

Lezioni di Analisi Matematica 3

corso di Laurea in Fisica

a.a. 2005-'06

G. Molteni

M. Vignati

VERSIONE PRELIMINARE 26.9.05

CAPITOLO 11

Teoria del potenziale

Ricordiamo anzitutto alcune nozioni di algebra lineare. Sia \mathcal{V} uno spazio vettoriale su \mathbb{R} . Lo spazio duale \mathcal{V}^* è, per definizione, l'insieme dei *funzionali lineari* di \mathcal{V} , ovvero l'insieme delle mappe $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ per le quali

$$\phi(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a\phi(\mathbf{v}) + b\phi(\mathbf{w})$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$. Lo spazio \mathcal{V}^* ha anch'esso la struttura di spazio vettoriale rispetto alle operazioni di somma e di prodotto per scalare che derivano dal porre

$$(a\phi_1 + b\phi_2)(\mathbf{v}) := a\phi_1(\mathbf{v}) + b\phi_2(\mathbf{v}) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

Si dimostra che \mathcal{V} è finito dimensionale se e solo se anche \mathcal{V}^* è finito dimensionale e che quando ciò accade le loro dimensioni sono sempre uguali. Tipicamente, se e_j per $j = 1, \dots, m$ è una base di \mathcal{V} , allora i funzionali e_j^* con $j = 1, \dots, m$ definiti così che

$$e_j^*(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

e prolungati a \mathcal{V} per linearità costituiscono a loro volta una base di \mathcal{V}^* . La mappa che ad e_j associa il funzionale e_j^* costituisce un isomorfismo tra gli spazi \mathcal{V} e \mathcal{V}^* , tuttavia esso è detto *non canonico* in quanto per essere definito necessita della scelta di una base in \mathcal{V} . La situazione cambia quando in \mathcal{V} risulta definita anche un'operazione di prodotto scalare non degenera, ovvero una mappa $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ bilineare simmetrica e per la quale $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$ per ogni $\mathbf{v} \neq 0$. In presenza di un tale prodotto scalare, infatti, ad ogni vettore $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$ può essere associato il funzionale $\phi_{\mathbf{w}}$ definito ponendo

$$\phi_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) := \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

Il teorema di rappresentazione di Riesz afferma che ogni funzionale può essere rappresentato in quel modo, ovvero, che dato un funzionale qualsiasi ϕ , esiste sempre un vettore $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$ tale che $\phi = \phi_{\mathbf{w}}$.

Esempio 11.1 Sia \mathcal{V} lo spazio dei polinomi reali in due variabili X, Y e di grado minore od uguale a 2. Si tratta di uno spazio di dimensione 6 una cui base è costituita dai polinomi $1, X, Y, X^2, XY, Y^2$. Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare rispetto al quale tale base risulta essere ortonormale, ovvero tale che

$$\langle X^\alpha Y^\beta, X^\gamma Y^\delta \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = \gamma \text{ e } \beta = \delta, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ la mappa che sul polinomio p ha come valore il valore di p in $(1, 1)$:

$$\phi(p) := p(1, 1).$$

ϕ è chiaramente un funzionale su \mathcal{V} e di fatti si verifica che

$$\phi(\cdot) = \langle 1 + X + Y + X^2 + XY + Y^2, \cdot \rangle.$$

■

Nel capitoli precedenti abbiamo utilizzato il termine *campo vettoriale* per indicare una mappa definita in un aperto di \mathbb{R}^2 ed a valori in \mathbb{R}^2 od in un aperto di \mathbb{R}^3 ed a valori in \mathbb{R}^3 . Osserviamo che gli aperti connessi A di \mathbb{R}^n sono (la parte aperta di) sostegni di prevarietà regolari in \mathbb{R}^n , parametrizzati dalla mappa identità e che in base al Teor. 8.4 ad ogni punto \mathbf{p} di A è associato lo spazio vettoriale $T_{\mathbf{p}}A$ costituito dai vettori tangenti in \mathbf{p} ad A . Tale spazio ha dimensione n , esattamente come A . Le mappe $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ possono quindi essere pensate come mappe che ad ogni punto $\mathbf{p} \in A$ associano un vettore $\mathbf{F}(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}A$. Letti in questi termini, il concetto di campo vettoriale si presta immediatamente alla seguente generalizzazione tramite la quale in seguito riusciremo a chiarire l'importanza dello studio del concetto di campo vettoriale.

Def. Sia data una prevarietà regolare Φ di dimensione n , di dominio D e sostegno V . Per il Teor. 8.4 ad ogni punto \mathbf{p} della parte aperta V° è associato lo spazio vettoriale $T_{\mathbf{p}}V$, anch'esso n dimensionale: un *campo vettoriale* su V è una mappa \mathbf{F} definita su V° che ad ogni punto $\mathbf{p} \in V^\circ$ associa un vettore di $T_{\mathbf{p}}V$.

Si noti che i valori del campo vettoriale \mathbf{F} sono vettori che appartengono ciascuno ad un diverso spazio vettoriale.

Come ricordato all'inizio, ad ogni spazio vettoriale è canonicamente associato lo spazio duale e quindi anche allo spazio tangente $T_{\mathbf{p}}V$ risulta associato uno spazio duale che sarà indicato con il simbolo $T_{\mathbf{p}}V^*$; come i campi vettoriali sono funzioni che associano ad ogni punto della varietà un vettore dello spazio tangente, così in base alla definizione seguente le forme differenziali sono le funzioni che associano ad ogni punto un funzionale dello spazio tangente:

Def. Sia data una prevarietà regolare Φ di dimensione n , di dominio D e sostegno V . Per il Teor. 8.4 ad ogni punto \mathbf{p} della parte aperta V° è associato lo spazio vettoriale $T_{\mathbf{p}}V$, anch'esso n dimensionale: una *forma differenziale* su V è una mappa ω definita su V° che ad ogni punto $\mathbf{p} \in V^\circ$ associa un elemento di $T_{\mathbf{p}}V^*$ ovvero un funzionale su $T_{\mathbf{p}}V$.

Esempio 11.2 Quando nello studio del moto di un fluido si adotta quello che va sotto il nome di “punto di vista euleriano”, ad ogni punto \mathbf{x} dello spazio ed ad ogni istante t è associato un vettore $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ che indica la velocità di una particella di fluido quando si trova in quella posizione a quell'istante: la funzione \mathbf{v} è un campo vettoriale; analogamente sono campi vettoriali l'accelerazione e la forza, per citare alcuni semplici esempi presi dalla dinamica. ■

Esempio 11.3 Data una sfera V in rotazione attorno ad un suo asse, la funzione che ad ogni punto della sua superficie associa la velocità di quel punto è un campo vettoriale sulla sfera (vd. Fig.11.1).

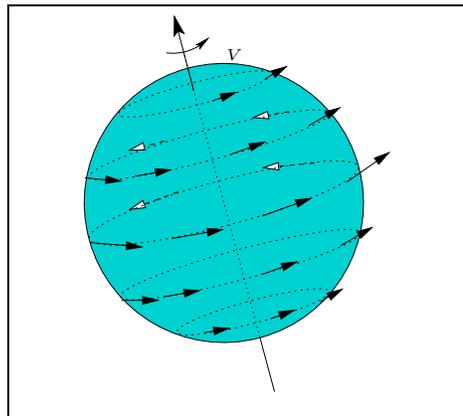


FIGURA 11.1: *il campo vettoriale sulla sfera dovuto ad una rotazione.* ■

Esempio 11.4 Ciò che, utilizzando il linguaggio della fisica, viene descritto come lavoro elementare $\langle \mathbf{F}, d\mathbf{x} \rangle$ conseguente allo spostamento infinitesimo $d\mathbf{x}$ in presenza della forza \mathbf{F} è in realtà una forma differenziale (e $d\mathbf{x}$ non è lo spostamento infinitesimo, affermazione dal significato matematico troppo vago per essere accettata ai giorni nostri). ■

Data una varietà regolare qualsiasi, lo studio dei suoi campi vettoriali e delle sue forme differenziali può rivelare importanti e per certi versi inaspettate proprietà di V . Un classico esempio è il seguente risultato: ogni campo vettoriale sulla sfera di \mathbb{R}^3 deve annullarsi in almeno due punti (quindi sulla terra vi sono sempre almeno due punti in cui non tira mai vento!). Tuttavia addentrarci in questo studio ci porterebbe troppo lontano, motivo per cui d'ora in poi considereremo campi vettoriali e forme differenziali unicamente su prevarietà il cui sostegno sia costituito da aperti di \mathbb{R}^n e per le quali, quindi, la mappa di parametrizzazione è semplicemente la mappa identità.

