* $f \in \mathfrak{m}(E)$, $f \geq 0$, *e* $c \geq 0$. *Allora* $\int_E cf = c \int_E f$.
*ii.* *Siano* $f, g \in \mathfrak{m}(E)$, $f, g \geq 0$. *Allora* $\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$ .
*iii.* *Siano* $f, g \in \mathfrak{m}(E)$, *con* $0 \leq g \leq f$. *Se* $\int_E g < +\infty$, *si ha*

$$\int_E (f - g) = \int_E f - \int_E g \, .$$

## 6.4. L'integrale di Lebesgue per funzioni misurabili

Siano $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ ed $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile in $E$; abbiamo visto in (5.2) e (5.3) che $f = f^+ - f^-$, dove le funzioni $f^+$ ed $f^-$ sono misurabili e non-negative. Per queste due funzioni esistono allora gli integrali

$$\int_E f^+ \, , \, \int_E f^- \in [0, +\infty] \, . \tag{6.16}$$

**Def. 6.3** Se almeno uno dei due integrali in (6.16) è finito, diciamo che *esiste l'integrale di $f$ su $E$*, definito come

$$\int_E f := \int_E f^+ - \int_E f^- \,. \tag{6.17}$$

**Def. 6.4** Indichiamo con $L(E)$ l'insieme di tutte le $f \in \mathfrak{m}(E)$ per le quali entrambi gli integrali in (6.16) sono finiti. Le funzioni di $L(E)$ sono dette *integrabili (secondo Lebesgue) su $E$*.

**Oss. 6.2** L'integrale $\int_E f$, se esiste, può assumere uno qualsiasi dei valori di $[-\infty, +\infty]$. Invece, la classe $L(E)$ è costituita da tutte le funzioni $f$ misurabili in $E$ per le quali sono finiti entrambe gli integrali $\int_E f^+$ e $\int_E f^-$, e per queste funzioni si ha $\int_E f \in (-\infty, +\infty)$. Inoltre, a causa della (5.3), per queste funzioni si ha anche

$$\left|\int_E f\right| = \left|\int_E f^+ - \int_E f^-\right| \le \int_E f^+ + \int_E f^- = \int_E (f^+ + f^-) = \int_E |f| < +\infty \,.$$

Riassumendo:

**Teorema 6.6** *Sia $f \in \mathfrak{m}(E)$. Allora $f \in L(E)$ se e solo se $|f| \in L(E)$. In questo caso*

$$\left|\int_E f\right| \le \int_E |f| \,. \tag{6.18}$$

**Oss. 6.3** Per quanto osservato con il Teor. 6.4, l'esistenza dell'integrale $\int_E f$ ed il suo valore non vengono influenzati dal fatto che i valori assunti da $f$ siano modificati su un insieme di misura nulla. Perciò, nelle definizioni precedenti possiamo considerare funzioni che siano definite solo q.o. in $E$.

Molte delle proprietà dell'integrale contenute nella sezione precedente possono essere estese al caso di funzioni di segno qualunque. Ci limitiamo ad enunciare queste generalizzazioni.

**Teorema 6.7**

*i. Siano $f, g \in \mathfrak{m}(E)$, con $f \le g$ q.o. in $E$. Se $\int_E f$ e $\int_E g$ esistono, allora $\int_E f \le \int_E g$. In particolare, $f = g$ q.o. in $E$ implica $\int_E f = \int_E g$.*

*ii. Sia $f \in \mathfrak{m}(E)$. Se $\int_E f$ esiste ed $A$ è un sottoinsieme misurabile di $E$, allora $\int_A f$ esiste.*

*iii. Sia $f \in \mathfrak{m}(E)$. Se $m(E) = 0$ allora $\int_E f = 0$.*

*iv.* *Sia $f \in \mathfrak{m}(E)$. Se $\int_E f$ esiste, e se $E = \cup_j E_j$ è unione numerabile di insiemi misurabili e mutuamente disgiunti, allora*

$$\int_E f = \sum_j \int_{E_j} f \,. \tag{6.19}$$

*(Quest'ultima proprietà è anche nota come "Additività numerabile rispetto all'insieme di integrazione".)*

