# Lezioni di Analisi Matematica 3

## corso di Laurea in Fisica

## a.a. 2005-'06

G. Molteni

M. Vignati

CAPITOLO 3

# Funzioni implicite

## 3.1. Introduzione

L'obiettivo di questo capitolo è fornire gli strumenti necessari a descrivere l'insieme delle soluzioni di equazioni della forma

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0},$$

quando $\boldsymbol{f}$ è una funzione definita in un sottoinsieme $U \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$, a valori in $\mathbb{R}^n$: il caso $n > 1$ corrisponde allo studio di sistemi di $n$ equazioni scalari. Data la sua particolare importanza e facilità analizzeremo anzitutto il caso $m = n = 1$, ovvero: un'equazione scalare in due incognite scalari. Se non aggiungiamo qualche ipotesi, però, il problema con tale generalità è sostanzialmente intrattabile. Ad esempio le funzioni

$$(x - |x|)(1 + y^2), \qquad (x - |x|)^2 + (y - |y|)^2, \qquad \text{e} \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{y^2}{n^2 x^2}\right)$$

si annullano la prima in un intero semipiano, la seconda in un intero quadrante e la terza in ogni retta $y = nx$ con l'eccezione dell'origine; d'altra parte $x^2 + y^2$ si annulla unicamente in $(0, 0)$ e $x^2 + y^2 + 1$ non ha invece alcuno zero. Decidiamo quindi di precisare l'obiettivo che diventa: determinare se esistono una o più funzioni $\phi$ definite in qualche sottoinsieme $V \subseteq \mathbb{R}$ ed a valori reali, tali che

$$\begin{cases} (x, \phi(x)) \in U \\ f(x, \phi(x)) = 0 \end{cases} \qquad \forall x \in V. \tag{3.1}$$

Chiamiamo *funzione definita implicitamente dalla equazione* $f(x, y) = 0$ (in breve *funzione implicita*) ogni funzione $\phi$ che soddisfi le richieste (3.1).
Anche così espresso, però, il problema è troppo generico: consideriamo ad esempio

la funzione $f(x,y) = x^2 - y^2$. Evidentemente ciascuna delle funzioni seguenti

$$\phi_1(x) = x, \quad \phi_2(x) = -x, \quad \phi_3(x) = |x|, \quad \phi_4(x) = -|x|,$$

$$\phi_{5,A}(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in A, \\ -x & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus A \end{cases} \qquad A \subseteq \mathbb{R},$$

soddisfa (3.1) sull'intero asse reale. Un modo per tentare di classificarle è il seguente: tra tutte, solo $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ sono continue in $\mathbb{R}$ e di queste solo $\phi_1, \phi_2$ sono anche differenziabili in ogni punto di $\mathbb{R}$. Quindi, nonostante una singola equazione $f(x,y) = 0$ possa definire infinite funzioni implicite, possiamo sperare di controllarne il numero aggiungendo una qualche richiesta di regolarità.

Il primo risultato che analizziamo, per quanto di fatto non sia altro che una applicazione del teorema di Darboux, si rivela spesso estremamente utile.

**Teorema 3.1 ($\exists!$ globale)** *Siano $a < b, c < d \in \mathbb{R}$ e sia $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che*

*i.* $f(x,c)f(x,d) < 0$ *per ogni* $x \in [a,b]$,
*ii. per ogni* $x_0 \in [a,b]$ *fissato,* $f(x_0, \cdot)$ *è strettamente monotòna in* $[c,d]$.

*Allora esiste un'unica funzione* $\phi : [a,b] \to [c,d]$ *tale che* $f(x, \phi(x)) = 0$ *per ogni* $x \in [a,b]$.

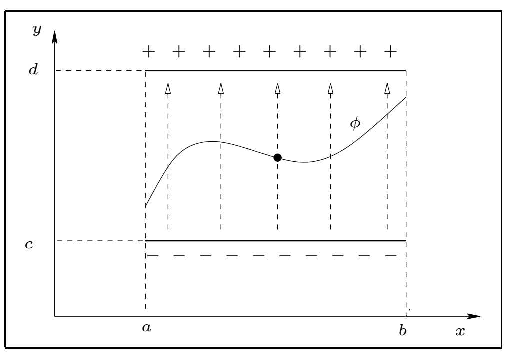


FIGURA 3.1.

**Dim.** (Vd. Fig. 3.1) La funzione $f(x_0, \cdot)$ è continua per ipotesi ed assume segni opposti agli estremi del dominio (per *i.*) quindi per il teorema degli zeri (teorema di Darboux) si annulla in qualche punto tra $c$ e $d$. Dalla stretta monotonìa di $f(x_0, \cdot)$ segue che tale zero è unico. ■

**Oss. 3.1** L'ipotesi di continuità nel teorema precedente può essere indebolita e sostituita dalla richiesta che $f(x_0, \cdot)$ sia continua in $[c, d]$ per ogni $x_0$ in $[a, b]$.

Il seguente risultato è un'interessante variante del teorema precedente: qui l'ipotesi di monotonìa è sostituita dalla più restrittiva ipotesi sul segno della derivata parziale di $f$. Il nuovo teorema è meno generale del precedente, tuttavia è spesso di agevole applicazione.

**Teorema 3.2 ($\exists!$ globale)** *Siano $a < b, c < d \in \mathbb{R}$ e sia $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che*

*i.* $f(x, c)f(x, d) < 0$ *per ogni* $x \in [a, b]$,
*ii'.* *per ogni* $(x, y) \in (a, b) \times (c, d)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ *esiste ed ha segno strettamente definito.*

*Allora esiste un'unica funzione $\phi : (a, b) \to (c, d)$ tale che $f(x, \phi(x)) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$.*

## 3.2. Caso unidimensionale

Una volta appurata l'esistenza della implicita avremo sicuramente bisogno di conoscerne la regolarità. Il teorema principale su questa argomento è il teorema di Dini: osserviamo che trattandosi di una questione di tipo locale, anche la risposta è di tipo locale.