Sia dunque A un aperto di \mathbb{R}^n e ne siano x_1, \dots, x_n le coordinate. Con il simbolo

$$\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \text{o più succintamente } \partial_{x_i},$$

si indica il campo vettoriale che nel punto \mathbf{x} di coordinate (x_1, \dots, x_n) rispetto alla base canonica assume come valore quell'unico vettore dello spazio $T_{\mathbf{x}}V$ che risulta parallelo ad \mathbf{e}_i (vd. Fig. 11.2).

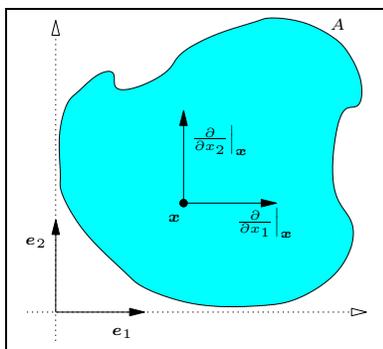


FIGURA 11.2.

Oss. 11.1 Usare il simbolo $\frac{\partial}{\partial x_i}$ per indicare il campo vettoriale che in ogni punto $\mathbf{x} \in A$ fornisce il vettore applicato in \mathbf{x} e parallelo ad \mathbf{e}_i è coerente col fatto che il medesimo simbolo rappresenta la derivata parziale rispetto ad x_i ; infatti, se

deriviamo parzialmente rispetto ad x_i la funzione \boldsymbol{x} otteniamo proprio il vettore $\frac{\partial}{\partial x_i}|_{\boldsymbol{x}}$.

Sia \boldsymbol{F} un qualsiasi campo vettoriale e sia \boldsymbol{x} un qualsiasi punto di A . Per definizione di campo vettoriale $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ è un vettore appartenente allo spazio $T_{\boldsymbol{x}}A$; dato che i vettori $\frac{\partial}{\partial x_i}|_{\boldsymbol{x}}$ al variare di i sono una base di $T_{\boldsymbol{x}}A$, è possibile decomporre su tale base il vettore $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, ovvero esistono numeri f_1, \dots, f_n per i quali

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1}|_{\boldsymbol{x}} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2}|_{\boldsymbol{x}} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}|_{\boldsymbol{x}}.$$

Al variare di \boldsymbol{x} ovviamente cambierà anche il vettore $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ per cui i coefficienti f_1, \dots, f_n sono funzioni di \boldsymbol{x} ; concludendo, il campo \boldsymbol{F} può sempre essere scritto come

$$(11.1) \quad \boldsymbol{F} = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

dove le f_i sono funzioni di \boldsymbol{x} . Le coordinate individuano un vettore solo dopo che si è fissata una base dello spazio vettoriale; dato che noi useremo sempre e solo la base standard $\frac{\partial}{\partial x_i}$, è tuttavia corretto e spesso comodo individuare il campo vettoriale tramite la collezione delle sue funzioni coordinate rispetto a tale base, per tale ragione al posto di (11.1) talvolta scriveremo:

$$(11.2) \quad \boldsymbol{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T.$$

Analogamente, con il simbolo

$$dx_i$$

si indica quella forma differenziale che quando è valutata nel punto \boldsymbol{x} fornisce quel funzionale di $T_{\boldsymbol{x}}A^*$ che assume i seguenti valori:

$$(11.3) \quad dx_i|_{\boldsymbol{x}} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}|_{\boldsymbol{x}} \right) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Le forme differenziali dx_i con $i = 1, \dots, n$, quindi, forniscono in ogni punto della varietà A un funzionale che insieme costituiscono la base duale della base $\frac{\partial}{\partial x_i}$ dei campi.

Sia ω una forma differenziale e sia \boldsymbol{x} un punto di A ; $\omega(\boldsymbol{x})$ è un funzionale di $T_{\boldsymbol{x}}A^*$, per definizione di forma differenziale. I funzionali $dx_i|_{\boldsymbol{x}}$, al variare di i descrivono una base di questo spazio quindi esistono dei numeri f_1, \dots, f_n per i quali

$$\omega(\boldsymbol{x}) = f_1 dx_1|_{\boldsymbol{x}} + \dots + f_n dx_n|_{\boldsymbol{x}}.$$

Al variare di \mathbf{x} ovviamente cambia anche il funzionale $\omega(\mathbf{x})$ per cui i coefficienti f_1, \dots, f_n sono funzioni di \mathbf{x} ; in conclusione abbiamo trovato che ω può essere scritta come

$$(11.4) \quad \omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n,$$

dove le f_i sono funzioni del punto. Analogamente a quanto fatto per i campi vettoriali, anche le forme differenziali possono essere individuate dalla sola collezione delle funzioni coordinate quando si sottintende l'uso della base standard dx_i ed al posto di (11.4) talvolta scriveremo

$$(11.5) \quad \omega = (f_1, f_2, \dots, f_n).$$

Oss. 11.2 Si noti come l'insieme delle coordinate di un campo vettoriale siano organizzate a dare un vettore colonna (espressione (11.2)) mentre quello di una forma differenziale sia organizzato a dare un vettore riga (espressione (11.5)).

Def. Un campo vettoriale od una forma differenziale sono detti di classe \mathcal{C}^n quando le funzioni coordinate sono di classe \mathcal{C}^n .

Def. Sia A un aperto di \mathbb{R}^n e sia f una funzione di classe \mathcal{C}^1 a valori reali. Il *differenziale* di f , in simboli df , è la forma differenziale

$$df := \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Ribadiamo che come per tutte le forme differenziali, il differenziale df di una funzione f di per sé *non* è un funzionale: è il suo valore $df|_{\mathbf{x}}$ in un dato punto \mathbf{x} ad essere un funzionale sullo spazio $T_{\mathbf{x}}A$ secondo la relazione

$$df|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\mathbf{x}} dx_1|_{\mathbf{x}} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\mathbf{x}} dx_n|_{\mathbf{x}}.$$

Esempio 11.5 Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 y^2$, calcolare il valore di $df|_{\mathbf{x}}(\mathbf{v})$ quando \mathbf{x} è il punto di coordinate $(2, -1)$ e \mathbf{v} è il vettore di $T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^2$ di coordinate $(4, 3)$.