*v.* *Sia $f \in \mathfrak{m}(E)$. Se $\int_E f$ esiste, e se $c \in \mathbb{R}$, allora anche $\int_E cf$ esiste e $\int_E cf = c \int_E f$.*

**Teorema 6.8**

*i.* *(linearità) Siano $f, g \in L(E)$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Allora*

$$(af + bg) \in L(E) \quad e \quad \int_E (af + bg) = a \int_E f + b \int_E g \,.$$

*ii.* *Siano $f, g \in \mathfrak{m}(E)$, con $g \leq f$ q.o. in $E$. Se $g \in L(E)$ allora $\int_E f$ esiste e*

$$\int_E (f - g) = \int_E f - \int_E g \,.$$

**Teorema 6.9 (condizione sufficiente di integrabilità)** *Sia $f \in \mathfrak{m}(E)$ con*

$$|f| \leq g \quad q.o. \text{ in } E \qquad e \qquad g \in L(E). \tag{6.20}$$

*Allora $f \in L(E)$.*

**Dim.** Per la *i.* del Teor. 6.7 abbiamo $\int_E |f| \leq \int_E g < +\infty$, da cui $|f| \in L(E)$ e quindi $f \in L(E)$ per il Teor. 6.6. ■

Da questo risultato segue, in modo molto semplice, la dimostrazione del

**Corollario 6.2**

*i.* *Se $f \in L(E)$ e $g \in \mathfrak{m}(E)$, con $|g| \leq K$ q.o. in $E$, allora $fg \in L(E)$.*
*ii.* *Se $f \in \mathfrak{m}(E)$, $|f| \leq K$ q.o. in $E$ e se $m(E) < +\infty$, allora $f \in L(E)$.*
*iii.* *Se $f \in \mathcal{C}(E)$, con $E$ compatto, allora $f \in L(E)$.*

### 6.5. Integrazione e successioni di funzioni

Ci occupiamo ora dell'integrazione di una successione $\{f_k\}$ di funzioni misurabili. Più precisamente, siamo interessati a stabilire sotto quali condizioni è possibile scambiare tra loro l'operazione di passaggio al limite (rispetto a $k$) e quella del calcolo dell'integrale, ovvero quando sussiste l'eguaglianza

$$\int_E \left( \lim_{k\to+\infty} f_k \right) = \lim_{k\to+\infty} \int_E f_k \tag{6.21}$$

(ovviamente purché di $\lim_{k\to+\infty} f_k$ sia possibile parlare). Gli esempi seguenti mostrano che senza assumere ulteriori ipotesi la (6.21) è in generale falsa.

**Esempio 6.1** In $\mathbb{R}$ la successione di funzioni $f_k(x) = \frac{1}{k}\chi_{[0,k]}(x)$ converge puntualmente alla $f(x) \equiv 0$, mentre $\int_{\mathbb{R}} f_k = 1 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} f$ . ■

**Esempio 6.2** Nell'esempio precedente l'insieme di integrazione è illimitato e le funzioni $f_k$ non sono continue, ma non è questa la ragione per cui (6.21) non è valida. In $E = [0,1] \subset \mathbb{R}$, le funzioni

$$f_k(x) = \begin{cases} k^2 x & \text{se } x \in [0,1/k] \\ 2k - k^2 x & \text{se } x \in [1/k,2/k] \\ 0 & \text{se } x \in [2/k,1] \end{cases}$$

sono continue, e $f_k(x) \to f(x) \equiv 0$, eppure $\int_E f_k = m_2(S(f_k,E)) = 1 \neq 0 = \int_E f$. (vd. Fig. 6.1).

