Lezioni di Analisi Matematica 3
corso di Laurea in Fisica
a.a. 2005-'06

G. Molteni

M. Vignati

CAPITOLO 5

Le funzioni misurabili secondo Lebesgue

In questo capitolo ci occupiamo di funzioni $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, definite in sottoinsiemi *misurabili* $E \subseteq \mathbb{R}^n$, a valori nell'insieme $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$[1].

5.1. Funzioni misurabili

Def. 5.1 Se $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$; diciamo che f è *misurabile (secondo Lebesgue) in* E se per ogni $a \in \mathbb{R}$ accade che il sottoinsieme di E in cui f assume valori maggiori di a è misurabile, ovvero

$$\{f > a\} := \{\boldsymbol{x} \in E : f(\boldsymbol{x}) > a\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \quad \forall a \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

La classe delle funzioni misurabili in E è denotata con il simbolo $\mathfrak{m}(E)$.

La scelta di chiedere la misurabilità dell'insieme dove f assume valori maggiori di a è dovuta a pura convenzione e può essere equivalentemente sostituita con la richiesta che siano misurabili tutti gli insiemi del tipo $\{f \leq a\}$, oppure $\{f < a\}$, o anche $\{f \geq a\}$.

Proposizione 5.1 *Siano* $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *ed* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. *Allora le seguenti quattro affermazioni sono equivalenti:*
a) $\{f > a\} \in \mathcal{M} \quad \forall a \in \mathbb{R}$;
b) $\{f \leq a\} \in \mathcal{M} \quad \forall a \in \mathbb{R}$;
c) $\{f < a\} \in \mathcal{M} \quad \forall a \in \mathbb{R}$;
d) $\{f \geq a\} \in \mathcal{M} \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

Dim. se ogni $\{f > a\} \in \mathcal{M}$ è anche misurabile ogni $\{f \leq a\} = \{f > a\}^c$, per il Teor. 4.3. Così, $a) \Rightarrow b)$ e, per la stessa ragione, $c) \Rightarrow d)$. Se ogni $\{f \leq a\} \in \mathcal{M}$,

[1] In $\overline{\mathbb{R}}$ consideriamo il naturale ordinamento di $\mathbb{R}$, ed in aggiunta pensiamo che $-\infty < x < +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Le operazioni aritmetiche in $\overline{\mathbb{R}}$ sono quelle solite, utilizzate nei corsi di Analisi Matematica 1 e 2 per il calcolo dei limiti di successioni e di funzioni; la somma tra $+\infty$ e $-\infty$ non è definita; viene invece definito il prodotto tra 0 ed uno dei due simboli $\pm\infty$ e questo prodotto ha sempre valore nullo.

è misurabile anche ogni $\{f < a\} = \cup_{k=1}^{+\infty}\{f \leq a - \frac{1}{k}\}$, per il Teorema 4.2. Quindi $b) \Rightarrow c)$ e, poiché $\{f > a\} = \cup_{k=1}^{+\infty}\{f \geq a + \frac{1}{k}\}$, per la stessa ragione $d) \Rightarrow a)$. ■

Oss. 5.1 La misurabilità della funzione f implica anche la misurabilità di ogni insieme di livello

$$\{f = a\} = \{f \geq a\} \cap \{f \leq a\}\ , \quad a \in \mathbb{R}$$

e degli insiemi $\{f = +\infty\} = \cap_{k=1}^{+\infty}\{f > k\}$ e $\{f = -\infty\} = \cap_{k=1}^{+\infty}\{f < -k\}$. In modo del tutto simile possiamo dedurre la misurabilità degli insiemi $\{f < +\infty\}$, $\{f > -\infty\}$, $\{a \leq f \leq b\}$, $\{a \leq f < b\}$, $\{a < f < b\}$,... .

È possibile caratterizzare le funzioni misurabili anche in un altro modo.