**Teorema 3.3 (U. Dini, $\exists!$ e regolarità locale)** *Sia $U$ un aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia $f : U \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1(U)$. Sia $(x_0, y_0) \in U$ e supponiamo che*

*i.* $f(x_0, y_0) = 0$,
*ii.* $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

*Allora esistono un intorno aperto $V$ di $x_0$, un intorno aperto $W$ di $y_0$ con $\overline{V \times W} \subseteq U$, ed esiste un'unica funzione $\phi : V \to W$ tale che:*

*a.* $\phi(x_0) = y_0$,
*b.* $f(x, \phi(x)) = 0$ *per ogni* $x \in V$.

*Inoltre $\phi \in \mathcal{C}^1(V)$ e la sua derivata soddisfa in $V$ l'identità*

$$\phi'(x) = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f}\Big|_{(x,\phi(x))}. \tag{3.2}$$

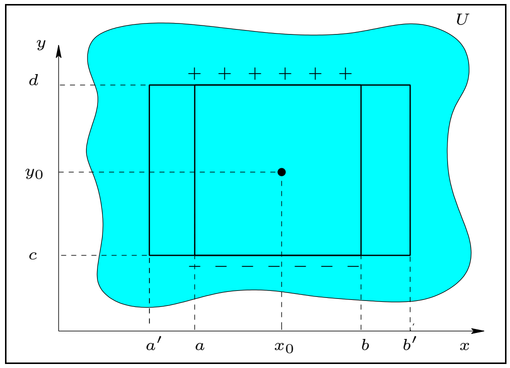


FIGURA 3.2.

**Dim.** Osservando che $\partial_y f$ è continua e che $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$, esiste un rettangolo *chiuso* $U' := [a', b'] \times [c, d] \subseteq U$ contenente $(x_0, y_0)$ all'interno in cui $\partial_y f$ non si annulla. Possiamo supporre che $\partial_y f(x, y) > 0$ in $U'$ (altrimenti cambiamo $f$ con $-f$). Dunque $f(x_0, \cdot)$ è strettamente crescente, almeno quando il suo argomento $y$ varia in $[c, d]$; essendo per ipotesi $f(x_0, y_0) = 0$, otteniamo che $f(x_0, c) < 0$ e $f(x_0, d) > 0$. Dalla continuità di $f$ in $U'$ segue allora che esistono $a, b$ con $a' < a < x_0 < b < b'$ tali che $f(x, c) < 0$ ed $f(x, d) > 0$ quando $x \in [a, b]$. Per $V := (a, b)$ e $W := (c, d)$, dal Teor. 3.2 applicato ad $f$ in $\overline{V \times W}$ segue la prima parte della tesi.

Veniamo ora alla regolarità di $\phi$. Osserviamo che $\overline{V \times W}$ è compatto e che sia $\partial_x f$ che $1/\partial_y f$ sono continue in tale rettangolo (per la seconda si usa la condizione $\partial_y f \neq 0$ in $U'$); dal teorema di limitatezza delle funzioni continue su insiemi compatti (Weierstrass) segue l'esistenza di due numeri reali positivi $m$, $m'$ tali che

$$|\partial_x f(x, y)| \leq m, \quad |\partial_y f(x, y)| \geq 1/m', \quad \forall (x, y) \in \overline{V \times W}. \tag{3.3}$$

Siano $\tilde{x} \in V$ ed $h$ sufficientemente piccolo in modo che $\tilde{x} + h \in V$. Dalla definizione di $\phi$ segue che

$$\begin{aligned} 0 &= f(\tilde{x} + h, \phi(\tilde{x} + h)) - f(\tilde{x}, \phi(\tilde{x})) \\ &= [f(\tilde{x} + h, \phi(\tilde{x} + h)) - f(\tilde{x}, \phi(\tilde{x} + h))] + [f(\tilde{x}, \phi(\tilde{x} + h)) - f(\tilde{x}, \phi(\tilde{x}))]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Essendo per ipotesi $\partial_x f$ e $\partial_y f$ continue, dal teorema di Lagrange segue l'esistenza di $\alpha$ e $\beta$ in $\mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} f(\tilde{x}, \phi(\tilde{x}+h)) - f(\tilde{x}, \phi(\tilde{x})) = (\partial_y f)|_{(\tilde{x},\beta)} \cdot (\phi(\tilde{x}+h) - \phi(\tilde{x})) \\ f(\tilde{x}+h, \phi(\tilde{x}+h)) - f(\tilde{x}, \phi(\tilde{x}+h)) = (\partial_x f)|_{(\alpha,\phi(\tilde{x}+h))} \cdot h \\ \alpha \in \;\, )\tilde{x}, \tilde{x}+h( \\ \beta \in \;\, )\phi(\tilde{x}), \phi(\tilde{x}+h)( \end{cases}$$

e quindi da (3.4) abbiamo che

$$\begin{cases} -(\partial_y f)|_{(\tilde{x},\beta)} \cdot (\phi(\tilde{x}+h) - \phi(\tilde{x})) = (\partial_x f)|_{(\alpha,\phi(\tilde{x}+h))} \cdot h \\ \alpha \in \;\, )\tilde{x}, \tilde{x}+h( \\ \beta \in \;\, )\phi(\tilde{x}), \phi(\tilde{x}+h)(. \end{cases} \tag{3.5}$$

Di conseguenza

$$\Big|\partial_y f(\tilde{x}, \beta)\Big| \cdot |\phi(\tilde{x}+h) - \phi(\tilde{x})| = |\partial_x f(\alpha, \phi(\tilde{x}+h))| \cdot |h|. \tag{3.6}$$

Siccome i punti $(\tilde{x}, \beta)$ e $(\alpha, \phi(\tilde{x}+h))$ appartengono a $\overline{V \times W}$, in (3.6) possiamo usare le stime (3.3), ottenendo così

$$|\phi(\tilde{x}+h) - \phi(\tilde{x})| = \frac{|\partial_x f(\alpha, \phi(\tilde{x}+h))|}{|\partial_y f(\tilde{x}, \beta)|} \cdot |h| \leq mm' \, |h|.$$