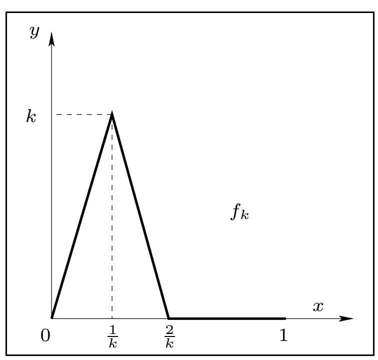


FIGURA 6.1.

■

Così, la convergenza puntuale non è sufficiente per ottenere la (6.21). Un primo risultato si ha con il

**Teorema 6.10 (Convergenza Monotòna)** *Siano $f_k \in \mathfrak{m}(E)$, tali che $f_k \uparrow f$ q.o. in $E$. Se esiste una funzione $g \in L(E)$ tale che $g \leq f_k$ q.o. in $E$ per ogni $k$, allora*

$$\int_E f_k \to \int_E f \; . \tag{6.22}$$

**Dim.** Supponiamo dapprima che tutte la $f_k$ siano non-negative; in questo caso possiamo utilizzare $g \equiv 0$. Inoltre, la funzione $f$ è misurabile per il Teor. 5.4. Per (6.11) e (6.9)

$$\int_E f_k = m_{n+1}\left(S(f_k, E)\right) = m_{n+1}\left(S(f_k, E) \cup \Gamma(f, E)\right) \; .$$

Poiché $S(f_k, E) \cup \Gamma(f, E) \nearrow S(f, E)$, dal Teor. 4.5 e ancora dalla (6.11) segue la tesi.
Il caso generale segue osservando che $0 \leq f_k - g \uparrow f - g$ q.o. in $E$, per cui

$$\int_E (f_k - g) \to \int_E (f - g) \; ;$$

dalla integrabilità di $g$, utilizzando la tesi del Teor. 6.8 ii, si ottiene la tesi. ■

**Oss. 6.4** La richiesta "*$g \leq f_k$ q.o. in $E$ per ogni $k$*", presente nel Teor. 6.10 e in forme simili anche in alcuni teoremi seguenti, può anche essere letta come "*$g \leq f_k$ per ogni $k$, q.o. in $E$*". Con la prima formulazione affermiamo che per ogni $k$ esiste un insieme $Z_k$, di misura nulla, tale che $g(\boldsymbol{x}) \leq f_k(\boldsymbol{x})$ per ogni $\boldsymbol{x} \in E \setminus Z_k$; con la seconda formulazione si afferma l'esistenza di un insieme $Z \subset E$, di misura nulla, e che $g(\boldsymbol{x}) \leq f_k(\boldsymbol{x})$ è valida per ogni $k$ e per ogni $\boldsymbol{x} \in E \setminus Z$. Le due formulazioni sono equivalenti perché l'unione numerabile di insiemi di misura nulla ha misura nulla (vd. Teor. 4.5).

**Corollario 6.3 (integrazione per serie, per funzioni non-negative)** *Siano $f_k \in \mathfrak{m}(E)$, $f_k \geq 0$. Allora*

$$\int_E \left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_E f_k\right) .$$

**Dim.** Le somme parziali $S_k := \sum_{j=1}^{k} f_j$ convergono in modo monotòno alla $S := \sum_{j=1}^{+\infty} f_j$ . ■

**Teorema 6.11 (convergenza uniforme)** *Sia $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, con $m(E) < +\infty$ e siano $f_k \in L(E)$ tali che $f_k \to f$ uniformemente in $E$. Allora $f \in L(E)$ e $\int_E f_k \to \int_E f$ .*

