Lezioni di Analisi Matematica 3

corso di Laurea in Fisica

a.a. 2005-'06

G. Molteni

M. Vignati

CAPITOLO 2

Serie di funzioni

2.1. Considerazioni generali

1] Nell'insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ siano definite le funzioni $u_n : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $n = 0, 1, \ldots$. Si possono definire diversi tipi di convergenza per la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Def. 2.1 (convergenza puntuale) La serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *converge puntualmente in* $E \subseteq D$ se in ogni punto $x \in E$ la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ è (semplicemente) convergente. La *funzione somma* è la $S : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ definita da

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \ . \tag{2.1}$$

Def. 2.2 (convergenza assoluta) La serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *converge assolutamente in* E se in ogni punto $x \in E$ la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ è assolutamente convergente, cioè se

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)| < +\infty \ . \tag{2.2}$$

Chiaramente, come per le serie numeriche, la convergenza assoluta implica (ma non è implicata da) la convergenza puntuale.

Esempio 2.1 Se $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n+1}$, $x \in \mathbb{R}$, la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n+1} = 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + \cdots$:

·) non converge se $|x| > 1$, perché il termine generale non tende a zero;

·) converge assolutamente se $|x| < 1$, perché $\left|\dfrac{x^n}{n+1}\right| \leq |x|^n$;

·) non converge se $x = 1$ (è la serie armonica);

·) se $x = -1$ converge semplicemente, per il criterio di Leibniz, ma non assolutamente.

Così, l'insieme di convergenza puntuale è l'intervallo $[-1, 1)$, mentre l'insieme di convergenza assoluta è l'intervallo $(-1, 1)$. ∎

Per stabilire se la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge puntualmente (o assolutamente) nell'insieme E, dobbiamo perciò pensare ad un punto $x \in E$ fissato, controllare se c'è convergenza semplice (o assoluta) della serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ e poi far variare il punto x in tutto l'insieme E. È importante sottolineare che una diversa (al variare di x) velocità di convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ non ha effetti sulla convergenza puntuale (o assoluta) della serie di funzioni nell'insieme E.

2] Affermare che la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge puntualmente, in E, alla funzione somma S equivale a dire che la successione delle somme parziali $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ converge puntualmente, in E, alla funzione S. Sappiamo però che per le successioni di funzioni esiste anche un altro tipo di convergenza, quella uniforme, e questo porta alla

Def. 2.3 (convergenza uniforme) La serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *converge uniformemente in* E alla funzione somma S, e scriviamo $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *unif. in* E, se la successione della somme parziali $\{S_n\}$ è uniformemente convergente, in E, alla funzione S.

La convergenza uniforme implica chiaramente quella puntuale, ma non viceversa.

Come abbiamo visto nel Par. 2.3 del Cap. 1, la convergenza uniforme di una successione di funzioni $\{f_n\}$ permette alla funzione limite di ereditare alcune proprietà valide per le f_n. Poiché la convergenza uniforme della serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ è la convergenza uniforme della successione $\{S_n\}$ delle somme parziali, ne ricaviamo che se $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge uniformemente in E la somma S può ereditare alcune delle proprietà degli addendi u_n. Così, valgono

·) Se $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ unif. in E, e se $u_n \in \mathcal{C}(E)$ per ogni n, abbiamo $S \in \mathcal{C}(E)$.

·) Se $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ unif. in $[a, b]$, e se $u_n \in \mathcal{C}([a, b])$ per ogni n, allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\, dx = \int_a^b S(x)\, dx\,. \tag{2.3}$$

·) Se le u_n sono derivabili in un intervallo limitato I, tali che $\sum_{n=0}^{\infty} u_n'$ converge uniformemente in I e se $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x_0)$ converge in qualche $x_0 \in I$, allora:

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S$ unif. in I, S è derivabile e

$$S' = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n \ . \tag{2.4}$$

3] Queste proprietà illustrano l'importanza di stabilire se una serie di funzioni sia uniformemente convergente. Uno dei criteri è la condizione di Cauchy, che enunciamo sia in termini di convergenza puntuale che di convergenza uniforme in modo da evidenziare ulteriormente la differenza tra le due proprietà.