Essendo $m$ ed $m'$ costanti indipendenti da $h$, la relazione precedente dimostra che $\phi$ è lipschitziana, quindi continua, in $\tilde{x}$.
Torniamo ora alla (3.5): mandando $h$ a zero *e sapendo che $\phi$ è continua in $\tilde{x}$*, così che $\phi(\tilde{x}+h) \to \phi(\tilde{x})$ per $h \to 0$, scopriamo che

$$\alpha \to \tilde{x}, \quad \beta \to \phi(\tilde{x})$$

e quindi dalla continuità delle derivate parziali $\partial_x f$ e $\partial_y f$ segue che

$$\frac{\phi(\tilde{x}+h) - \phi(\tilde{x})}{h} = -\frac{\partial_x f(\alpha, \phi(\tilde{x}+h))}{\partial_y f(\tilde{x}, \beta)} \to -\frac{\partial_x f(\tilde{x}, \phi(\tilde{x}))}{\partial_y f(\tilde{x}, \phi(\tilde{x}))},$$

dimostrando la derivabilità di $f$ in $\tilde{x}$ e contemporaneamente la validità della relazione (3.2). Infine, le funzioni $\partial_x f$ e $\partial_y f$ sono continue per ipotesi in $\overline{V \times W}$ e $\phi$ è continua in $V$ ed a valori in $W$, quindi dalla (3.2) segue la continuità di $\phi'$ in $V$.

■

**Esempio 3.1** L'ipotesi che $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$ è cruciale nel teorema precedente; senza di essa, infatti, in generale non si può dire nulla sull'esistenza e sul numero di soluzioni dell'equazione $f(x, y) = 0$, anche considerando solo quelle regolari. Due semplici ma chiarificatori esempi:

- Consideriamo $f(x, y) = x^2+y^2$ e sia $(x_0, y_0) = \mathbf{0}$. Evidentemente $f(x_0, y_0) = 0$ ed $f$ è addirittura di classe $\mathcal{C}^\infty$ nell'intero piano. L'equazione $f(x, y) = 0$ ammette il punto $(x_0, y_0)$ come unica soluzione. In questo caso, essendo $\partial_y f = 2y$, l'ipotesi che sia $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$ è falsa.
- Consideriamo $f(x, y) = x^2-y^2$ e sia $(x_0, y_0) = \mathbf{0}$. Evidentemente $f(x_0, y_0) = 0$ ed $f$ è addirittura di classe $\mathcal{C}^\infty$ nell'intero piano. L'equazione $f(x, y) = 0$ può essere risolta esplicitamente, scoprendo che essa ammette *due* soluzioni regolari: la $\phi_1(x) = x$ e la $\phi_2(x) = -x$. Anche in questo caso, essendo $\partial_y f = -2y$, l'ipotesi che sia $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$ è falsa.

■

**Esempio 3.2** *Sia* $f(x, y) = x^3 + y^3 - 2x + y = 0$. *Verificare che in un intorno del punto* $(0, 0)$ *l'equazione* $f(x, y) = 0$ *individua un'unica soluzione della forma* $y = \phi(x)$ *di classe* $\mathcal{C}^1$.

Osserviamo che $f$ è di classe $\mathcal{C}^1$ in $\mathbb{R}^2$ e che $f(0, 0) = 0$. Inoltre $\partial_y f(0, 0) = 3y^2+1|_{(0,0)} = 1 \neq 0$, di conseguenza per il teorema di Dini esiste un'unica soluzione locale, $y = \phi(x)$, che è di classe $\mathcal{C}^1$. Inoltre $\phi'(0) = -\frac{3x^2-2}{3y^2+1}|_{(0,0)} = 2$. ■

**Esempio 3.3** *Sia* $f(x, y) = 2x^3 + y^3 - x + y = 0$. *Verificare che l'equazione* $f(x, y) = 0$ *individua un'unica soluzione della forma* $y = \phi(x)$ *definita su tutto l'asse reale e di classe* $\mathcal{C}^1$.

Contrariamente all'esempio precedente, questa volta il problema non è locale: della soluzione, infatti, è chiesto di individuare esattamente anche il dominio. Di conseguenza il teorema di Dini non è di per sé sufficiente per ottenere la risposta. Tuttavia possiamo utilizzare il Teor. 3.2 per verificare l'esistenza della funzione implicita e successivamente usare il Teorema del Dini, Teor. 3.3, per verificarne la regolarità. Infatti, osserviamo che $f$ è di classe $\mathcal{C}^1$ in $\mathbb{R}^2$ e che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ fissato, $\lim_{y\to+\infty} f(x_0, y) = +\infty$ e $\lim_{y\to-\infty} f(x_0, y) = -\infty$. Questo fatto, unito alla continuità di $f$, garantisce che per ogni $x_0$ esiste *almeno un* $y_0$ tale che $f(x_0, y_0) = 0$. D'altra parte $\partial_y f = 1 + 3y^2 > 0$ in ogni punto del piano, quindi

$f(x_0, y)$, pensata come funzione di $y$ (ad $x_0$ fissato) è strettamente monotòna crescente, così per ogni $x_0$ esiste *al più un* $y_0$ tale che $f(x_0, y_0) = 0$. Questo fatto, unito all'affermazione precedente, dimostra che l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente un'unica funzione $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x, \phi(x))$.
Sia poi $(x_0, \phi(x_0))$ una qualsiasi soluzione dell'equazione. Osserviamo che

$$\partial_y f(x_0, \phi(x_0)) = 3\phi(x_0)^2 + 1 \neq 0,$$

di conseguenza per il teorema di Dini in un intorno del punto $(x_0, \phi(x_0))$ esiste un'unica soluzione locale $y = \tilde{\phi}(x)$, che inoltre è di classe $\mathcal{C}^1$. L'unicità della soluzione garantisce che $\tilde{\phi}$ coincide con $\phi$ che quindi risulta essere di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno di $x_0$: dato che $x_0$ era per ipotesi arbitrario, possiamo concludere che $\phi$ è di classe $\mathcal{C}^1$ in ogni punto di $\mathbb{R}$. ■