La forma differenziale df è

$$df = 3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy,$$

il suo valore nel punto $(2, -1)$ è il funzionale sullo spazio $T_{(2, -1)}\mathbb{R}^2$

$$df|_{(2, -1)} = 12 dx|_{(2, -1)} - 16 dy|_{(2, -1)};$$

il valore di tale funzionale sul vettore $\mathbf{v} = 4\partial_x|_{(2,-1)} + 3\partial_y|_{(2,-1)}$ è calcolato usando la linearità e la relazione (11.3):

$$\begin{aligned} df|_{(2,-1)}(4\partial_x|_{(2,-1)} + 3\partial_y|_{(2,-1)}) &= 12 dx|_{(2,-1)}(4\partial_x|_{(2,-1)} + 3\partial_y|_{(2,-1)}) - 16 dy|_{(2,-1)}(4\partial_x|_{(2,-1)} + 3\partial_y|_{(2,-1)}) \\ &= 12 \cdot 4 dx|_{(2,-1)}(\partial_x|_{(2,-1)}) + 12 \cdot 3 dx|_{(2,-1)}(\partial_y|_{(2,-1)}) \\ &\quad - 16 \cdot 4 dy|_{(2,-1)}(\partial_x|_{(2,-1)}) - 16 \cdot 3 dy|_{(2,-1)}(\partial_y|_{(2,-1)}) \\ &= 12 \cdot 4 - 12 \cdot 3 = 0. \end{aligned}$$

■

Il teorema di rappresentazione di Riesz consente di esprimere ogni forma differenziale come prodotto scalare con un campo vettoriale, e viceversa: più in dettaglio, una volta decomposta la forma differenziale ω rispetto alla base canonica $\omega = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$ e preso \mathbf{x} arbitrario in A , si ha che comunque si scelga il vettore $\mathbf{v} = v_1\partial_{x_1}|_{\mathbf{x}} + \dots + v_n\partial_{x_n}|_{\mathbf{x}}$ di $T_{\mathbf{x}}A$ vale l'uguaglianza

$$\omega|_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) = f_1 v_1 + \dots + f_n v_n = \langle f_1 \partial_{x_1}|_{\mathbf{x}} + \dots + f_n \partial_{x_n}|_{\mathbf{x}}, \mathbf{v} \rangle.$$

Ciò significa che introducendo il campo vettoriale $\mathbf{F} := f_1 \partial_{x_1} + \dots + f_n \partial_{x_n}$, possiamo scrivere che

$$\omega = \langle \mathbf{F}, \cdot \rangle,$$

ovvero che ω è rappresentata, tramite il prodotto scalare, dal campo vettoriale \mathbf{F} . Ad esempio, tramite questa rappresentazione il differenziale di f può essere identificato con il campo vettoriale le cui componenti rispetto alla base canonica sono le derivate parziali di f :

$$df = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1} \partial_{x_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \partial_{x_n}, \cdot \right\rangle.$$

Discutere di campi vettoriali piuttosto che di forme differenziali è quindi sostanzialmente solo una questione di "gusto": ogni risultato sui campi vettoriali si traduce immediatamente in un risultato sulle forme differenziali, e viceversa. Tuttavia vi sono almeno due buoni motivi per mantenere questo duplice linguaggio:

- molte grandezze fisiche nascono naturalmente come campi vettoriali (velocità, accelerazione, forze), altre come forme differenziali (il lavoro elementare, ad esempio) e descrivere una tramite l'altra appare, da questo punto di vista, artificioso;

- la completa identificazione tra campi vettoriali e forme differenziali è dovuta all'esistenza di un prodotto scalare non degenere definito in modo "canonico" in ogni spazio tangente e dipendente dal punto in modo "regolare" così che se la forma è di classe \mathcal{C}^n anche il corrispondente campo è di classe \mathcal{C}^n . Ciò è vero nelle varietà con cui abbiamo deciso di lavorare ora, i domini aperti di \mathbb{R}^n , ma non è possibile in tutte le varietà.

Sia ora data una forma differenziale ω continua su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Ne sia

$$\omega = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$$

la decomposizione sulla base canonica. Sia poi assegnata una curva regolare ed orientabile il cui sostegno γ è contenuto in A e la mappa $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ne sia una parametrizzazione di classe \mathcal{C}^1 . Siano Φ_1, \dots, Φ_n le funzioni coordinate di Φ . Si definisce *integrale di ω su γ* , in simboli indicato con

$$\int_{\gamma} \omega$$

il valore dell'integrale

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b f_1(\Phi(t)) \frac{d\Phi_1}{dt}(t) + \cdots + f_n(\Phi(t)) \frac{d\Phi_n}{dt}(t) dt.$$

Di fatto, indicando con \mathbf{F} il campo vettoriale associato alla forma ω , si ha

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds$$

dove $\boldsymbol{\tau}$ è il versore tangente alla curva; questa uguaglianza mostra così come l'integrale di una forma differenziale sia in realtà l'integrale del lavoro dovuto al campo vettoriale associato e come tale è già stato analizzato nel capitolo precedente.

Def. Una forma differenziale ω su un aperto $a \in \mathbb{R}^n$ è detta *esatta* quando esiste una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ di classe \mathcal{C}^1 tale che $\omega = df$. Indicate con (f_1, \dots, f_n) le coordinate di ω , la sua esattezza equivale all'esistenza di una funzione f di classe \mathcal{C}^1 che soddisfa il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali $\partial_{x_i} f = f_i$ per ogni i .

Analogamente, un campo vettoriale \mathbf{F} su A è detto *conservativo* quando la forma differenziale associata ad \mathbf{F} , ovvero la forma $\omega := \langle \mathbf{F}, \cdot \rangle$, risulta esatta. Indicate con $(F_1, \dots, F_n)^T$ le coordinate di \mathbf{F} , esso sarà conservativo se e solo se esiste una funzione f di classe \mathcal{C}^1 che soddisfa il sistema di equazioni differenziali $\partial_{x_i} f = F_i$

per ogni i .

In entrambi i casi la funzione f cercata è detta *potenziale*.

La nozione di potenziale, specie in relazione ad un campo vettoriale, è ben nota agli studenti di fisica. In quel contesto però il legame tra il potenziale f ed il campo \mathbf{F} è solitamente diverso: là, infatti, il potenziale f è usualmente definito come una funzione a valori reali le cui derivate parziali sono *l'opposto del campo* e non il campo stesso, ovvero $\partial_{x_i} f = -F_i$, non $\partial_{x_i} f = F_i$ come invece segue dalla definizione assunta da noi. Il motivo per cui in quei contesti si adotta quella convenzione è che così facendo un corpo che si trovi soggetto alla forza \mathbf{F} presenterà dei punti di equilibrio *stabile* in corrispondenza dei punti di *minimo* del potenziale, un po' come se il corpo si muovesse rotolando lungo il grafico del potenziale fermandosi là dove il potenziale presenta delle gole. Lo studio dell'equilibrio esula però dai nostri scopi per cui dal nostro punto di vista l'introduzione del segno meno nel legame tra potenziale e campo apparirebbe tanto artificiale quanto inutile, motivo per cui, lo ribadiamo a scanso di equivoci, il potenziale f di un campo \mathbf{F} soddisfa le equazioni $\partial_{x_i} f = F_i$.

Prima di procedere dobbiamo generalizzare ulteriormente il concetto di curva e di curva orientata.

Def. Una curva γ (vd. Def. 9.4) è detta *regolare a tratti* quando è unione finita di curve regolari, ovvero quando $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$ per opportune curve regolari $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, inoltre essa è detta *orientabile* quando ciascuna delle γ_j lo è.

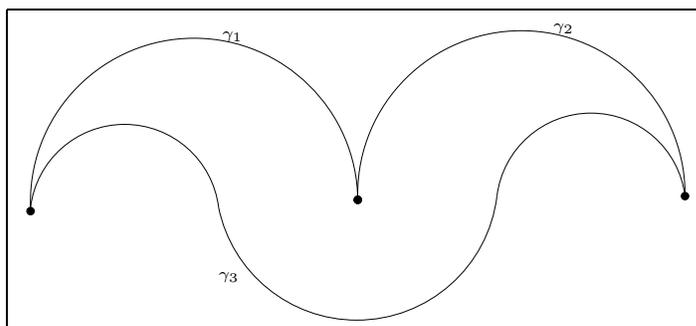


FIGURA 11.3: la curva γ composta da tre tratti regolari γ_1 , γ_2 e γ_3 .

Si osservi che una curva regolare a tratti in quanto curva è necessariamente un insieme connesso (vd. Def. 9.4); i suoi tratti regolari, quindi, possono sempre

essere numerati in modo che il punto finale del tratto i -esimo coincida con quello iniziale del tratto $i + 1$ -esimo (vd. Fig. 11.3).