**Dim.** Per la convergenza uniforme abbiamo

$$\|f_k - f\|_{\infty,E} = \sup_{\boldsymbol{x}\in E} |f_k(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})| \to 0$$

e quindi la quantità $\|f_k - f\|_{\infty,E}$ è definitivamente minore di 1; la funzione $\chi_E$ è integrabile in $E$, poiché $E$ ha misura finita, quindi da

$$|f| \le |f_k| + |f - f_k| \le |f_k| + \chi_E \in L(E)$$

segue che anche $f \in L(E)$ (vd. Teor. 6.9). Inoltre

$$\left|\int_E f_k - \int_E f\right| \le \int_E |f - f_k| \le m(E)\,\|f_k - f\|_{\infty,E} \to 0$$

ed abbiamo la tesi. ■

**Oss. 6.5** L'ipotesi di finitezza della misura è essenziale per la validità della tesi nel teorema precedente. Infatti, senza tale ipotesi la tesi è generalmente falsa; ad esempio sia $f_k(x) = \frac{1}{k}\chi_{[-k,k]}(x)$. È chiaro che $f_k \to 0$ uniformemente in $\mathbb{R}$, e tuttavia

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} 2 = 2 \ne 0 = \int_{\mathbb{R}} 0\,dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} f_k\,dx.$$

Un altro risultato, molto utile nel seguito e che addirittura prescinde dall'esistenza della funzione limite, è il

**Teorema 6.12 (lemma di Fatou)** *Siano $f_k \in \mathfrak{m}(E)$.*

*i. Se esiste una funzione $g \in L(E)$ tale che $g \le f_k$ q.o. in $E$ per ogni $k$, allora*

$$\int_E \left(\liminf_{k\to+\infty} f_k\right) \le \liminf_{k\to+\infty} \left(\int_E f_k\right) . \tag{6.23}$$

*ii. Se esiste una funzione $G \in L(E)$ tale che $f_k \le G$ q.o. in $E$ per ogni $k$, allora*

$$\int_E \left(\limsup_{k\to+\infty} f_k\right) \ge \limsup_{k\to+\infty} \left(\int_E f_k\right) . \tag{6.24}$$

**Dim.**

*i.* Supponiamo dapprima che tutte la $f_k$ siano non-negative; in questo caso possiamo utilizzare $g \equiv 0$. La funzione $\liminf_{k\to+\infty} f_k$ è non-negativa e, per il Teor. 5.4, misurabile. Ricordiamo che viene definita per mezzo delle funzioni

$g_k := \inf_{j \geq k} f_j = \inf\{f_k, f_{k+1}, \dots\}$; queste formano una successione monotòna non-decrescente, che quindi converge al proprio estremo superiore, ovvero

$$0 \leq g_k \uparrow \liminf_{k \to +\infty} f_k = \sup_{k \geq 1} \left( \inf_{j \geq k} f_j \right) = \lim_{k \to +\infty} \left( \inf_{j \geq k} f_j \right) . \tag{6.25}$$

Dalla relazione $g_k \leq f_k$ e dal Teorema di Convergenza Monotòna abbiamo

$$\int_E (\liminf_{k \to +\infty} f_k) \longleftarrow \int_E g_k \leq \int_E f_k ,$$

e passando al calcolo del limite inferiore otteniamo la (6.23). Il caso generale segue applicando il Teor. 6.8 ii. alle funzioni non-negative $f_k - g$ .

*ii.* Applichiamo la (6.23) alle funzioni non-negative $G - f_k$, ricordando che

$$\liminf_{k \to +\infty} (-f_k) = - \limsup_{k \to +\infty} f_k .$$

■

**Oss. 6.6** L'esempio contenuto nella Oss. 6.5 mostra che la disuguaglianza (6.23) può essere stretta.

**Teorema 6.13 (Convergenza Dominata, H. Lebesgue)** *Siano $f_k \in \mathfrak{m}(E)$ con $f_k \to f$ q.o. in $E$. Se esiste una funzione $h \in L(E)$ tale che*

$$|f_k| \leq h \quad \text{q.o. in } E \text{ per ogni } k . \tag{6.26}$$

*Allora*

$$f \in L(E) \quad e \quad \int_E f_k \to \int_E f .$$

**Dim.** Poiché $f = \lim_{k \to +\infty} f_k = \liminf_{k \to +\infty} f_k = \limsup_{k \to +\infty} f_k$, utilizziamo il Lemma di Fatou con $-g := G := h$ per ottenere