**Oss. 3.2** Nel Teor. 3.3 i ruoli di $x$ ed $y$ possono essere scambiati. Così, se con le stesse ipotesi su $f$ si verifica che $f(x_0, y_0) = 0$ e $\partial_x f(x_0, y_0) \neq 0$, è possibile determinare un'unica funzione $\psi$, definita in un intorno di $y_0$ ed a valori in un intorno di $x_0$ che soddisfa

$$\begin{cases} \psi(y_0) = x_0, \\ f(\psi(y), y) = 0. \end{cases}$$

Questa funzione è di classe $\mathcal{C}^1$ e

$$\psi'(y) = -\frac{\partial_y f}{\partial_x f}\Big|_{(\psi(y),y)}. \tag{3.7}$$

Tutto questo può essere riassunto dicendo che se $f \in \mathcal{C}^1(U)$ con

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0), \tag{3.8}$$

l'insieme delle soluzioni di $f(x, y) = 0$ coincide, in un intorno di $(x_0, y_0)$, con il grafico di un'unica funzione $y = \phi(x)$ oppure di un'unica $x = \psi(y)$, ed in entrambi i casi queste funzioni sono di classe $\mathcal{C}^1$. Un punto in cui vale (3.8) è detto *punto regolare* per $f$, mentre sono punti *singolari* quelli in cui si annullano sia $f$ che $\nabla f$. In un intorno di un punto regolare per $f$ l'insieme degli zeri di $f$ è una curva che ammette vettore tangente $(1, \phi'(x_0))$, oppure $(\psi'(x_0), 1)$. La (3.7) e la (3.8) possono essere rilette dicendo che la retta tangente in $(x_0, y_0)$ all'insieme $\{f(x, y) = 0\}$, è ortogonale al vettore $\nabla f(x_0, y_0)$. Su questi aspetti e sulle sue implicazioni torneremo abbondantemente in seguito, quando introdurremo il concetto di varietà.

**Corollario 3.1 (regolarità superiore)** *Sia $U$ un aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia $f : U \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^n(U)$ con $n \geq 1$. Sia $(x_0, y_0) \in U$ e supponiamo che*

*i.* $f(x_0, y_0) = 0$,

*ii.* $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

*Allora la funzione $\phi$ definita implicitamente da $f(x, \phi(x)) = 0$ (la cui esistenza e unicità sono provate nel teorema precedente) è di classe $\mathcal{C}^n(V)$.*

**Dim.** Dal teorema sappiamo che per $x \in V$,

$$\phi'(x) = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f}\Big|_{(x,\phi(x))}.$$

Poiché $\phi$ è continua, la funzione che compare a destra nella relazione precedente è sicuramente continua (composizione di continue), quindi $\phi'$ è continua ovvero $\phi$ è $\mathcal{C}^1$. Supponiamo che $f$ sia $\mathcal{C}^2$. Allora $\partial_x f$ e $\partial_y f$ sono $\mathcal{C}^1$ come pure $\phi$, quindi la funzione a destra è di classe $\mathcal{C}^1$ (composizione di funzioni $\mathcal{C}^1$), quindi $\phi'$ è $\mathcal{C}^1$ ovvero $\phi$ è $\mathcal{C}^2$. Iterando il procedimento (dimostrazione induttiva) si dimostra la tesi. ■

**Oss. 3.3** Nelle ipotesi del Cor. 3.1, è possibile esprimere la derivata $k$-esima, $k \leq n$, della funzione $\phi$ per mezzo delle derivate parziali (fino all'ordine $k$) della funzione $f$. Derivando la relazione (3.2) rispetto da $x$ otteniamo infatti

$$\begin{aligned}\phi''(x) &= \frac{d}{dx}\left(-\frac{\partial_x f(x,\phi(x))}{\partial_y f(x,\phi(x))}\right)\\ &= -\left.\frac{(\partial^2_{xx} f + \partial^2_{yx} f \cdot \phi')\partial_y f - (\partial^2_{xy} f + \partial^2_{yy} f \cdot \phi')\partial_x f}{(\partial_y f)^2}\right|_{(x,\phi(x))}\end{aligned}$$

che, grazie alla (3.2) ed al fatto che $\partial^2_{xy} f = \partial^2_{yx} f$ perché $f \in \mathcal{C}^2$, diventa:

$$\phi''(x) = -\left.\frac{(\partial_y f)^2 \cdot \partial^2_{xx} f - 2(\partial_x f)(\partial_y f)(\partial^2_{xy} f) + (\partial_x f)^2 \cdot \partial^2_{yy} f}{(\partial_y f)^3}\right|_{(x,\phi(x))}. \tag{3.9}$$

In modo analogo si può procedere per le derivate di ordine superiore. Questo metodo è illustrato nell'Es. 3.4.

**Oss. 3.4** Alle stesse conclusioni è possibile arrivare seguendo una strada che si rivela più veloce quando si vogliono valutare i valori assunti da $\phi$ e dalle sue derivate in un singolo punto. Derivando la (3.1), si ottiene

$$\partial_x f + (\partial_y f) \cdot \phi'\Big|_{(x,\phi(x))} \equiv 0, \tag{3.10}$$

da cui segue la (3.2). Derivando la (3.10):

$$\partial^2_{xx} f + (\partial^2_{xy} f) \cdot \phi' + \left[(\partial^2_{yx} f + (\partial^2_{yy} f) \cdot \phi')\right]\phi' + (\partial_y f) \cdot \phi''\Big|_{(x,\phi(x))} \equiv 0,$$

che, tenendo conto di (3.10), permette di ottenere (3.9). Questo metodo è illustrato nell'Es. 3.5. Si noti che possiamo portare avanti i calcoli fino ad avere il valore di $\phi^{(k)}(x_0)$ per ogni $k \leq n$. Di fatto i calcoli diventano rapidamente troppo complessi perché possano essere svolti a mano ma questo non è un reale ostacolo visto che possono essere codificati in un algoritmo e fatti eseguire da un computer.