Come tradisce l'aggettivo, ci aspettiamo che su una curva regolare a tratti ed orientabile sia possibile introdurre una orientazione; questo non può essere fatto in modo ovvio, perché nei punti di contatto dei tratti regolari il versore tangente presenta inevitabilmente una discontinuità. Per il momento supponiamo siano date due sole curve γ_1 e γ_2 entrambe regolari, orientabili ed aventi un punto estremo in comune; diciamo che le loro orientazioni sono *compatibili* quando esse sono il limite al tendere di ϵ a zero dell'orientazione di una curva regolare ed orientabile che approssima la curva $\gamma_1 \cup \gamma_2$ a meno di ϵ (vd. Fig. 11.4).

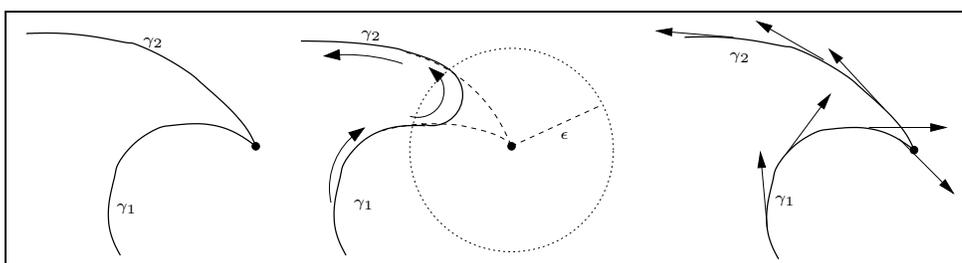


FIGURA 11.4: da sinistra a destra, il processo che porta alla costruzione di un orientamento sulla curva regolare a tratti $\gamma_1 \cup \gamma_2$.

Una orientazione di una curva regolare a tratti γ ed orientabile è allora definita come una scelta compatibile delle orientazioni delle curve orientabili di cui γ è composta (vd. Fig. 11.5).

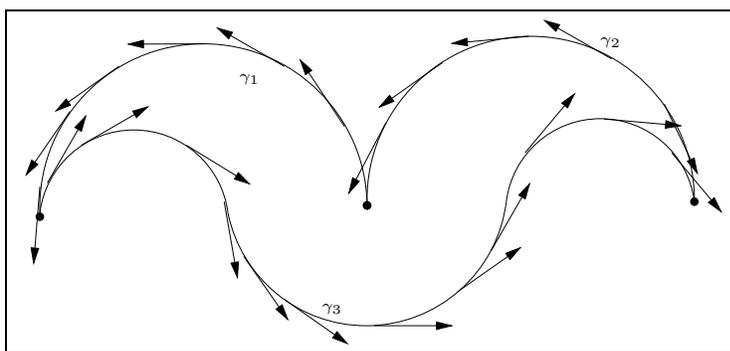


FIGURA 11.5: un orientamento della curva di Fig. 11.3.

Siamo ora in grado di dimostrare la seguente interessante proprietà degli insiemi aperti connessi.

Teorema 11.1 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso. Allora A è anche connesso per archi regolari a tratti ed orientabile, ovvero per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in A$, esiste una curva regolare a tratti ed orientabile che congiunge \mathbf{p} con \mathbf{q} .*

Dim. Fissiamo ad arbitrio un punto $\mathbf{p} \in A$. Sia

$$W := \{\mathbf{q} \in A : \mathbf{q} \text{ è connesso a } \mathbf{p} \text{ da una curva regolare a tratti orientabile}\}.$$

Osserviamo che W non è vuoto, dato che contiene sicuramente il punto \mathbf{p} (e la curva che collega \mathbf{p} a \mathbf{p} è la curva costante).

W è un aperto. Infatti, dato $\mathbf{q} \in W$, esiste sicuramente un intorno sferico di \mathbf{q} contenuto in A (perché è aperto), ed ogni punto \mathbf{r} di tale intorno è connesso, per esempio dal raggio, a \mathbf{q} . D'altra parte \mathbf{q} è connesso a \mathbf{p} perché per ipotesi $\mathbf{q} \in W$, quindi unendo le due curve si ha una curva, regolare a tratti ed orientabile, che connette \mathbf{p} ad \mathbf{r} .

$A \setminus W$ è aperto. Infatti, sia $\mathbf{q} \in A \setminus W$ e quindi non connesso a \mathbf{p} . Esiste sicuramente un intorno sferico di \mathbf{q} contenuto in A (perché è aperto). Supponiamo che un punto \mathbf{r} di tale intorno sia connesso a \mathbf{p} . Ma allora anche \mathbf{q} sarebbe connesso a \mathbf{p} percorrendo il raggio da \mathbf{q} a \mathbf{r} e poi la curva che unisce, per ipotesi \mathbf{r} a \mathbf{p} . Questa è però in contraddizione con l'ipotesi che $\mathbf{q} \in A \setminus W$ e quindi anche $\mathbf{r} \in A \setminus W$.

Abbiamo scritto A come unione di due aperti, W e $A \setminus W$, il primo dei quali non vuoto: essendo per ipotesi A connesso, da ciò segue che $W \equiv A$, ovvero che ogni coppia di punti di A è connessa da una curva regolare a tratti ed orientabile, concludendo in tal modo la dimostrazione. ■

Osserviamo che il potenziale, quando esiste, non è mai unico: infatti, dato che il differenziale di una funzione costante è la forma differenziale nulla, ad ogni potenziale possiamo sempre sommare una costante ed ottenere un secondo potenziale (esattamente come accade per le primitive in \mathbb{R}). Di fatti, utilizzando il teorema precedente si dimostra il seguente risultato.

Proposizione 11.1 *Sia A un aperto connesso di \mathbb{R}^n ed ω una forma differenziale esatta in A . Siano f_1 ed f_2 due potenziali di classe C^1 per ω , allora esiste una costante c tale che $f_1 = f_2 + c$.*

Dim. Dato che l'operatore di differenziazione è lineare, per dimostrare la tesi basta dimostrare che se $df = 0$ in A , allora f è costante in A .

Sia $\mathbf{p} \in A$ scelto ad arbitrio ma fissato. Sia \mathbf{q} un secondo punto di A . Dal teorema precedente sappiamo che esiste una curva regolare a tratti $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ che connette \mathbf{p} con \mathbf{q} . Ciò significa che esistono un numero finito di punti $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_m = b$ tali che Φ è continua in $[a, b]$ e derivabile in ciascun aperto (a_i, a_{i+1}) (con $\Phi'(t) \neq 0$, ma questo non è importante ora). La funzione $f \circ \Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è quindi continua in $[a, b]$ e differenziabile nei tratti (a_i, a_{i+1}) , con

$$\frac{d(f \circ \Phi)}{dt} = 0$$

in ciascun tratto (a_i, a_{i+1}) , poiché per ipotesi $df = 0$. Dal caso monodimensionale sappiamo che da ciò segue che $f \circ \Phi$ è costante in (a_i, a_{i+1}) , per ogni i . Questo fatto e la continuità di $f \circ \Phi$ in $[a, b]$ implicano che $f \circ \Phi$ è costante in $[a, b]$. In particolare ciò implica che $f(\mathbf{p}) = (f \circ \Phi)(a) = (f \circ \Phi)(b) = f(\mathbf{q})$, dimostrando così che f è costante in A . ■

Fra poco enunceremo alcune importanti condizioni equivalenti alla esattezza di ω , prima però diamo la seguente definizione.

Def. Una curva γ è detta *chiusa* se l'insieme $\gamma \setminus \{\mathbf{p}\}$ è connesso per ogni $\mathbf{p} \in \gamma$. Un modo diverso di esprimere questa proprietà è dire che γ è chiusa se è l'immagine di un segmento $[a, b]$ tramite una mappa continua Φ con $\Phi(a) = \Phi(b)$.