$$\begin{aligned} \int_E f = \int_E \liminf_{k \to +\infty} f_k &\leq \liminf_{k \to +\infty} \left( \int_E f_k \right) \\ &\leq \limsup_{k \to +\infty} \left( \int_E f_k \right) \leq \int_E \left( \limsup_{k \to +\infty} f_k \right) = \int_E f \end{aligned}$$

ovvero l'esistenza di $\lim_{k \to +\infty} \int_E f_k = \int_E f$. ■

## 6.6. Relazioni con l'integrale di Riemann

Nel corso del primo anno di studi viene presentata la teoria dell'integrazione, per funzioni di una variabile reale, dovuta a Riemann [2]. Ricordiamo che le nozioni di integrabilità secondo Riemann e di integrale definito, $\int_a^b f$, vengono inizialmente introdotte solo per intervalli compatti $[a,b]$ e per funzioni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitate; mediante opportuni processi di limite queste due restrizioni possono essere eliminate, giungendo alla nozione di integrale improprio. In questa ultima sezione riportiamo, senza dimostrazione, alcuni dei legami che intercorrono tra l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ (definito o improprio) secondo Riemann e l'integrale $\int_{[a,b]} f(x)\,dx$ di Lebesgue nel caso uno-dimensionale.

**Teorema 6.14** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Se $f \in \mathcal{R}([a,b])$, allora $f \in L([a,b])$ e i due integrali coincidono, cioè*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_{[a,b]} f\ . \tag{6.27}$$

**Oss. 6.7** L'inclusione $\mathcal{R}([a,b]) \subset L([a,b])$ è stretta. Ad esempio, la funzione di Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}}$ è certamente Lebesgue-integrabile in $[a,b]$ perché è q.o. uguale alla funzione nulla, ma non è Riemann-integrabile, perché ogni sua somma superiore vale $(b-a)$ mentre ogni sua somma inferiore vale 0.

**Teorema 6.15** *Se la funzione $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $[a,M]$, ha segno costante in $[a,+\infty)$ ed esiste finito l'integrale improprio*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx := \lim_{M\to+\infty} \int_a^M f,$$

*allora $f \in L([a,+\infty))$ e*

$$\int_{[a,+\infty)} f = \int_a^{+\infty} f(x)\ dx\ .$$

**Oss. 6.8** La richiesta sul segno costante di $f$ è essenziale. Ad esempio, la funzione

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x}$$

[2] G. F. B. Riemann (1826-1866). La prima formulazione della sua teoria dell'integrazione è del 1854.

è Riemann integrabile in senso improprio sull'intervallo $[1,+\infty)$ perché, integrando per parti,

$$\int_1^M \frac{\sin(\pi x)}{x}\,dx = \left[-\frac{\cos(\pi x)}{\pi x}\right]_1^M - \frac{1}{\pi}\int_1^M \frac{\cos(\pi x)}{x^2}\,dx\ .$$

La funzione $\frac{\cos(\pi x)}{x^2}$ ammette certamente integrale improprio in $[1,+\infty)$, perché il suo valore assoluto è maggiorabile con $\frac{1}{x^2}$, e quindi

$$\int_1^{+\infty} f(x)\ dx = \lim_{M\to+\infty}\int_1^M f(x)\ dx = -\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{\cos(\pi x)}{x^2}\,dx$$

è il valore dell'integrale improprio cercato.
Invece $f\notin L([1,+\infty))$, difatti, usando la periodicità di $|\sin(\pi x)|$, la (6.19) e la (6.27), abbiamo

$$\begin{aligned}\int_{[1,+\infty)}|f| &= \sum_{k=1}^{+\infty}\int_{[k,k+1]}\frac{|\sin(\pi x)|}{x}\,dx \geq \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k+1}\left(\int_{[k,k+1]}|\sin(\pi x)|\,dx\right)\\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k+1} = +\infty\ .\end{aligned}$$