**Oss. 3.5** Se le ipotesi del Cor. 3.1 sono valide con $n = 2$ e se inoltre $\partial_x f(x_0, y_0) = 0$, dalla (3.2) deduciamo che $\phi'(x_0) = 0$, cioè che il punto $x_0$ è stazionario per $\phi$. In questo caso, dalla (3.9) otteniamo

$$\phi''(x_0) = -\frac{\partial^2_{xx} f}{\partial_y f}(x_0, y_0)$$

da cui si ricava che se $\partial^2_{xx} f$ ed $\partial_y f$ hanno in $(x_0, y_0)$ lo stesso segno, allora $\phi$ ha un punto di massimo locale in $x_0$; se invece hanno segno opposto, allora $x_0$ è un punto di minimo locale per $\phi$.

**Esempio 3.4** *Sia $f(x, y) = x^2+y^3+x+y = 0$. Dopo aver verificato che l'equazione $f(x, y) = 0$ individua un'unica soluzione della forma $y = \phi(x)$ in un intorno di $(0, 0)$ e che tale funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$, determinarne lo sviluppo di McLaurin arrestato al terzo ordine con resto secondo Peano.*

Si tratta di un problema locale (il dominio dell'implicita non è determinato), quindi i teoremi di Dini e di regolarità (Teor. 3.3 e Cor. 3.1) basteranno a completare l'esercizio. Verifichiamo prima però che le ipotesi siano soddisfatte: in effetti $f(0, 0) = 0$, $f$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ in $\mathbb{R}^2$ (quindi a maggior ragione lo è in ogni intorno di $(0, 0)$) ed $\partial_y f(0, 0) = 1+3y^2|_{(0,0)} = 1 \neq 0$. Quindi l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce localmente un'unica funzione $y = \phi(x)$, di classe $\mathcal{C}^\infty$. Sappiamo che $\phi(0) = 0$. Sempre dal teorema di Dini sappiamo che in ogni $x$ (purché sufficientemente vicino a 0)

$$\frac{d\phi}{dx}(x) = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f}\Big|_{(x,\phi(x))} = -\frac{2x+1}{3y^2+1}\Big|_{(x,\phi(x))} = -\frac{2x+1}{3\phi^2(x)+1},$$

da cui segue che

$$\frac{d\phi}{dx}(0) = -\frac{2x+1}{3\phi^2(x)+1}\Big|_{x=0} = -1.$$

Inoltre, derivando nuovamente rispetto ad $x$ la relazione precedente otteniamo

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}(x) = \frac{d}{dx}\Big(-\frac{2x+1}{3\phi^2|_x+1}\Big) = -\frac{2(3\phi^2|_x+1) - 6\phi|_x\cdot\phi'|_x(2x+1)}{(3\phi^2|_x+1)^2}$$

da cui segue che

$$\begin{aligned}\frac{d^2\phi}{dx^2}(0) &= -\frac{2(3\phi^2|_x+1) - 6\phi|_x\cdot\phi'|_x(2x+1)}{(3\phi^2|_x+1)^2}\Big|_{x=0} = -\frac{2(3\phi^2(0)+1) - 6\phi(0)\phi'(0)}{(1)^2} \\ &= -(2(3\cdot 0^2+1) - 6\cdot 0\cdot(-1)) = -2.\end{aligned}$$

Infine, derivando ancora rispetto ad $x$ la relazione precedente otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{d^3\phi}{dx^3}(x) &= \frac{d}{dx}\Big(-\frac{2(3\phi^2|_x+1) - 6\phi|_x\phi'|_x(2x+1)}{(3\phi^2|_x+1)^2}\Big) \\ &= \frac{-1}{(3\phi^2|_x+1)^3}\big[(-6\phi'^2|_x(2x+1) - 6\phi|_x\phi''|_x(2x+1))(3\phi^2|_x+1)+ \\ &\qquad -12\phi|_x\phi'|_x(6\phi^2|_x+2-6\phi|_x\phi'|_x(2x+1))\big]\end{aligned}$$

da cui segue, utilizzando i valori noti di $\phi(0)$, $\phi'(0)$ e $\phi''(0)$, che

$$\frac{d^3\phi}{dx^3}(0) = -\frac{-6(-1)^2\cdot(1)+0}{(1)^3} = 6.$$

Di conseguenza possiamo concludere che

$$\phi(x) = \phi(0) + \phi'(0)x + \frac{\phi''(0)}{2!}x^2 + \frac{\phi'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3) = -x - x^2 + x^3 + o(x^3).$$

■

**Esempio 3.5** *Sia* $f(x,y) = \sin^3(x) + \sin^3(y) + x + y$. *Dopo aver verificato che l'equazione* $f(x,y) = 0$ *individua un'unica soluzione della forma* $y = \phi(x)$ *in un intorno di* $(0,0)$ *e che tale funzione è di classe* $\mathcal{C}^\infty$*, determinarne lo sviluppo di Taylor con centro in* $0$ *al terzo ordine.*

Come nell'esempio precedente la prima parte della tesi segue dai teoremi locali (Teor. 3.3 e Cor. 3.1) una volta controllato che le loro ipotesi siano in questo caso soddisfatte: in effetti $f(0,0) = 0$, $f$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ in $\mathbb{R}^2$ e $\partial_y f(0,0) = 1 + 3\sin^2 y\cos y|_{(0,0)} = 1 \neq 0$. Quindi l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce localmente in $x = 0$ un'unica funzione $y = \phi(x)$, di classe $\mathcal{C}^\infty$.
Per determinare il valore delle derivate di $\phi$ nel punto 0 possiamo procedere come nell'esempio precedente, ma possiamo anche affrontare il problema nel modo descritto nell' Oss. 3.4, che in genere è più agevole. Osserviamo che per definizione

di funzione implicita la relazione

$$\sin^3(x) + \sin^3(\phi(x)) + x + \phi(x) = 0$$

vale per ogni $x$ sufficientemente vicina a 0. Inoltre sappiamo che $\phi(0) = 0$. Derivando dunque questa relazione rispetto ad $x$ otteniamo

$$3\sin^2(x)\cos(x) + 3\phi'(x)\sin^2(\phi(x))\cos(\phi(x)) + 1 + \phi'(x) = 0$$

che valutata in $x = 0$ dà

$$3\sin^2(0)\cos(0) + 3\phi'(0)\sin^2(\phi(0))\cos(\phi(0)) + 1 + \phi'(0) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \phi'(0) = -1.$$