Teorema 11.2 (Condizioni equivalenti) *Sia A un aperto connesso di \mathbb{R}^n ed ω una forma differenziale continua in A . Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- i. $\int_{\gamma} \omega = 0$ per ogni curva regolare a tratti, orientabile e chiusa γ ;
- ii. per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in A$ connessi da due curve γ_1 e γ_2 regolari a tratti ed orientabili e orientate entrambe da \mathbf{p} a \mathbf{q} , si ha

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega;$$

- iii. esiste una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1 tale che

$$\int_{\mathbf{p}\gamma\mathbf{q}} \omega = f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p})$$

per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in A$ e per ogni curva γ regolare a tratti orientabile che connette \mathbf{p} con \mathbf{q} ed è orientata da \mathbf{p} a \mathbf{q} ;

- iv. ω è esatta.

Dim.

i. \implies *ii.* Infatti, la curva costituita dall'unione γ_1 e $-\gamma_2$ (la curva con sostegno γ_2 ma orientata in senso opposto) è un'unica curva, regolare a tratti, orientabile e chiusa. Per *i.* abbiamo

$$0 = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega,$$

che dimostra la validità di *ii.*

ii. \implies *iv.* Infatti, sia \mathbf{p} un punto qualsiasi di A . Per il Teor. 11.1 A è connesso per archi (regolari a tratti ed orientabili) e quindi per ogni altro punto \mathbf{q} esiste una curva regolare a tratti ed orientata che connette \mathbf{p} con \mathbf{q} : indichiamo tale curva con il simbolo $\mathbf{p}\gamma\mathbf{q}$; risulta quindi ben definito il numero $\int_{\mathbf{p}\gamma\mathbf{q}} \omega$. Dalla assunzione *ii.* segue che tale numero dipende dal punto \mathbf{q} ma non dalla curva γ e quindi è ben definita la funzione

$$f(\mathbf{q}) := \int_{\mathbf{p}\gamma\mathbf{q}} \omega.$$

Vogliamo mostrare che f è di classe \mathcal{C}^1 e che il suo differenziale è proprio ω . Anzitutto osserviamo che una volta scritta ω come $f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$ con f_i continue in A , se dimostriamo che $\partial_{x_i} f = f_i$ per ogni i allora la differenziabilità di f seguirà immediatamente dato che per ipotesi le f_i sono continue. Dimostriamo dunque che $\partial_{x_1} f = f_1$, le altre uguaglianze seguono in modo analogo. Sia dunque $h \in \mathbb{R}$ sufficientemente piccolo così che $\mathbf{q} + h\mathbf{e}_1$ sia ancora in A (questo è sempre possibile poiché A è aperto), allora

$$f(\mathbf{q} + h\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{q}) = \int_{\mathbf{p}\gamma\mathbf{q} + h\mathbf{e}_1} \omega - \int_{\mathbf{p}\gamma\mathbf{q}} \omega.$$

Dato che per ipotesi l'integrale non dipende dal cammino prescelto ma solo dai punti connessi, possiamo supporre che il cammino che unisce \mathbf{p} con $\mathbf{q} + h\mathbf{e}_1$ sia costituito dal cammino che unisce \mathbf{p} con \mathbf{q} seguito dal cammino

$$\Phi : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Phi(t) = \mathbf{q} + t\mathbf{e}_1$$

che connette \mathbf{q} con $\mathbf{q} + h\mathbf{e}_1$ lungo il segmento η di estremi \mathbf{q} e $\mathbf{q} + h\mathbf{e}_1$ (vd. Fig. 11.6).

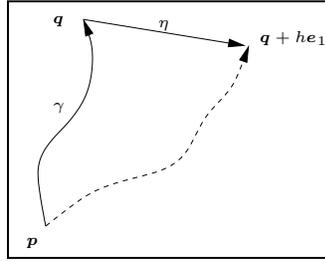


FIGURA 11.6.

Di conseguenza

$$\begin{aligned} f(\mathbf{q} + h\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{q}) &= \int_{(\mathbf{p}\gamma\mathbf{q}) \cup (\mathbf{q}\eta\mathbf{q} + h\mathbf{e}_1)} \omega - \int_{\mathbf{p}\gamma\mathbf{q}} \omega = \int_{\mathbf{q}\eta\mathbf{q} + h\mathbf{e}_1} \omega \\ &= \int_0^h f_1(\Phi(t)) h dt = \int_0^h f_1(\mathbf{q} + t\mathbf{e}_1) dt, \end{aligned}$$

per l'additività rispetto al dominio di integrazione. Dalla continuità di f_1 ed il teorema del valor medio integrale segue dunque che

$$f(\mathbf{q} + h\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{q}) = hf_1(\mathbf{q} + \epsilon\mathbf{e}_1) \quad \text{ovvero} \quad \frac{f(\mathbf{q} + h\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{q})}{h} = f_1(\mathbf{q} + \epsilon\mathbf{e}_1),$$

per qualche $\epsilon \in]0, h[$. Prendendo il limite per $h \rightarrow 0$ ed usando di nuovo la continuità di f_1 in A si ottiene l'esistenza di $\partial_{x_1} f(\mathbf{q})$ insieme all'uguaglianza $\partial_{x_1} f(\mathbf{q}) = f_1(\mathbf{q})$, concludendo la dimostrazione.

iv. \implies *i.* Possiamo supporre che la curva sia composta da un unico tratto regolare (altrimenti basta usare l'additività dell'integrale per ottenere la tesi). Sia dunque $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare chiusa e quindi tale che $\Phi(a) = \Phi(b)$. Supponiamo che sia $\omega = df$ per una qualche funzione f a valori scalari e di classe \mathcal{C}^1 , allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_{\gamma} df = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\Phi(t)} \frac{d\Phi_1}{dt}(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\Phi(t)} \frac{d\Phi_n}{dt}(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d(f \circ \Phi)}{dt}(t) dt = (f \circ \Phi)(b) - (f \circ \Phi)(a) \\ &= f(\Phi(b)) - f(\Phi(a)) = 0, \end{aligned}$$

che è la tesi.

iv. \implies *iii.* Basta dimostrare la tesi nel caso in cui il cammino che connette \mathbf{p} a \mathbf{q} sia una curva regolare $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sia f un potenziale per ω , allora

$df = \omega$ e quindi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{p}\gamma\mathbf{q}} \omega &= \int_{\mathbf{p}\gamma\mathbf{q}} df = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\Phi(t)} \frac{d\Phi_1}{dt}(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\Phi(t)} \frac{d\Phi_n}{dt}(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d(f \circ \Phi)}{dt} dt = (f \circ \Phi)(b) - (f \circ \Phi)(a) = f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p}), \end{aligned}$$

dimostrando quindi che il potenziale f soddisfa la richiesta *iii*.

iii. \implies *ii.* Evidente. ■

La seconda condizione nel teorema precedente spiega l'interesse per la nozione di esattezza: se ω è esatta il lavoro compiuto dal campo vettoriale ad essa associato lungo un cammino che connette due punti dipende unicamente dai due punti e non dal cammino, di conseguenza per il suo calcolo si può scegliere il cammino che si preferisce.

Esempio 11.6 Calcolare l'integrale di $\omega(x, y) = y^2 dx + 2xy dy$ lungo la spezzata γ che collega nell'ordine i punti $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 4)$ e $(1, 2)$.

Osserviamo che ω è esatta poiché $\omega = df$ dove $f(x, y) = xy^2$, quindi, grazie alla condizione *iii.* del teorema precedente segue che

$$\int_{\gamma} \omega = f(1, 2) - f(0, 0) = 4. \quad \blacksquare$$

Esempio 11.7 Calcolare l'integrale di $\omega(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2} dx + \frac{2y}{x^2+y^2} dy$ lungo la curva $\Phi : [\pi/2, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Phi(\vartheta) = (\vartheta \cos \vartheta, \vartheta \sin \vartheta)^T$.