**Teorema 6.16** *Se la funzione $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $[a,c]$ con $c<b$, ha segno costante in $[a,b)$ ed esiste finito l'integrale improprio*

$$\int_a^b f(x)\ dx := \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\ dx,$$

*allora $f\in L([a,b))$ e*

$$\int_{[a,b)} f = \int_a^b f(x)\ dx.$$

**Oss. 6.9** A causa dei precedenti risultati, nei capitoli successivi utilizzeremo la notazione

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

per indicare, qualora esistano, sia l'integrale di Lebesgue $\int_{[a,b]} f$ di una $f:[a,b]\to\overline{\mathbb{R}}$, $-\infty\leq a,b\leq+\infty$, sia l'integrale (eventualmente improprio) di Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$.

Concludiamo enunciando un risultato che permette di caratterizzare le funzioni di $\mathcal{R}([a,b])$ in termini della misura di Lebesgue.

**Teorema 6.17** *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $-\infty < a \leq b < +\infty$, *una funzione limitata. Allora* $f \in \mathcal{R}([a, b])$ *se e solo se* $f$ *è continua q.o. in* $[a, b]$.

### 6.7. Integrali dipendenti da parametri

Sia $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e sia $T \subseteq \mathbb{R}^q$ un insieme di parametri. Vogliamo considerare il caso di una funzione $f : E \times T \to \overline{\mathbb{R}}$ che, per ogni valore fissato dei parametri $\boldsymbol{t} \in T$, soddisfa la condizione $f(\cdot, \boldsymbol{t}) \in L(E)$. Se questo accade, è possibile definire la funzione $F : T \to \mathbb{R}$

$$F(\boldsymbol{t}) := \int_E f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})\, d\boldsymbol{x} \tag{6.28}$$

e di questa funzione vogliamo studiare la dipendenza dai parametri $\boldsymbol{t}$.

Ci limitiamo ad enunciare alcuni risultati, segnalando che le dimostrazioni si possono ottenere con poca difficoltà, applicando il Teorema di Convergenza Dominata.

**Teorema 6.18** *Siano* $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $T \subseteq \mathbb{R}^q$ *e* $\boldsymbol{t}^* \in T$ *un punto di accumulazione per* $T$. *Sia* $f : E \times T \to \overline{\mathbb{R}}$ *tale che:*

*i.* $f(\cdot, \boldsymbol{t}) \in L(E)$ *per ogni* $\boldsymbol{t} \in T$;
*ii.* $f(\boldsymbol{x}, \cdot)$ *è continua nel punto* $\boldsymbol{t}^*$, *per quasi ogni* $\boldsymbol{x} \in E$;
*iii. esistono un intorno* $U(\boldsymbol{t}^*)$ *ed una funzione* $g \in L(E)$ *tali che per ogni* $\boldsymbol{t} \in T \cap U(\boldsymbol{t}^*)$ *si abbia*

$$|f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})| \leq g(\boldsymbol{x}) \qquad q.o. \text{ in } E.$$

*Allora la funzione* $F$ *definita in* (6.28) *è continua in* $\boldsymbol{t}^*$.

**Oss. 6.10** La dimostrazione consiste essenzialmente nello constatare che per ogni successione $\{\boldsymbol{t}_k\} \subset T \cap U(\boldsymbol{t}^*)$, convergente a $\boldsymbol{t}^*$, è possibile applicare il Teorema di Convergenza Dominata ottenendo

$$F(\boldsymbol{t}_k) = \int_E f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}_k)\, d\boldsymbol{x} \to \int_E f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}^*)\, d\boldsymbol{x} = F(\boldsymbol{t}^*)\,.$$

**Oss. 6.11** Segnaliamo che l'ipotesi *iii.* è necessaria per la validità del teorema. Ad esempio, utilizzando $E = (0, +\infty)$, $T = [0, +\infty)$, $t^* = 0$ ed $f(x, t) = te^{-tx}$ si ha $F(t) = 1$ per ogni $t > 0$, ma $F(0) = 0$. D'altra parte, la richiesta $te^{-tx} \leq g(x)$ per ogni $x > 0$ e per ogni $t$ sufficientemente piccolo porta ad avere $g(x) \geq 1/x \notin L(E)$.