Derivando nuovamente rispetto ad $x$ otteniamo

$$\begin{aligned}6\sin(x)\cos^2(x) - 3\sin^3(x) + 3\phi''(x)\sin^2(\phi(x))\cos(\phi(x)) +& \\ + 6(\phi'(x))^2\sin(\phi(x))\cos^2(\phi(x)) - 3(\phi'(x))^2\sin^3(x) + \phi''(x) &= 0\end{aligned}$$

che valutata in $x = 0$ (e ricordando che $\phi(0) = 0$ ed $\phi'(0) = -1$) dà $\phi''(0) = 0$. Derivando ancora rispetto ad $x$ e valutando in $x = 0$ l'espressione trovata si ottiene infine $\phi'''(0) = 0$, così che lo sviluppo cercato è

$$\phi(x) = -x + o(x^3).$$

■

## 3.3. Caso generale

Consideriamo ora l'equazione più generale $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ con $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ ed $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Supponiamo di conoscere un punto $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ tale che $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{0}$. Come per il problema unidimensionale, vogliamo sapere se sia possibile individuare una funzione $\boldsymbol{\phi} : V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tale che $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{y}_0$ ed $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$ per ogni $\boldsymbol{x} \in V$.

Supponiamo che $\boldsymbol{f}$ sia differenziabile e che quindi sia possibile sviluppare tale funzione al primo ordine in un intorno di $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$: abbiamo

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) + (J\boldsymbol{f})\Big|_{(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{o}\big(\|(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0)\|\big).$$

Per ipotesi $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{0}$, quindi l'equazione $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ diventa

$$\boldsymbol{0} = (J\boldsymbol{f})\Big|_{(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{o}\big(\|(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0)\|\big).$$

Separando la parte $\boldsymbol{x}$ dalla parte $\boldsymbol{y}$ nella matrice jacobiana di $\boldsymbol{f}$, ovvero scrivendo

$$J\boldsymbol{f} = [\, J_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f} \,\vdots\, J_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{f} \,] =: \Big(\partial_{x_1}\boldsymbol{f}, \quad \dots \quad, \partial_{x_m}\boldsymbol{f}, \quad \partial_{y_1}\boldsymbol{f}, \quad \dots \quad, \partial_{y_n}\boldsymbol{f}\Big)$$

(ricordiamo che $\boldsymbol{f}$ è a valori vettoriali e che quindi $J_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}$ è una matrice $n\times m$ mentre $J_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{f}$ è una matrice $n \times n$), l'equazione precedente diventa

$$\mathbf{0} = [\, J_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f} \,\vdots\, J_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{f} \,]\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{o}\big(\|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0)\|\big),$$

da cui

$$\mathbf{0} = (J_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f})\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} \cdot (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) + (J_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{f})\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} \cdot (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0) + \boldsymbol{o}\big(\|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0)\|\big). \tag{3.11}$$

Applichiamo ora un processo noto col nome di *linearizzazione* che consiste nel trascurare il termine $\boldsymbol{o}\big(\|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0)\|\big)$ nell'equazione precedente; così facendo l'equazione diventa:

$$(J_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{f})\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} \cdot (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0) = -(J_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f})\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} \cdot (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0). \tag{3.11'}$$

Questa equazione è lineare in $\boldsymbol{y}$ e quindi se $(J_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ (che è una matrice quadrata) è invertibile, ovvero se $\det(J_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \neq 0$, allora per ogni scelta di $\boldsymbol{x}$ la soluzione esiste, è unica ed è data da:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0 - (J_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{f})^{-1}\ (J_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f})\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} \cdot (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0).$$

È bene sottolineare che le equazioni (3.11) e (3.11') *non sono equivalenti*; in particolare, non c'è nessun motivo perché le soluzioni di una siano le medesime soluzioni dell'altra: quanto abbiamo visto ha valore puramente euristico. Tuttavia, esso suggerisce che assumendo l'invertibilità della matrice $J_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ si dovrebbe essere in grado di dimostrare l'esistenza della funzione $\boldsymbol{\phi}$: il seguente teorema, ancora dovuto ad U. Dini formalizza questa affermazione.

**Teorema 3.4 (∃! e regolarità locale multi dim.)** *Sia $U$ un aperto di $R^{m+n}$ e sia $\boldsymbol{f} : U \to \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^1(U)$. Sia $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \in U$ e supponiamo che*

*i.* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \mathbf{0}$,

*ii.* $\det J_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \neq 0$.

*Allora esistono un intorno aperto $V \subseteq \mathbb{R}^m$ di $\boldsymbol{x}_0$, un intorno aperto $W \subseteq \mathbb{R}^n$ di $\boldsymbol{y}_0$ con $\overline{V \times W} \in U$, ed esiste un'unica funzione $\boldsymbol{\phi} : V \to W$ tale che:*

*a.* $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{y}_0$, *b.* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$ *per ogni* $\boldsymbol{x} \in V$.

*Inoltre* $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{C}^1(V)$ *e la sua matrice jacobiana soddisfa in* $V$ *l'identità*

$$(J\boldsymbol{\phi})\big|_{\boldsymbol{x}} = -(J_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{f})^{-1}\;(J_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f})\;\Big|_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}))}. \tag{3.12}$$

Di fatto il teorema afferma che la soluzione dell'equazione (3.11) esiste, è unica, è sviluppabile al primo ordine e il suo sviluppo è dato dalla soluzione dell'equazione linearizzata (3.11'). Come nel caso unidimensionale, a partire dalla relazione (3.12) si dimostrare che la funzione implicita $\boldsymbol{\phi}$ ha la medesima regolarità di $\boldsymbol{f}$, ovvero che se $\boldsymbol{f}$ è di classe $\mathcal{C}^k$ (con $k \geq 1$) in $U$, allora anche $\boldsymbol{\phi}$ è di classe $\mathcal{C}^k$ in qualche intorno di $\boldsymbol{x}_0$.