Osserviamo che ω è esatta poiché $\omega = df$ dove $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ sull'aperto $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, quindi

$$\int_{\gamma} \omega = f(\Phi(\pi)) - f(\Phi(\pi/2)) = f(-\pi, 0) - f(0, \pi/2) = \log \pi^2 - \log(\pi^2/4) = \log 4.$$

Eseguiamo, per confronto, il calcolo diretto: abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{2\vartheta \cos \vartheta}{\vartheta^2} d(\vartheta \cos \vartheta) + \frac{2\vartheta \sin \vartheta}{\vartheta^2} d(\vartheta \sin \vartheta) \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{2 \cos \vartheta}{\vartheta} (\cos \vartheta - \vartheta \sin \vartheta) + \frac{2 \sin \vartheta}{\vartheta} (\sin \vartheta + \vartheta \cos \vartheta) d\vartheta \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{2}{\vartheta} d\vartheta = 2 \log \vartheta \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \log 4. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Esempio 11.8 Sia \mathbf{F} un campo vettoriale radiale in \mathbb{R}^n , ovvero

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}(\|\mathbf{x}\|) \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$$

dove \mathcal{F} è una funzione a valori scalari, definita in qualche intervallo aperto (a, b) e continua, così che \mathbf{F} è continua nella corona sferica

$$A := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a < \|\mathbf{x}\| < b\}.$$

La forma differenziale ad esso associata è

$$\omega = \frac{\mathcal{F}(\|\mathbf{x}\|)}{\|\mathbf{x}\|} (x_1 dx_1 + \cdots + x_n dx_n).$$

Tale forma è sempre esatta: un potenziale è infatti dato dalla funzione

$$f(\mathbf{x}) := \int_c^{\|\mathbf{x}\|} \mathcal{F}(t) dt,$$

dove c è un qualsiasi numero in (a, b) , fissato. In altre parole, un campo vettoriale radiale ammette sempre un potenziale. ■

Il teorema precedente mostra l'importanza della proprietà di esattezza, tuttavia tale concetto sarebbe di scarsa utilità se non ci fosse un modo rapido e relativamente semplice per stabilire se una data forma differenziale sia esatta o meno. Fortunatamente tale risultato esiste.

Def. Sia A un aperto connesso di \mathbb{R}^n ed ω una forma differenziale di classe \mathcal{C}^1 in A . Sia $\omega = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$ la decomposizione di ω sulla base standard. ω è detta *chiusa* se

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j.$$

Analogamente, un campo vettoriale \mathbf{F} su A di classe \mathcal{C}^1 è detto *irrotazionale* quando la forma differenziale associata ad \mathbf{F} risulta chiusa.

Oss. 11.3 L'aggettivo *irrotazionale* è mutuato dalla seguente osservazione: se \mathbf{F} è un campo vettoriale di classe \mathcal{C}^1 in un aperto di \mathbb{R}^3 , \mathbf{F} è irrotazionale se e solo se $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Teorema 11.3 Sia A un aperto connesso di \mathbb{R}^n ed ω una forma differenziale di classe \mathcal{C}^1 in A . Se ω è esatta, allora è anche chiusa.

Dim. Infatti, sia f un potenziale per $\omega = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$. Dato che per ipotesi le funzioni f_i sono di classe \mathcal{C}^1 e dato che per definizione di potenziale esse sono di fatto le derivate parziali di f , ne segue che f è di classe \mathcal{C}^2 . Di conseguenza abbiamo che

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i},$$

dimostrando così la validità della tesi. ■

Oss. 11.4 Nel caso in cui A sia un aperto di \mathbb{R}^3 il teorema precedente ammette anche la seguente interessante dimostrazione alternativa. Essendo ω esatta, il suo integrale lungo qualsiasi curva regolare a tratti e chiusa è zero. In termini del campo vettoriale \mathbf{F} canonicamente associato ad ω , ciò significa che $\int_\gamma \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds = 0$ per ogni curva chiusa. In base al teorema di Stokes ciò significa che $\int_S \langle \text{rot } \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma = 0$ per ogni superficie con bordo ed orientabile contenuta in A . Dato che per ipotesi $\text{rot } \mathbf{F}$ è continua, non è difficile dimostrare che la relazione precedente implica che $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ in A , ovvero l'irrotazionalità di \mathbf{F} , equivalente alla chiusura di ω .

La condizione di chiusura è una condizione necessaria che però è ben lungi dall'essere sufficiente, come il seguente esempio mette in luce.

Esempio 11.9 Si consideri la forma differenziale $\omega = \frac{y}{x^2+y^2} dx - \frac{x}{x^2+y^2} dy$ sull'aperto $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Dato che

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{-x}{x^2+y^2},$$

la forma differenziale è chiusa. Tuttavia il suo integrale lungo la circonferenza di raggio unitario percorsa una volta e in senso orario non è 0 infatti (vd. Fig. 11.7) il campo vettoriale associato ad ω è in ogni punto parallelo al versore tangente alla curva e quindi il suo lavoro è certamente positivo.

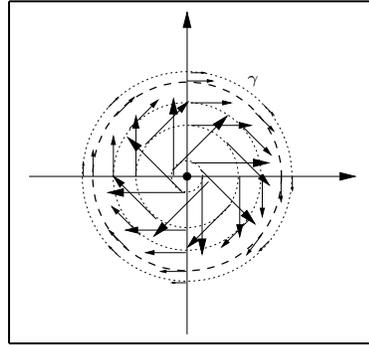


FIGURA 11.7: il campo $\mathbf{F} = \frac{y}{x^2+y^2} \partial_x - \frac{x}{x^2+y^2} \partial_y$ associato alla forma ω .

Il calcolo diretto conferma questa intuizione: sia $\Phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Phi(\vartheta) = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)^T$ una parametrizzazione di quel cammino, con ϑ che varia da 2π a 0 per tener conto della sua orientazione; allora

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{2\pi}^0 \sin \vartheta d(\cos \vartheta) - \cos \vartheta d(\sin \vartheta) = \int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi.$$

Ciò dimostra che ω non è esatta e che quindi non esiste in A un potenziale for ω . ■

La condizione di chiusura diventa però equivalente all'esattezza su certi domini particolari; diamo la seguente definizione.

Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto *stellato* quando esiste un suo punto \mathbf{p} , detto *centro della stella*, tale che per ogni altro punto $\mathbf{q} \in A$ il segmento che collega \mathbf{p} a \mathbf{q} è interamente contenuto in A (vd. Fig. 11.8).

Ricordiamo poi che

Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto *convesso* quando per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in A$ il segmento che collega \mathbf{p} a \mathbf{q} è interamente contenuto in A (vd. Fig. 11.8).

Si noti che gli insiemi convessi sono anche stellati; in effetti, è facile dimostrare che un insieme è convesso se e solo se è stellato con ogni suo punto come possibile centro. Non è vero il contrario poiché esistono insiemi stellati non convessi.

Esempio 11.10 La “girandola”, ovvero la componente limitata dalla spezzata che unisce (nell'ordine in cui sono dati) i punti: $(1, 2)$, $(1/2, 1)$, $(-2, 1)$, $(-1, 1/2)$,

$(-1, -2), (-1/2, -1), (2, -1), (1, -1/2)$ è un esempio di insieme aperto, connesso, stellato con il solo punto $(0,0)$ quale centro della stella (in particolare non è convesso) (vd. Fig. 11.8). ■

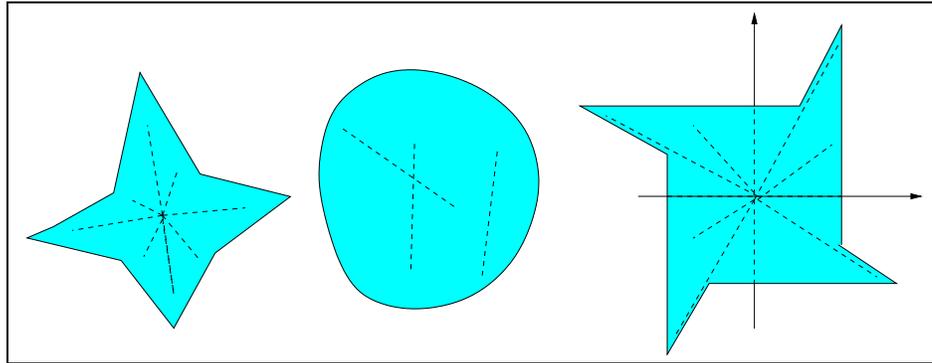


FIGURA 11.8: da sinistra a destra un dominio stellato, uno convesso ed uno stellato con un unico centro.