·) *Condizione di Cauchy per la convergenza puntuale:*
la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge puntualmente in E se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in E,\ \exists\, N = N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N} :\ n \geq N,\ p \geq 1 \implies \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon \ . \tag{2.5}$$

·) *Condizione di Cauchy per la convergenza uniforme:*
la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge uniformemente in E se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists\, N = N_{\varepsilon} \in \mathbb{N} :\ n \geq N,\ p \geq 1 \implies \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon \qquad \forall x \in E \tag{2.6}$$

o, equivalentemente, se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists\, N = N_{\varepsilon} \in \mathbb{N} :\ n \geq N,\ p \geq 1 \implies \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right\|_{\infty,E} < \varepsilon \ . \tag{2.6'}$$

Come si può notare, in (2.5) l'indice N dipende sia da ε che da x, mentre in (2.6) la dipendenza è solo da ε (cioè c'è uniformità rispetto ad x).
La condizione di Cauchy è necessaria ed anche sufficiente per la convergenza della serie, ma è spesso molto difficile da verificare. Una delle conseguenze che se ne ricavano è, analogamente a quanto detto nel Par. 1.2 del Cap. 1

$$\text{“se } \sum_{n=0}^{\infty} u_n \ \text{ converge unif. in } E \text{ allora } \lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_{\infty,E} = 0 \text{ ”} \tag{2.7}$$

e questo fatto può solo essere usato come condizione sufficiente di <u>non</u> convergenza uniforme.

4] L'importanza della convergenza uniforme, sottolineata nel Par. 2, porta però a cercare condizioni che siano sufficienti per garantirla. A tale scopo, è conveniente introdurre un ulteriore tipo di convergenza, la convergenza totale. Questa nozione ha, nei confronti della convergenza uniforme, un ruolo simile a quello che la convergenza assoluta ha nei confronti della convergenza puntuale, come vedremo più avanti.

Def. 2.4 (convergenza totale) La serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *converge totalmente in* E se esiste una successione numerica $\{M_n\}$ tale che $|u_n(x)| \leq M_n$ per ogni $x \in E$, ed inoltre la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge.

Da un punto di vista operativo, per dimostrare che la $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge totalmente in E dobbiamo trovare dei numeri M_n abbastanza grandi da funzionare come maggioranti di $|u_n(x)|$ per ogni x, e nello stesso tempo non troppo grandi, in modo da permettere a $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ di convergere. Ovviamente, questa seconda esigenza porta a cercare gli M_n "più piccoli" possibile, e per rispettare la prima richiesta la scelta cade necessariamente su $M_n = \sup_{x\in E} |u_n(x)| = \|u_n\|_{\infty,E}$. Così, una formulazione equivalente della Def. 2.4 è:

Def. 2.4' La serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *converge totalmente in* E se e solo se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_{\infty,E} < +\infty\ . \tag{2.8}$$

5]

Teorema 2.1 (criterio di K. Weierstrass) *La convergenza totale di* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *in* E *implica la convergenza uniforme.*

Dim. Vogliamo dimostrare che vale (2.6'). Fissiamo $\varepsilon > 0$, ed osserviamo che la convergenza totale di $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ in E equivale, per la (2.8), alla convergenza della serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_{\infty,E}$, che quindi soddisfa la condizione di Cauchy (1.1). Perciò, siamo in grado di trovare un indice $N = N_\varepsilon$ tale che, se $n \geq N$ e $p \geq 1$

$$\varepsilon > \sum_{k=n+1}^{n+p} \|u_k\|_{\infty,E} \geq \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right\|_{\infty,E}$$

cioè la (2.6'). ■

6] Lo schema riassuntivo delle relazioni che intercorrono tra i quattro possibili tipi di convergenza di una serie è il seguente

$$
\begin{array}{ccc}
Conv.\, totale & \Longrightarrow & Conv.\, assoluta \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
Conv.\, uniforme & \Longrightarrow & Conv.\, puntuale
\end{array}
\tag{2.9}
$$

Da questo schema si deduce che la convergenza puntuale è la più debole, e viene implicata da tutte le altre, mentre la convergenza totale è la più forte.