Omettiamo la dimostrazione di questo teorema. Essa è necessariamente più complessa dell'analoga affermazione unidimensionale poiché nella situazione generale $\boldsymbol{f}$ è a valori vettoriali e quindi è a valori in uno spazio nel quale non è possibile introdurre una relazione d'ordine totale (perciò non esiste il concetto di segno di $\boldsymbol{f}$ e quindi neanche un analogo del teorema di Darboux).

**Oss. 3.6** Come già notato nell'Oss. 3.2, anche nel caso multidimensionale le variabili possono essere scambiate tra loro. Il Teor. 3.4 afferma di fatto che se $\boldsymbol{f} : U \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ è di classe $\mathcal{C}^1(U)$ ed il punto $\boldsymbol{p}_0 \in U$ è *regolare per* $\boldsymbol{f}$, cioè se

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}_0) = \boldsymbol{0} \quad \text{e} \quad \operatorname{Rank} J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}_0) = n,$$

allora in un intorno di $\boldsymbol{p}_0$ è possibile descrivere l'insieme $\{\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}\}$ come grafico di un'opportuna funzione $\boldsymbol{\phi} : V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. L'esempio seguente illustra questo situazione nel caso $m = 1$, $n = 2$.

**Esempio 3.6** *Verificare che le soluzioni del sistema*

$$\begin{cases} x\sin y - y\sin z + x + z = 0, \\ \cos(x+y) - 2y - \cos(xz) = 0, \end{cases}$$

*in un intorno del punto* $(0, 0, 0)$ *possono essere descritte come grafico di un'unica funzione* $(x, y) = \boldsymbol{\phi}(z)$ *di classe* $\mathcal{C}^\infty$. *Di* $\boldsymbol{\phi}$ *si determini poi lo sviluppo di Taylor al secondo ordine in un intorno di* $0$.

Il sistema può essere descritto come equazione della forma $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$, dove

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad \boldsymbol{f}(x, y; z) := \begin{pmatrix} x\sin y - y\sin z + x + z \\ \cos(x+y) - 2y - \cos(xz) \end{pmatrix}.$$

Il testo chiede di dimostrare l'esistenza di una funzione implicita $\boldsymbol{\phi} : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno del punto $z = 0$ tale che $\boldsymbol{\phi}(0) = (0, 0)$ ed $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\phi}, z) = \mathbf{0}$. Essendo una questione di tipo locale, tentiamo di rispondere all'esercizio usando il teorema di Dini. Allo scopo constatiamo che $\boldsymbol{f}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ (di fatto di classe $\mathcal{C}^\infty$) e che $\boldsymbol{f}(0, 0, 0) = \mathbf{0}$. Inoltre

$$\begin{aligned} J\boldsymbol{f}(0,0,0) &= \begin{pmatrix} \sin y + 1 & x\cos y - \sin z & 1 - y\cos z \\ z\sin(xz) - \sin(x+y) & -2 - \sin(x+y) & x\sin(xz) \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0,0)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e quindi

$$J_{x,y}\boldsymbol{f}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

che evidentemente è invertibile, così che la prima parte dell'esercizio segue appunto dal teorema di Dini. Tra le sue conseguenze sappiamo esserci anche il fatto che la regolarità $\mathcal{C}^\infty$ di $\boldsymbol{f}$ implica la regolarità $\mathcal{C}^\infty$ di $\boldsymbol{\phi}$. Veniamo ora allo sviluppo di Taylor.

Dal teorema di Dini sappiamo che

$$J_z\phi(z) = -\left(J_{x,y}\boldsymbol{f}\Big|_{(\boldsymbol{\phi}(z),z)}\right)^{-1} \cdot J_z\boldsymbol{f}\Big|_{(\boldsymbol{\phi}(z),z)}, \tag{3.13}$$

in particolare deve essere

$$J_z\phi(0) = -\left(J_{x,y}\boldsymbol{f}\Big|_{(0,0,0)}\right)^{-1} \cdot J_z\boldsymbol{f}\Big|_{(0,0,0)} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\boldsymbol{\phi}(z) = \boldsymbol{\phi}(0) + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} z + \boldsymbol{o}(z) = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{o}(z),$$

che però è solo lo sviluppo al primo ordine. Per avere quello al secondo occorre conoscere il valore della derivata seconda di $\boldsymbol{\phi}$ in $z = 0$. Potremmo ottenere questo valore derivando rispetto a $z$ la relazione (3.13), tuttavia il calcolo dell'inversa di quella matrice e della sua derivata è troppo elaborato per essere condotto a mano. Un po' più semplice è il seguente approccio. Siano $\phi_1$ e $\phi_2$ le due componenti di $\boldsymbol{\phi}$, poniamo cioè $\boldsymbol{\phi} =: (\phi_1, \phi_2)^T$. Di tali funzioni sappiamo che entrambe sono di classe $\mathcal{C}^\infty$ in un intorno di $z = 0$, che $\phi_1(0) = 0$ e che $\phi_2(0) = 0$. Dalla definizione di funzione implicita segue inoltre che se $z$ è sufficientemente vicina a 0 deve essere soddisfatta la relazione

$$\begin{cases} \phi_1 \sin\phi_2 - \phi_2 \sin z + \phi_1 + z = 0, \\ \cos(\phi_1 + \phi_2) - 2\phi_2 - \cos(\phi_1 z) = 0. \end{cases}$$

Derivando le relazioni precedenti rispetto a $z$ otteniamo che per $z$ vicino a 0,

$$\begin{cases} \phi_1' \sin\phi_2 + \phi_1\phi_2' \cos\phi_2 - \phi_2' \sin z - \phi_2 \cos z + \phi_1' + 1 = 0, \\ -(\phi_1' + \phi_2')\sin(\phi_1 + \phi_2) - 2\phi_2' + (\phi_1' z + \phi_1)\sin(\phi_1 z) = 0. \end{cases}$$