Proposizione 5.2 *Siano $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ ed $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che $\{f = -\infty\}$ sia misurabile. Allora f è una funzione misurabile se e solo se la controimmagine $f^{-1}(G) = \{\boldsymbol{x} \in E : f(\boldsymbol{x}) \in G\}$ di un qualsiasi aperto $G \subseteq \mathbb{R}$ è un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$.*

Dim. Supponiamo che la controimmagine di ogni aperto sia misurabile e scegliamo $G = (-\infty, a)$. Allora ogni

$$\{f < a\} = \{f = -\infty\} \cup f^{-1}(G)$$

è misurabile, e per la Prop. 5.1c f è misurabile.
Per dimostrare l'altra implicazione, ricordiamo che gli insiemi aperti di $\mathbb{R}$ hanno una struttura abbastanza semplice: un sottoinsieme $G \subseteq \mathbb{R}$ è aperto se e solo se è unione al più numerabile di intervalli aperti disgiunti, $G = \cup_k(a_k, b_k)$. Perciò

$$f^{-1}(G) = f^{-1}(\cup_k(a_k, b_k)) = \cup_k f^{-1}((a_k, b_k)) = \cup_k\{a_k < f < b_k\}$$

è un insieme misurabile, per l'Oss. 5.1. ■

Corollario 5.1 *Se $f : E \to \mathbb{R}$ è continua in E, è anche misurabile.*

Dim. La controimmagine $f^{-1}(G)$ di un qualsiasi aperto $G \subseteq \mathbb{R}$ è un sottoinsieme aperto e quindi misurabile. ■

Oss. 5.2 Esistono funzioni che non sono misurabili. Ad esempio, se $A \subset E$ è un insieme non misurabile, la sua funzione caratteristica assume valori maggiori di 0 esattamente in A. Questo esempio giustifica l'utilizzo dell'aggettivo "misurabile" sia nel contesto degli insiemi che in quello delle funzioni: un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è misurabile se e solo se la sua funzione caratteristica χ_E è una funzione misurabile.

5.2. Digressione sulle proprietà valide quasi ovunque

Def. 5.2 Sia E un sottoinsieme generico[2] di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{P}$ una proprietà che, a seconda dei diversi punti di E, può essere o non essere valida. Diciamo che la proprietà è soddisfatta *quasi ovunque in* E (*q.o. in* E) se l'insieme dei punti in cui $\mathcal{P}$ non vale è misurabile ed ha misura nulla.

Esempio 5.1

a. Se accettiamo solo funzioni a valori reali, la $f(x) = 1/x^2$ non è definita per $x = 0$ e quindi possiamo vederla come una $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definita q.o. in* $\mathbb{R}$. Se invece vogliamo vederla come una $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ e salvare, in qualche modo, la sua continuità, possiamo definirla anche in $x = 0$ con $f(0) = +\infty$; in questo caso f è definita e continua in ogni punto di $\mathbb{R}$, ed è q.o. finita.

b. Due funzioni f, g, definite q.o. in E, sono *uguali q.o. in* E se differiscono solo in un sottoinsieme (del loro comune dominio) di misura nulla. Anche quando f e g sono definite in ogni punto di E, la scrittura

$$\text{“}f = g \quad \text{q.o. in } E\text{”}$$

ha il significato di

$$\text{“posto } Z := \{f \neq g\} := \{\boldsymbol{x} \in E : f(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})\} \text{ allora } m(Z) = 0\text{”}.$$

Ad esempio, la funzione di Dirichlet

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

è *q.o. nulla*, ovvero è q.o. uguale alla funzione $f \equiv 0$. Non è però difficile convincersi del fatto che se E è un insieme aperto ed f, g sono continue in E, la loro eguaglianza q.o. in E implica che siano uguali in ogni punto di E.

c. La funzione $f : E \to \mathbb{R}$, definita q.o. in E, è *continua q.o. in* E se l'insieme dei suoi punti di discontinuità ha misura nulla. È questo il caso, ad esempio, della funzione

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

[2] L'insieme denotato con E in questo paragrafo può anche non essere misurabile.

che ha $x = 0$ come unico punto di discontinuità in $\mathbb{R}$. È interessante osservare che la funzione sgn è q.o. continua in $\mathbb{R}$, ma non è q.o. uguale ad una funzione continua. Viceversa, la $\chi_{\mathbb{Q}}$ è q.o. uguale alla funzione continua $f \equiv 0$, ma non è q.o. continua, perché presenta discontinuità in ogni punto di $\mathbb{R}$.

d. La funzione $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ è *finita q.o. in* E se l'insieme $\{f = \pm\infty\}$ ha misura nulla. La funzione è *limitata q.o. in* E se esiste una costante K per la quale è verificata q.o. la diseguaglianza $|f(\boldsymbol{x})| \leq K$. Ovviamente questa seconda proprietà è più restrittiva della prima. ■

5.3. Alcune proprietà della classe delle funzioni misurabili

Teorema 5.1 *Se* $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$, *con* $f \in \mathfrak{m}(E)$ *e* $f = g$ *q.o. in* E, *allora anche* g *è misurabile in* E. *Inoltre gli insiemi* $\{f > a\}$ *e* $\{g > a\}$ *hanno la stessa misura.*