7] Lo schema (2.9) è completo, nel senso che le implicazioni mancanti non sono, in generale, valide, come vediamo con i seguenti controesempi.

·) La serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge assolutamente, e quindi puntualmente, in $E = [0, 1)$ (perché ha termini ≥ 0), ma non uniformemente (e quindi nemmeno totalmente) perché $\|x^n\|_{\infty,E} \equiv 1 \not\to 0$ e quindi non vale la (2.7).

·) La serie di funzioni costanti $u_n(x) \equiv (-1)^n/n$ converge uniformemente in $\mathbb{R}$ (perché manca la dipendenza da x), ma non assolutamente (e quindi nemmeno totalmente) perché $|u_n(x)| \equiv 1/n$.

·) Neppure la combinazione "conv. assoluta + conv. uniforme" implica la convergenza totale. In ogni $x \in E := [1, +\infty)$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x}\chi_{[n,n+1)}(x)$ ha un solo addendo diverso da 0, e la somma è $S(x) = \frac{1}{x}$. Tutti gli addendi sono ≥ 0, per cui la convergenza è assoluta; inoltre

$$S(x) - S_n(x) = \frac{1}{x}\chi_{[n+1,+\infty)}(x)$$

e quindi $\|S - S_n\|_{\infty,E} = \dfrac{1}{n+1} \longrightarrow 0$, da cui segue la convergenza uniforme. Però

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{\infty,E} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

e quindi non abbiamo convergenza totale. ■

2.2. Serie di potenze

1] Una *serie di potenze* nel campo reale è una serie di funzioni del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

dove il *centro* x_0 ed i *coefficienti* a_n sono numeri reali. A meno di una traslazione possiamo sempre riportarci alla situazione in cui il centro è $x_0 = 0$ e quindi studiare le serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{2.10}$$

I due principali problemi che affrontiamo sono: descrivere l'insieme E di convergenza; studiare le proprietà della funzione somma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \tag{2.11}$$

al variare di x in E.

2] Certamente l'insieme E di convergenza di una serie di potenze non è mai vuoto perché per $x = 0$ tutti gli addendi della serie, tranne al più il primo, si annullano; quindi la serie converge in $x = 0$ e ha somma a_0. Questa situazione è, in un certo senso, "minimale": può accadere che una serie di potenze converga solo nel suo centro. Questo accade, ad esempio, per la $\sum_{n=0}^{+\infty} n^n x^n$, in cui il termine generale $(nx)^n$ non tende a zero se $x \neq 0$ escludendo perciò ogni possibilità di convergenza in punti diversi dall'origine (vd. Cap.1, Par. 1.2).

È anche possibile imbattersi nella situazione opposta, in qualche modo "massimale", cioè avere serie di potenze che convergono per ogni $x \in \mathbb{R}$. Se $x \in \mathbb{R}$ viene fissato, e al termine generale della $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$ applichiamo il criterio della radice (vd. Cap. 1, Par. 1.5), abbiamo

$$\sqrt[n]{\left(\frac{|x|}{n}\right)^n} = \frac{|x|}{n} \to 0 < 1$$

e quindi la $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$ converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Situazioni intermedie tra quelle descritte sono anche possibili. Ad esempio, sappiamo (vd. Cap. 1, Par. 1.6) che la serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ converge solo se $x \in (-1, 1)$.

Tuttavia, con il prossimo risultato vediamo che l'insieme E di convergenza di una serie di potenze deve avere una forma ben precisa.