Valutando la relazione precedente in $z = 0$ si ottiene

$$\begin{cases} \phi_1'(0) + 1 = 0, \\ -2\phi_2'(0) = 0, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \phi_1'(0) = -1, \\ \phi_2'(0) = 0, \end{cases}$$

cosa che peraltro conosciamo già. Derivando però nuovamente rispetto a $z$, abbiamo che per $z$ vicino a 0,

$$\begin{cases} \phi_1'' \sin\phi_2 + 2\phi_1'\phi_2' \cos\phi_2 + \phi_1\phi_2'' \cos\phi_2 - \phi_1(\phi_2')^2 \sin\phi_2 + \\ \qquad\qquad -\phi_2'' \sin z - 2\phi_2' \cos z + \phi_2 \sin z + \phi_1'' = 0 \\ -(\phi_1'' + \phi_2'')\sin(\phi_1 + \phi_2) - (\phi_1' + \phi_2')^2 \cos(\phi_1 + \phi_2) - 2\phi_2'' + \\ \qquad\qquad +(\phi_1'' z + 2\phi_1')\sin(\phi_1 z) + (\phi_1' z + \phi_1)^2 \cos(\phi_1 z) = 0. \end{cases}$$

Valutando questa relazione in $z = 0$ si ottiene

$$\begin{cases} \phi_1''(0) = 0 \\ -1 - 2\phi_2''(0) = 0, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \phi_1''(0) = 0, \\ \phi_2''(0) = -1/2. \end{cases}$$

Possiamo dunque concludere che

$$\boldsymbol{\phi}(z) = \begin{pmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_1'(0) \\ \phi_2'(0) \end{pmatrix} z + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \phi_1''(0) \\ \phi_2''(0) \end{pmatrix} z^2 + \boldsymbol{o}(z^2) = \begin{pmatrix} -z \\ -\frac{1}{4} z^2 \end{pmatrix} + \boldsymbol{o}(z^2).$$

■

Una importante conseguenza del teorema di Dini è il seguente risultato:

**Teorema 3.5 (invertibilità locale)** *Sia $U$ un intorno aperto di $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ e sia $\boldsymbol{f} : U \to \mathbb{R}^n$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$. Supponiamo che $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ sia invertibile. Allora esistono un intorno aperto $U' \subseteq U$ contenente $\boldsymbol{x}_0$, un intorno aperto $V$*

*di* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ *ed un'unica funzione* $\boldsymbol{g} : V \to U'$ *di classe* $\mathcal{C}^1$ *tale che* $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g} = \mathbb{I}_V$ *e* $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f} = \mathbb{I}_{U'}$.

**Dim.** Sia

$$\boldsymbol{H} : U \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+n} \to \mathbb{R}^n \quad , \quad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \boldsymbol{y} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

Osserviamo che $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)) = \mathbf{0}$, che $\boldsymbol{H}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno di $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))$ e che $(J_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{H})(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)) = -J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ è invertibile. Applicando quindi il teorema di Dini ad $\boldsymbol{H}$ scopriamo che data l'equazione $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ è possibile esplicitare $\boldsymbol{x}$ in funzione di $\boldsymbol{y}$, ma questo significa appunto che è possibile invertire la mappa $\boldsymbol{f}$. Il teorema di Dini mostra inoltre che l'inversa è anch'essa di classe $\mathcal{C}^1$. ■

**Oss. 3.7** Di fatto, il Teor. 3.5 equivale al Teor. 3.4: dato per dimostrato il Teor. 3.5 è possibile dimostrare il Teor. 3.4 osservando che determinare le soluzioni di $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$ equivale a determinare la controimmagine del punto $(\boldsymbol{x}, \mathbf{0})$ tramite la mappa $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$.

È importante osservare che l'invertibilità locale in ogni punto del dominio della funzione di per sé non garantisce l'invertibilità globale. Il seguente esempio dovrebbe essere illuminante.

**Esempio 3.7** Si consideri la funzione $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$ data da

$$\boldsymbol{f}(x, y) := \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ xy \end{pmatrix}.$$

Tale funzione certamente non è invertibile in $\mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$ poiché $\boldsymbol{f}(-x, -y) = \boldsymbol{f}(x, y)$, tuttavia lo jacobiano di $\boldsymbol{f}$ è

$$(J\boldsymbol{f})(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det(J\boldsymbol{f})(x, y) = 2(x^2 + y^2)$$

e quindi $\boldsymbol{f}$ è localmente invertibile in un intorno di ogni punto di $\mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$. ■

Il teorema di invertibilità locale ha a sua volta il seguente importante corollario:

**Teorema 3.6 (mappa aperta)** *Sia* $U$ *un aperto di* $\mathbb{R}^n$ *e sia* $\boldsymbol{f} := U \to \mathbb{R}^n$ *una funzione di classe* $\mathcal{C}^1$. *Supponiamo che* $(J\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})$ *sia invertibile per ogni* $\boldsymbol{x} \in U$. *Allora* $\boldsymbol{f}(U)$ *è aperto in* $\mathbb{R}^n$.

**Dim.** Sia $\boldsymbol{y}_0 \in \boldsymbol{f}(U)$. Certamente esiste $\boldsymbol{x}_0 \in U$ tale che $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$. Per ipotesi $(J\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}_0)$ è invertibile quindi dal teorema precedente esiste una mappa inversa $\boldsymbol{f}^{-1}$

locale di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno aperto di $\boldsymbol{y}_0$ contenuto in $\boldsymbol{f}(U)$; ciò implica che $\boldsymbol{y}_0$ è interno ad $\boldsymbol{f}(U)$. ■

L'ipotesi che $J\boldsymbol{f}$ sia invertibile è essenziale al fine della validità della conclusione nel teorema precedente.

**Esempio 3.8** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. $f$ è di classe $\mathcal{C}^1$ e tuttavia $f((-1,1)) = [0,1)$ che non è aperto. Ciò non contrasta con il teorema precedente dato che l'ipotesi di invertibilità di $J\boldsymbol{f}$ non è qui soddisfatta: infatti $(Jf)(0) = 2x|_{x=0} = 0$. ■