Dim. L'insieme $\{f \neq g\}$ è misurabile con misura nulla; poiché $f \in \mathfrak{m}(E)$, è allora misurabile ogni insieme $\{f > a\} \cup \{f \neq g\}$, che coincide con $\{g > a\} \cup \{f \neq g\}$. Perciò sono misurabili tutti gli insiemi $\{g > a\}$ e quindi $g \in \mathfrak{m}(E)$. ■

Questo risultato afferma che se $Z \subset E$, con $m(Z) = 0$, e modifichiamo in modo arbitrario i valori assunti da una funzione $f \in \mathfrak{m}(E)$ su Z, la funzione ottenuta è ancora misurabile. In modo similare, se una funzione g è definita e misurabile in $E \setminus Z$ possiamo estenderla in modo arbitrario a tutti i punti di E ottenendo una funzione misurabile in E. Per questo motivo, con un abuso di linguaggio talvolta parleremo di g come di una funzione misurabile in E, senza utilizzare una nuova lettera per denotare la sua estensione. Ad esempio, la funzione $g(x) = 1/x$ è definita e misurabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, e possiamo estenderla in modo arbitrario a tutto $\mathbb{R}$, ottenendo una funzione di $\mathfrak{m}(\mathbb{R})$.

In generale, componendo una funzione misurabile $f : E \to \mathbb{R}$ con una funzione misurabile $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è detto che la $\phi \circ f$ sia misurabile. Nel caso in cui la ϕ sia più regolare, però, abbiamo il

Teorema 5.2 *Sia* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *misurabile e finita q.o. in* E, *e sia* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua in* $\mathbb{R}$. *Allora* $\phi \circ f$ *è misurabile in* E.

Dim. L'insieme Z in cui f assume i valori $\pm\infty$ ha misura nulla, e $\phi \circ f$ è definita in ogni punto di $E_1 := E \setminus Z$. Per vedere che $\phi \circ f$ è misurabile in E_1 osserviamo che per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$\{\boldsymbol{x} \in E_1 : (\phi \circ f)(\boldsymbol{x}) > a\} = (\phi \circ f)^{-1}(a, +\infty) = f^{-1}(\phi^{-1}(a, +\infty)) \,.$$

Questo insieme è misurabile grazie alla Prop. 5.2, perché controimmagine tramite f dell'insieme $G := \phi^{-1}(a, +\infty)$, che è aperto grazie alla continuità di ϕ. ■

Oss. 5.3 La continuità delle funzioni elementari garantisce che partendo da una f misurabile risultino misurabili anche molte altre funzioni, quali ad esempio $|f|$, $|f|^p$ con $(p > 0)$, e^f. Anche le funzioni

$$f^+ := \max(f; 0) = \frac{|f| + f}{2} \quad \text{e} \quad f^- := -\min(f; 0) = \frac{|f| - f}{2} \tag{5.2}$$

sono misurabili per ogni f misurabile: tali funzioni appariranno frequentemente nello sviluppo successivo della teoria per via delle identità

$$f = f^+ - f^- \quad \text{e} \quad |f| = f^+ + f^- \tag{5.3}$$

e del fatto che esse assumono solamente valori non negativi.

Con il prossimo risultato elenchiamo, senza dimostrazione, altre proprietà delle funzioni misurabili. Esse implicano, tra l'altro, che le funzioni misurabili a valori reali formano uno spazio vettoriale.

Teorema 5.3 *Siano $f, g \in \mathfrak{m}(E)$. Allora:*

i. L'insieme $\{f > g\}$ è misurabile;
ii. per ogni $c \in \mathbb{R}$ la funzione cf è misurabile;
iii. se f e g sono q.o. finite, allora la funzione $f + g$ è misurabile;
iv. il prodotto fg è misurabile;
v. f/g è misurabile, se g è q.o. finita e q.o. diversa da 0.

Oltre alle precedenti operazioni algebriche, vi sono altri modi di agire su funzioni di $\mathfrak{m}(E)$ senza perdere misurabilità.

Teorema 5.4 *Se $\{f_n\}_{n\geq 1}$ sono funzioni misurabili in E, sono anche misurabili le funzioni*

$$\sup_{n\geq 1} f_n \; ; \quad \inf_{n\geq 1} f_n \; ; \quad \limsup_{n\geq 1} f_n \; ; \quad \liminf_{n\geq 1} f_n$$

(e quindi, se esiste, anche $\lim_{n\geq 1} f_n$).