3]

Teorema 2.2 *Se la $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge in un punto $\xi \neq 0$, allora converge almeno in tutto l'intervallo $(-|\xi|, |\xi|)$. Inoltre, la convergenza è totale in ogni insieme compatto contenuto in $(-|\xi|, |\xi|)$.*

Dim. La serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \xi^n$ converge, per cui la successione $a_n \xi^n$ tende a 0 e quindi è limitata; perciò esiste una costante M tale che $|a_n \xi^n| \leq M$ per ogni n. Così

$$|a_n x^n| = |a_n \xi^n| \left(\frac{|x|}{|\xi|}\right)^n \leq M \left(\frac{|x|}{|\xi|}\right)^n$$

e se $|x| < |\xi|$ utilizziamo il criterio del confronto (vd. Cap. 1, Par. 1.5) per ottenere la convergenza assoluta di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Se poi I è un insieme compatto contenuto nell'intervallo aperto $(-|\xi|, |\xi|)$ la quantità $|x|/|\xi|$ si mantiene discosta da 1 quando $x \in I$ e questo porta alla convergenza totale in I. ■

4] Un'ovvia conseguenza di questo teorema riguarda la natura dell'insieme di convergenza E: non può che essere un intervallo simmetrico rispetto ad $x = 0$ la cui semi-ampiezza $\rho := \sup E$ è detta *raggio di convergenza* della serie di potenze; chiaramente ρ può assumere uno qualsiasi dei valori di $[0, +\infty]$. Così, il teorema precedente può essere anche enunciato come:

Teorema 2.3 *Ad ogni serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ è possibile associare un raggio di convergenza $\rho \in [0, +\infty]$ in modo che:*

·) *Se $\rho = 0$ la serie converge solo in $x = 0$.*

·) *Se $0 < \rho < +\infty$ la serie converge se $x \in (-\rho, \rho)$ e non converge se $|x| > \rho$, inoltre la convergenza è totale nei compatti di $(-\rho, \rho)$.*

·) *Se $\rho = +\infty$ la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$ e la convergenza è totale nei compatti.*

Oss. 2.1 Dalle proprietà sulle operazioni algebriche tra serie numeriche (vd. Cap. 1 Par. 1.9) e da quanto detto in questo teorema segue che se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ hanno raggi di convergenza ρ e ρ' e somme $f(x)$ e $g(x)$, allora la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)x^n$ ha raggio di convergenza $R \geq \min(\rho, \rho')$ e somma $f(x) + g(x)$.
Anche per la serie prodotto secondo Cauchy il raggio di convergenza non è inferiore a $\min(\rho, \rho')$ e la funzione somma è $f(x)g(x)$.

Oss. 2.2 La definizione di serie prodotto secondo Cauchy di due serie numeriche, ricordata nel Par. 1.9 del Cap. 1, può a prima vista apparire innaturale; in realtà, trae origine proprio dalla teoria delle serie di potenze. Infatti, se operiamo in modo formale senza occuparci dei problemi di convergenza, il prodotto termine a termine di due serie di potenze porta a

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots) \\ = \; & a_0(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots) + a_1 x(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots) + \\ & + a_2 x^2 (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots) + \cdots \end{aligned}$$

e riordinando i termini con la stessa potenza della x otteniamo

$$\begin{aligned} = \; & (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots \\ = \; & c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \end{aligned}$$

dove

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \; .$$

5] Il risultato del Teor. 2.3 lascia aperti i due seguenti due problemi:

i) cosa si può dire, nel caso $0 < \rho < +\infty$, del comportamento della serie nei punti $x = \pm\rho$?

ii) come calcolare il raggio di convergenza?

Rispondere al primo problema è semplice: se $0 < \rho < +\infty$ non è possibile fornire una risposta generale sul comportamento della serie di potenze quando $|x| = \rho$. Ad esempio, è facile verificare che le tre serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \;\; , \;\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \;\; , \;\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

hanno come insiemi di convergenza, rispettivamente, gli intervalli $(-1,1)$, $[-1,1)$ e $[-1,1]$. Quindi, in tutti e tre i casi si ha $\rho = 1$ ma il comportamento nei punti $x = -1$ e $x = 1$ è diverso.