Teorema 11.4 (Lemma di Poincaré per pot. scalare) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto stellato ed ω una forma differenziale di classe \mathcal{C}^1 in A . Se ω è chiusa, allora è anche esatta.

Dim. La dimostrazione è molto simile a quella del punto *iii.* del Teor. 11.2. Sia $\mathbf{q} \in A$ il punto rispetto al quale A è stellato. Per ogni punto $\mathbf{p} \in A$ sia $\gamma \mathbf{p}$ il segmento che unisce \mathbf{q} con \mathbf{p} , orientato da \mathbf{q} a \mathbf{p} . Tale segmento giace interamente in A e quindi la funzione seguente è ben definita:

$$f(\mathbf{p}) := \int_{\gamma \mathbf{p}} \omega.$$

Sia $\omega = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$ la decomposizione di ω sulla base standard: le funzioni f_i sono per ipotesi di classe \mathcal{C}^1 in A . Dimostriamo il teorema verificando che f è un potenziale per ω , ovvero che è almeno di classe \mathcal{C}^1 (in realtà è \mathcal{C}^2) e che $df = \omega$. Sia la differenziabilità che la derivabilità con derivate continue di f seguiranno immediatamente non appena avremo dimostrato che $\partial_{x_i} f = f_i$ per ogni i , poiché per ipotesi le funzioni f_i sono \mathcal{C}^1 . Inoltre, possiamo limitarci a dimostrare la prima di queste uguaglianze, quella con $i = 1$, essendo possibile dimostrare le altre in modo del tutto analogo. Osserviamo dunque che

$$\begin{aligned}
& f(\mathbf{p} + h\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{p}) \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{q} + t(\mathbf{p} + h\mathbf{e}_1 - \mathbf{q}))(\mathbf{p} + h\mathbf{e}_1 - \mathbf{q})_i dt \\
&\quad - \int_0^1 \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{q} + t(\mathbf{p} - \mathbf{q}))(\mathbf{p} - \mathbf{q})_i dt \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^n [f_i(\mathbf{q} + t(\mathbf{p} + h\mathbf{e}_1 - \mathbf{q}))(\mathbf{p} + h\mathbf{e}_1 - \mathbf{q})_i - f_i(\mathbf{q} + t(\mathbf{p} - \mathbf{q}))(\mathbf{p} - \mathbf{q})_i] dt \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^n [f_i(\mathbf{q} + t(\mathbf{p} + h\mathbf{e}_1 - \mathbf{q})) - f_i(\mathbf{q} + t(\mathbf{p} - \mathbf{q}))](\mathbf{p} - \mathbf{q})_i dt \\
&\quad + h \int_0^1 f_1(\mathbf{q} + t(\mathbf{p} + h\mathbf{e}_1 - \mathbf{q})) dt \\
&= \sum_{i=1}^n (\mathbf{p} - \mathbf{q})_i \int_0^1 [f_i(\mathbf{q} + t(\mathbf{p} + h\mathbf{e}_1 - \mathbf{q})) - f_i(\mathbf{q} + t(\mathbf{p} - \mathbf{q}))] dt \\
&\quad + h \int_0^1 f_1(\mathbf{q} + t(\mathbf{p} + h\mathbf{e}_1 - \mathbf{q})) dt,
\end{aligned}$$

di conseguenza

$$\begin{aligned}
\frac{f(\mathbf{p} + h\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{p})}{h} &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{p} - \mathbf{q})_i \int_0^1 \frac{f_i(\mathbf{q} + t(\mathbf{p} + h\mathbf{e}_1 - \mathbf{q})) - f_i(\mathbf{q} + t(\mathbf{p} - \mathbf{q}))}{h} dt \\
(11.6) \quad &+ \int_0^1 f_1(\mathbf{q} + t(\mathbf{p} + h\mathbf{e}_1 - \mathbf{q})) dt.
\end{aligned}$$

Calcoliamo ora il limite per $h \rightarrow 0$: evidentemente dobbiamo scambiare l'operazione di limite con l'operazione di integrale; la liceità di tale operazione può essere assicurata tramite i teoremi esposti nella Sez. 6.7, tuttavia è forse più chiaro se ne diamo una dimostrazione diretta. Per maggiore chiarezza introduciamo la funzione

$$g_i(t, s) := f_i(\mathbf{q} + t(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + tse_1),$$

così che

$$\frac{f_i(\mathbf{q} + t(\mathbf{p} + h\mathbf{e}_1 - \mathbf{q})) - f_i(\mathbf{q} + t(\mathbf{p} - \mathbf{q}))}{h} = \frac{g_i(t, h) - g_i(t, 0)}{h}.$$

ha un massimo assoluto M nel rettangolo $(t, \eta) \in [0, 1] \times [-\zeta, \zeta]$. Dato che $\eta \in]0, h[$, da $h \rightarrow 0$ segue che anche $\eta \rightarrow 0$, così dal teorema di convergenza dominata di Lebesgue con maggiorante data dalla funzione costante M concludiamo che

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{f_i(\mathbf{q} + t(\mathbf{p} + h\mathbf{e}_1 - \mathbf{q})) - f_i(\mathbf{q} + t(\mathbf{p} - \mathbf{q}))}{h} dt \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 t \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\mathbf{q} + t(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + t\eta\mathbf{e}_1) dt \\
 &= \int_0^1 \lim_{h \rightarrow 0} t \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\mathbf{q} + t(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + t\eta\mathbf{e}_1) dt \\
 (11.7) \quad &= \int_0^1 t \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\mathbf{q} + t(\mathbf{p} - \mathbf{q})) dt.
 \end{aligned}$$

In modo analogo si dimostra che

$$(11.8) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 f_1(\mathbf{q} + t(\mathbf{p} + h\mathbf{e}_1 - \mathbf{q})) dt = \int_0^1 f_1(\mathbf{q} + t(\mathbf{p} - \mathbf{q})) dt.$$

Dalle relazioni (11.6), (11.7) e (11.8) segue quindi che $\partial_{x_1} f(\mathbf{p})$ esiste e

$$\partial_{x_1} f(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{p} - \mathbf{q})_i \int_0^1 t \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\mathbf{q} + t(\mathbf{p} - \mathbf{q})) dt + \int_0^1 f_1(\mathbf{q} + t(\mathbf{p} - \mathbf{q})) dt,$$

ma per ipotesi ω è chiusa, quindi $\partial_{x_1} f_i = \partial_{x_i} f_1$ per ogni i , così che

$$\partial_{x_1} f(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{p} - \mathbf{q})_i \int_0^1 t \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\mathbf{q} + t(\mathbf{p} - \mathbf{q})) dt + \int_0^1 f_1(\mathbf{q} + t(\mathbf{p} - \mathbf{q})) dt.$$