**Teorema 6.19** *Siano $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $T \subseteq \mathbb{R}^q$, $\boldsymbol{t}^*$ un punto interno a $T$ e $U(\boldsymbol{t}^*) \subset T$. Sia $f : E \times T \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che:*

*i.* $f(\cdot, \boldsymbol{t}) \in L(E)$ *per ogni* $\boldsymbol{t} \in T$;

*ii.* *per qualche* $j = 1, \dots, q$, *per ogni* $\boldsymbol{t} \in U(\boldsymbol{t}^*)$ *e per q.o.* $\boldsymbol{x} \in E$ *esiste la* $\dfrac{\partial f}{\partial t_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$;

*iii.* *esiste una funzione* $h \in L(E)$ *che per ogni* $\boldsymbol{t} \in U(\boldsymbol{t}^*)$ *soddisfa*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})\right| \le h(\boldsymbol{x}) \qquad \text{q.o. in } E.$$

*Allora $F$ è derivabile rispetto a $t_j$ nel punto $\boldsymbol{t}^*$ e vale*

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(\boldsymbol{t}^*) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}^*)\, d\boldsymbol{x}\,.$$

**Oss. 6.12** Nelle ipotesi del teorema precedente, se $T$ è aperto, se $f(\boldsymbol{x}, \cdot) \in \mathcal{C}^1(T)$ per q.o. $\boldsymbol{x} \in E$ e se per ogni $1 \le j \le q$ esiste una funzione $h_j \in L(E)$ tale che

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})\right| \le h_j(\boldsymbol{x}) \qquad \text{q.o. in } E,\ \forall \boldsymbol{t}$$

allora $F \in \mathcal{C}^1(T)$ ed è possibile derivare sotto il segno di integrale, ovvero

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(\boldsymbol{t}) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})\, d\boldsymbol{x} \qquad \text{per ogni } \boldsymbol{t} \in T.$$

Terminiamo con un caso particolare di quanto visti fin qui, in cui $E$ è un intervallo di $\mathbb{R}$, con funzione integranda ed estremi di integrazione dipendenti da un parametro reale $t$. Lavorando, per comodità, con ipotesi semplificate, possiamo descrivere la situazione come segue: sono dati due intervalli aperti di $\mathbb{R}$, $E$ e $T$ ed una funzione $f : E \times T \to \overline{\mathbb{R}}$, con la proprietà che $f(\cdot, t) \in L(E)$ per ogni $t \in T$; sono assegnate due funzioni $a, b : T \to E$ e si considera la funzione

$$H(t) := \int_{[a(t), b(t)]} f(x, t)\, dx\ .$$

Non siamo interessati alle più generali condizioni che permettono di ricavare continuità e/o derivabilità di $H$, ma solo a condizioni di comodo che permettano di leggere la dipendenza di $H$ dalla variabile $t$. Ad esempio, se $f \in \mathcal{C}(E \times T)$ l'integrale che definisce $H$ è un "consueto" integrale secondo Riemann e la continuità di

$$H(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t)\, dx$$

è garantita dalla continuità di $a$ e $b$. Se, inoltre, le funzioni $a$ e $b$ che agiscono da estremi di integrazione sono di classe $\mathcal{C}^1(T)$ e se $\partial f/\partial t \in \mathcal{C}(E \times T)$, ne risulta che $H \in \mathcal{C}^1(T)$ e vale la formula

$$H'(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx + f(b(t),t)b'(t) - f(a(t),t)a'(t)\ . \tag{6.29}$$