6] Poiché le serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ si differenziano tra loro solo per la natura dei coefficienti, è lecito aspettarsi che un eventuale criterio per il calcolo del raggio di convergenza debba dipendere dalla successione $\{a_n\}$, o meglio dal suo comportamento per $n \to +\infty$. Inoltre, è lecito aspettarsi che a un "rimpicciolimento" di tutte le quantità $|a_n|$ debba corrispondere un "ampliamento" dell'insieme di convergenza.
Esistono due comodi criteri per il calcolo del raggio di convergenza ρ di una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$; per brevità di notazione in entrambi i casi trattiamo con una quantità $\ell \in [0, +\infty]$ e indichiamo con $\frac{1}{\ell}$ il suo inverso, con la convenzione che $\frac{1}{0} = +\infty$ e $\frac{1}{+\infty} = 0$.

·) Criterio di Cauchy-Hadamard: *Se esiste* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$, *allora* $\rho = \frac{1}{\ell}$.

Dim. Per $x \neq 0$, $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} \to \ell|x|$ e poi applichiamo il Criterio della Radice (Cap. 1 Par. 1.5). ■

Questo criterio ha in realtà una applicabilità più ampia. Non sempre, infatti, il limite di una successione numerica esiste, ma esiste sempre il suo $\limsup_{n\to+\infty}$, che coincide con il limite quando questo esiste. Il criterio di Cauchy-Hadamard è valido con $\ell = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

·) Criterio di d'Alembert *Se* $a_n \neq 0$ *per ogni* n *e se esiste* $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$, *allora* $\rho = \frac{1}{\ell}$.

7] Nel caso la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ abbia raggio di convergenza $\rho > 0$, la funzione somma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

è definita almeno nell'intervallo aperto $(-\rho, \rho)$. Una prima, immediata, proprietà di f è descritta dal

Teorema 2.4 *La funzione f è continua in $(-\rho, \rho)$.*

Dim. È sufficiente mostrare che f è continua in un generico punto $x_0 \in (-\rho, \rho)$. Trattandosi di un punto interno all'intervallo, riusciamo a trovare $\delta > 0$ in modo da avere $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subset (-\rho, \rho)$; per il Teor. 2.3 la serie converge totalmente, e quindi uniformemente, nei compatti di $(-\rho, \rho)$; perciò la convergenza in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ è uniforme e nel Par. 2.2 abbiamo visto che da ciò segue che f è continua in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, e quindi nel punto x_0. ■

8] Sempre trattando di continuità, c'è anche un risultato che descrive cosa accade se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, con raggio di convergenza $0 < \rho < +\infty$, converge anche in uno dei punti estremi dell'intervallo $(-\rho, \rho)$. Enunciamo il risultato per $x = \rho$, ma ovviamente vale anche per $x = -\rho$.

Teorema 2.5 (N. H. Abel) *Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ha raggio di convergenza $\rho \in (0, +\infty)$ e se converge in $x = \rho$, allora la convergenza è uniforme nei compatti di $(-\rho, \rho]$. Così la funzione somma è continua in $(-\rho, \rho]$.*

Questo risultato è spesso utilizzato, come vedremo più avanti, per calcolare il valore della serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho^n$, perché implica che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho^n = f(\rho) = \lim_{x \to \rho^-} f(x) \; . \tag{2.12}$$

9] Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, definiamo la sua *serie derivata* come la serie di potenze ottenuta derivando termine a termine i suoi addendi, ovvero

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \; . \tag{2.13}$$

Un primo risultato è

Teorema 2.6 *La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ e la sua serie derivata hanno lo stesso raggio di convergenza.*

Dim. La serie derivata ha la forma $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, dove $b_n = (n+1)a_{n+1}$. Allora

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \left(\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} \right)^{\frac{n+1}{n}} (n+1)^{1/n}$$

e poiché $(n+1)^{1/n} \to 1$ il $\limsup_{n\to+\infty}$ delle due successioni è lo stesso. ■

Combinando questo risultato con quelli visti nel Par. 2.3 del Cap. 1 otteniamo facilmente, per serie di potenze con raggio di convergenza $\rho > 0$, il seguente risultato.