Dim. Ovviamente $\{\sup_{n\geq 1} f_n > a\} = \cup_{n\geq 1}\{f_n > a\}$, da cui segue la misurabilità di $\sup_{n\geq 1} f_n$. La misurabilità di $\inf_{n\geq 1} f_n$ segue allora dall'identità $\inf_{n\geq 1} f_n = -\sup_{n\geq 1}(-f_n)$ ed analogamente le misurabilità di $\limsup_{n\geq 1} f_n$ e $\liminf_{n\geq 1} f_n$ seguono dalle identità

$$\limsup_{n\geq 1} f_n = \inf_{n\geq 1}(\sup_{k\geq n} f_k) \quad \text{e} \quad \liminf_{n\geq 1} f_n = \sup_{n\geq 1}(\inf_{k\geq n} f_k)\ .$$

■

Chiudiamo questo capitolo con un risultato di approssimazione per funzioni misurabili.

Def. 5.3 Una *funzione semplice* è una funzione $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ che assume solo un numero finito di valori reali.

È possibile rappresentare ogni funzione semplice come combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, cioè

$$s = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{E_j}\ .$$

Tale rappresentazione è unica se i valori c_j sono tutti distinti e non nulli e se gli insiemi E_j sono mutuamente disgiunti. In questo caso, s è misurabile se e solo se gli insiemi E_j sono misurabili.

Teorema 5.5 *Per ogni $f \in \mathfrak{m}(E)$ esiste una successione $\{s_n\}_{n\geq 1}$ di funzioni semplici, misurabili e nulle fuori da E che converge puntualmente ad f in E. Inoltre, se $f \geq 0$ è possibile scegliere la successione in modo che $0 \leq s_n \uparrow f$.*

Dim. Supponiamo per il momento che $f \geq 0$ e, per ogni $n \geq 1$, consideriamo le funzioni $g_n : \bar{\mathbb{R}} \to [0, +\infty)$ definite come

$$g_n(y) := \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \text{ o } y = -\infty, \\ \dfrac{1}{2^n}\lfloor 2^n y \rfloor & \text{se } 0 \leq y < 2^n, \\ 2^n & \text{se } y \geq 2^n \text{ o } y = +\infty. \end{cases}$$

Ogni g_n assume solo un numero finito di valori e presenta discontinuità (di I specie) solo nei punti $y = k2^{-n}$, con $k = 1, \ldots, 4^n$, in cui è continua da destra (vd. Fig. 5.1).

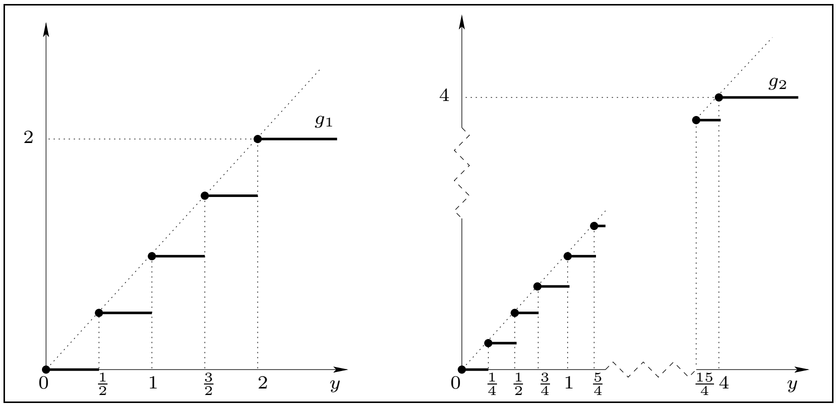

FIGURA 5.1.

Per $n \to +\infty$ si ha $g_n(y) \uparrow y$; inoltre, per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'insieme $g_n^{-1}((-\infty, a))$ è un aperto di $\mathbb{R}$. Da questo segue che le funzioni

$$s_n(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} 0 & \text{se } \boldsymbol{x} \notin E, \\ (g_n \circ f)(\boldsymbol{x}) & \text{se } \boldsymbol{x} \in E, \end{cases}$$

sono semplici, misurabili, nulle fuori da E e soddisfano $0 \leq s_n \uparrow f$.

Se invece f ha segno qualsiasi, applichiamo questo procedimento alle funzioni non-negative f^+ ed f^- ottenendo due successioni di funzioni semplici s_k^+ ed s_k^-, misurabili, la cui differenza $s_k^+ - s_k^-$ converge (questa volta non più monotonalmente) a $f^+ - f^- = f$. ∎