Teorema 2.7 *Se $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ in $(-\rho, \rho)$, allora:*

·) f è derivabile in $(-\rho, \rho)$ e la sua derivata è la somma della serie derivata, cioè

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \,. \tag{2.14}$$

·) f è integrabile e

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \,, \quad |x| < \rho. \tag{2.15}$$

Dim. La convergenza di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ e della sua serie derivata è totale, quindi anche uniforme, in ogni compatto contenuto in $(-\rho, \rho)$, di conseguenza è possibile derivare termine a termine.
Per l'integrazione, è sufficiente osservare che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ è la serie derivata di $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ e che sia la funzione integrale $\int_0^x f(t)\,dt$ che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ valgono zero in $x = 0$. ■

10] Il precedente risultato afferma che se $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ in $(-\rho, \rho)$, la funzione somma appartiene alla classe $\mathcal{C}^1((-\rho, \rho))$. Il procedimento può però essere iterato, e porta alla formula

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k} \quad , \quad k = 0, 1, \ldots$$

Valutando poi tale formula in $x = 0$ si ottiene un legame tra i coefficienti a_k e le derivate successive di f calcolate nell'origine

$$f^{(k)}(0) = k!\, a_k \,. \tag{2.16}$$

Riassumendo, vale il

Teorema 2.8 *Se* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *in* $(-\rho, \rho)$*, allora* $f \in \mathcal{C}^\infty((-\rho, \rho))$*. Inoltre*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad , \ |x| < \rho \ . \tag{2.17}$$

Oss. 2.3 Questo teorema può anche essere letto come un risultato di unicità per i coefficienti di una serie di potenze, nel senso che: se due serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ convergono alla stessa funzione in qualche insieme $(-R, R)$, allora $a_n = b_n$ per ogni n.

Oss. 2.4 Tutto quanto è stato detto fino ad ora rimane valido, con ovvie modifiche, per serie di potenze di centro $x_0 \in \mathbb{R}$. Così, se la $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ ha raggio di convergenza $\rho > 0$, la sua somma $f(x)$ è infinitamente derivabile nell'intervallo $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ e per ogni x in questo intervallo si ha

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \ . \tag{2.18}$$

11] Illustriamo con due esempi come può essere utilizzato il risultato (2.12) del teorema di Abel, combinandolo con la formula (2.15) per l'integrazione per serie.

Esempio 2.2 Per $x \in (-1, 1)$ la serie geometrica converge alla somma

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \ ;$$

integrando tra 0 ed x otteniamo

$$\log \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad , \ |x| < 1$$

e questa serie converge anche in $x = -1$, per cui la formula (2.12) permette di ottenere

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2 \ .$$

■

Esempio 2.3 Sempre per $|x| < 1$, la serie geometrica di ragione $-x^2$ converge alla somma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-x^2\right)^n = \frac{1}{1+x^2};$$

integrando tra 0 ed x otteniamo

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad , |x| < 1$$

e poiché questa serie, per il criterio di Leibniz, converge in $x = 1$, dalla (2.12) otteniamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4} \, .$$

■

2.3. Serie di Taylor

1] Il teorema del Par. 2.8 afferma che la somma $f(x)$ di una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ con raggio di convergenza $\rho > 0$ è una funzione infinitamente derivabile in $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$; inoltre, vale la (2.18). Ora, proviamo ad invertire questo punto di vista.
Data una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, ed un punto $x_0 \in (a, b)$, ci chiediamo quali condizioni possano garantire la validità di una relazione del tipo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, (x - x_0)^n \, , \tag{2.19}$$

se non in tutto (a, b), almeno in un opportuno intorno di x_0. Quando questo accade, diciamo che f è *sviluppabile in serie di potenze* con centro x_0, o anche che f è *analitica* in x_0.
Per quanto visto fino ad ora, sappiamo che se una formula come (2.19) vale, questo deve accadere in un intervallo del tipo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$, in cui la f deve necessariamente essere infinitamente derivabile ed i coefficienti devono avere il valore

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \, .$$

Abbiamo così evidenziato il seguente problema:

Data $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, infinitamente derivabile, costruiamo la sua serie di Taylor di centro $x_0 \in (a,b)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \; .$$

È vero che f coincide in qualche $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b)$ con la somma di questa serie?

La risposta a questo problema è in generale negativa. Ad esempio, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ e ha tutte le derivate nulle in $x_0 = 0$; perciò, la sua serie di Taylor di centro 0 è identicamente nulla, mentre f si annulla solo nell'origine.

Questo esempio mostra che non tutte le funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ in un intorno di un punto x_0 sono analitiche nel punto. L'insieme delle funzioni analitiche in ogni punto di un insieme aperto I è spesso denotato con il simbolo $\mathcal{C}^\omega(I)$ ed è un sottoinsieme proprio di $\mathcal{C}^\infty(I)$.

Oss. 2.5 Segnaliamo, senza dimostrazione, un risultato che permette di ottenere, in ipotesi molto più blande, il principio di unicità dei coefficienti, riportato nella Oss. 2.3.

Teorema 2.9 (principio di identità delle funzioni analitiche) *Se $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ e $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ nell'intervallo $(-\rho, \rho)$ e se l'insieme dei punti x in cui $f(x) = g(x)$ ha un punto di accumulazione in $(-\rho, \rho)$, allora $a_n = b_n$ per ogni n e quindi $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in (-\rho, \rho)$.*

2] L'esempio del paragrafo precedente ci porta a cercare condizioni, sulle funzioni f, che possano garantire una risposta affermativa al problema della sviluppabilità in serie di Taylor. Un risultato positivo è

Teorema 2.10 *Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ ed $f \in \mathcal{C}^\infty((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$. Se, per qualche $0 < r \leq \delta$ esiste una costante $c \geq 0$ tale che*

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq c\, n!\, r^{-n} \tag{2.20}$$

per ogni intero n ed ogni $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, allora la funzione f è analitica in x_0 e

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n \tag{2.21}$$

per ogni $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$.

Dim. Se $|x - x_0| < r$, la formula di Taylor di centro x_0, arrestata all'ordine n e con resto secondo Lagrange garantisce che

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^k = \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}(x - x_0)^n$$

per qualche punto ξ_n compreso tra x ed x_0. Perciò, per la (2.20)

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k \right| \le c\Big(\frac{|x - x_0|}{r}\Big)^n \to 0$$

quando $n \to +\infty$, perché $|x - x_0|/r < 1$. ■

Osservando che il secondo membro di (2.20) tende all'infinito, ricaviamo immediatamente il

Corollario 2.1 *Se $f \in \mathcal{C}^\infty((a,b))$ ed ha derivate equilimitate in (a,b) (cioè $|f^{(n)}(x)| \le c$ per ogni n e per ogni $x \in (a,b)$), allora $f \in \mathcal{C}^\omega((a,b))$.*

3] Concludiamo il capitolo con alcune applicazioni di questi ultimi risultati. Ricordiamo che storicamente le serie di Taylor di centro $x_0 = 0$ prendono il nome di <u>serie di MacLaurin</u>.

Esempio 2.4 La funzione esponenziale $f(x) = e^x$ è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ e rimane invariata per derivazione, cioè $f^{(n)}(x) = e^x$ per ogni n. Così, tutte le derivate valutate in $x = 0$ valgono 1 e la serie di MacLaurin di f è $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n/n!$. Per ogni $R > 0$, tutte le derivate di f sono equilimitate dalla costante $c = e^R$ in $(-R, R)$ e quindi f coincide con la somma della sua serie di MacLaurin in $(-R, R)$. Poiché R è arbitrario, otteniamo

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{2.22}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. ■

Esempio 2.5 La funzione $f(x) = \sin x$ è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ e le sue derivate, che sono date da una delle quattro espressioni $\{\pm \sin x,\, \pm \cos x\}$, sono equilimitate in $\mathbb{R}$ da $c = 1$. I valori assunti da queste derivate in $x = 0$ sono, ciclicamente, $0, 1, 0, -1$ e quindi

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \tag{2.23}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

In modo del tutto simile

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \tag{2.24}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. ■

Esempio 2.6 La formula, peraltro ben nota, per la serie geometrica

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad |x| < 1 \tag{2.25}$$

può essere ottenuta anche partendo dalla funzione $f(x) = (1-x)^{-1}$; le derivate successive valgono infatti $f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-n-1}$; esse non sono equilimitate in alcun intorno dell'origine e quindi non è possibile applicare il Corollario 2.1, tuttavia è possibile utilizzare il Teorema 2.10 scegliendo $c = 1$ ed per r un qualsiasi numero reale positivo e minore di 1. Osserviamo infine che se $r > 1$ allora non esiste alcun valore di c tale per cui la disuguaglianza (2.20) sia valida. ■

Esempio 2.7 Per ogni $|x| < 1$ sappiamo che vale l'eguaglianza

$$\frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \tag{2.26}$$

e quindi, integrando tra 0 ed x, otteniamo

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \tag{2.27}$$

È importante osservare che queste due ultime formule sono valide, rispettivamente, solo in $(-1, 1)$ e in $(-1, 1]$, benché le funzioni al primo membro siano definite anche per altri valori di x, valori per i quali, però, le serie di potenze non convergono. ■

Esempio 2.8 Come già visto nell'Es. 2.3, per ogni $x \in [-1, 1]$ vale l'eguaglianza

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ ; \tag{2.28}$$

anche in questo caso va notato che la funzione a primo membro è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, ma la formula è valida solo per $|x| \leq 1$ (se $|x| > 1$ la serie non converge). ■

4] Molti dei discorsi visti fino a qui rimangono invariati se consideriamo serie di potenze nel campo complesso

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \tag{2.29}$$

con $a_n, z \in \mathbb{C}$.
Anche a queste serie di potenze è possibile associare un raggio di convergenza $\rho \in [0, +\infty]$ che coincide con il raggio di convergenza della serie (reale) $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| x^n$. Se $\rho \in (0, +\infty)$ la convergenza è assoluta nel disco $B_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$, totale nei compatti contenuti in B_ρ e non c'è convergenza fuori da $\overline{B_\rho}$. Se invece $\rho = +\infty$ c' è convergenza assoluta in ogni $z \in \mathbb{C}$ e totale nei compatti. Nulla può essere detto, in generale, per i punti di $\partial B_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho\}$ ma, per una estensione del teorema di Abel (vd. Par. 2.8), se la serie converge nel punto $z = \rho e^{i\vartheta}$, allora la convergenza è uniforme lungo il raggio $[0, \rho e^{i\vartheta}]$.

Se i coefficienti a_n sono tutti reali, la funzione (analitica e a valori reali) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ è la restrizione all'intervallo $(-\rho, \rho)$ della funzione $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, analitica (e a valori complessi) in B_ρ. L'esempio forse più celebre di questo legame è quello della *funzione esponenziale complessa*

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{2.30}$$

che converge per ogni $z \in \mathbb{C}$.
L'esponenziale complesso ha molte delle proprietà funzionali di e^x (ad es. $e^{z+w} = e^z\, e^w$, ...). Se calcoliamo i suoi valori per $z = i\vartheta$, $\vartheta \in \mathbb{R}$ e manipoliamo la serie di

potenze separandone la parte reale e la parte immaginaria otteniamo

$$\begin{aligned} e^{i\vartheta} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\vartheta)^n}{n!} = \left(\sum_{n \text{ pari}} + \sum_{n \text{ dispari}} \right) \left(\frac{(i\vartheta)^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\vartheta)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\vartheta)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\vartheta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\vartheta^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

che, ricordando (2.23) e (2.24) dà la famosa *formula di Eulero*

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i \sin\vartheta \tag{2.31}$$

e le relazioni

$$\cos\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} \ , \ \sin\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i} \ .$$