Introducendo la funzione $L(t) := f_1(\mathbf{q} + t(\mathbf{p} - \mathbf{q}))$ si scopre che

$$\partial_{x_1} f(\mathbf{p}) = \int_0^1 t \frac{dL}{dt}(t) dt + \int_0^1 L(t) dt$$

la quale integrata per parti dà

$$\partial_{x_1} f(\mathbf{p}) = tL(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 L(t) dt + \int_0^1 L(t) dt = L(1) = f_1(\mathbf{p}),$$

concludendo così la dimostrazione. \blacksquare

Esempio 11.11 Si consideri la forma differenziale $\omega = \frac{y}{x^2+y^2} dx - \frac{x}{x^2+y^2} dy$ sull'aperto $A := \{(x, y) : x, y > 0\}$. Sappiamo che si tratta di una forma differenziale chiusa. L'aperto A è convesso quindi sicuramente stellato. Per il teorema precedente ω è anche esatta, quindi deve esistere un potenziale. Per determinarlo

osserviamo che esso risolve le equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{x^2+y^2}. \end{cases}$$

Risolviamo la prima equazione:

$$f(x, y) = \int \frac{y}{x^2+y^2} dx = \arctan \frac{x}{y} + H(y).$$

Si noti che la costante di integrazione H è una costante solo rispetto alla variabile di integrazione, ovvero x , ma che essendo f funzione sia di x che di y , essa è a priori una funzione di y . Sostituendo l'espressione di f appena trovata nella seconda equazione si determina poi H :

$$\frac{-x}{x^2+y^2} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\arctan \frac{x}{y} + H(y) \right) = \frac{-x}{x^2+y^2} + H'(y),$$

di conseguenza $H(y)$ risolve l'equazione $H' = 0$ e quindi è una costante. A questo proposito si noti che da $H' = 0$ non segue che H è una funzione di x , poiché sappiamo che H è una funzione della sola y . Concludendo, un potenziale per ω in A è la funzione

$$f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}.$$

Si osservi come la forma differenziale ω non sia esatta sul dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mentre lo è in A . ■

Esempio 11.12 Si consideri la forma differenziale $\omega = \frac{y}{x^2+y^2} dx - \frac{x}{x^2+y^2} dy$ sull'aperto $A := \{(x, y) : x > 0\} \cup \{(x, y) : y > 0\}$. Sappiamo che la forma differenziale è chiusa. L'aperto A è stellato (ma non convesso). Per il teorema precedente ω è anche esatta. Per determinare un potenziale f osserviamo che esso risolve le equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{x^2+y^2}. \end{cases}$$

Procedendo come nell'esempio precedente scopriamo che un potenziale nella regione $A_y := \{(x, y) : y > 0\}$ è della forma

$$\arctan \frac{x}{y} + c,$$

dove c è una qualsiasi costante. Procedendo in modo analogo, si trova che un potenziale nella regione $A_x := \{(x, y) : x > 0\}$ è della forma

$$- \arctan \frac{y}{x} + d,$$

dove d è una qualsiasi costante. Il potenziale nella regione $A = A_x \cup A_y$ deve quindi essere della forma

$$f(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{x}{y} + c & \text{se } y > 0, \\ - \arctan \frac{y}{x} + d & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

con c e d costanti. Esse non sono però arbitrarie: le regioni A_x ed A_y infatti si intersecano nell'insieme $x, y > 0$ e quindi qui le due espressioni devono fornire il medesimo valore; questo impone la seguente condizione di compatibilità:

$$\arctan \frac{x}{y} + c = - \arctan \frac{y}{x} + d \quad \forall x, y > 0.$$

Imponendo $x = y$ si determina che $d = c + \pi/2$, quindi

$$f(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{x}{y} + c & \text{se } y > 0 \\ \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{y}{x} + c & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

È semplice verificare che tale funzione è effettivamente di classe \mathcal{C}^1 in A , qualunque sia il valore dato alla costante c e quindi quella appena determinata è la famiglia di funzioni potenziali per ω . ■

Gli esempi precedenti mettono in evidenza che la medesima forma differenziale può risultare esatta su certi domini e non esatta su altri ed a fare la differenza sono in realtà alcune proprietà topologiche del dominio in esame. Alcune di esse sono già state esplorate ma in realtà, il concetto fondamentale per lo sviluppo di questa teoria si rivela essere il seguente.

Def. Sia A un aperto connesso di \mathbb{R}^n . Siano Φ_1 e Φ_2 definite in $[0, 1]$ due curve in A , regolari a tratti e chiuse. Diciamo che esse sono *omotope* in A , ovvero che appartengono alla medesima classe di omotopia, quando esiste una funzione $\Psi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow A$ tale che:

- Ψ è continua,
- $\Psi(0, t) = \Phi_1(t)$ e $\Psi(1, t) = \Phi_2(t)$ per ogni t ,
- $\Psi(s, 0) = \Psi(s, 1)$ per ogni s .

Parlando in modo informale si può dire che due curve sono omòtope in A se e solo se “è possibile deformare con continuità” una curva nell’altra restando all’interno di A (vd. Fig. 11.10).

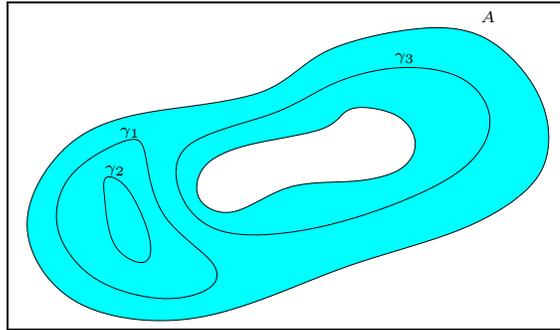


FIGURA 11.10. Le curve γ_1 e γ_2 sono omòtope, mentre non lo sono γ_1 e γ_3 .

Esempio 11.13 In $A := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, le circonferenze di centro $(1, 0)$ e raggio minore di 1 sono tutte omòtope tra loro, analogamente lo sono tutte le circonferenze di raggio maggiore di 1. Non lo sono, invece, una circonferenza di raggio maggiore di 1 ed una di raggio minore di 1. ■

Esempio 11.14 Come in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, anche in $A := \mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$ le circonferenze di centro $(1, 0, 0)$ e raggio minore di 1 sono omòtope tra loro, così come lo sono tutte le circonferenze di raggio maggiore di 1. Non lo sono, invece, una circonferenza di raggio maggiore di 1 ed una di raggio minore di 1. ■

Esempio 11.15 In $A := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, le curve che non passano per l’origine sono tutte omòtope. Una conseguenza di cui tutti abbiamo fatto esperienza è che non è possibile legare con una fune un pallone perché al primo calcio il pallone esce dal nodo. ■

Esempio 11.16 È possibile dimostrare che una curva regolare, orientata e chiusa e la sua opposta (quella col medesimo sostegno ma con l’orientamento opposto) sono omòtope solo se la curva è la curva costituita da un unico punto. ■

Non è difficile verificare che la nozione di omotopia definisce una relazione di equivalenza, ragione per cui è corretto parlare di classe di omotopia. Possiamo ora formulare il seguente risultato di importanza fondamentale.

Teorema 11.5 (Invarianza omotòpica) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso e sia ω una forma differenziale di classe C^1 in A e chiusa. Se γ_1 ed γ_2 sono curve chiuse regolari a tratti orientabili ed omòtope, allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

Esempio 11.17 Sia γ il sostegno della curva ottenuta collegando con segmenti i punti $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$, $(-1, 1)$ e $(1, 1)$ presi in questo ordine. Sia $\omega = \frac{y}{x^2+y^2} dx - \frac{x}{x^2+y^2} dy$. Calcolare $\int_{\gamma} \omega$.

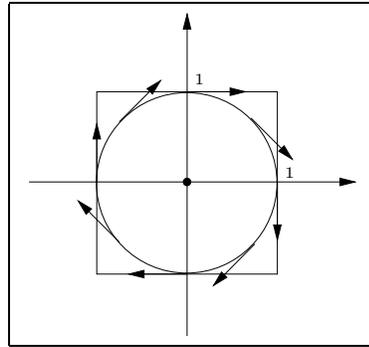


FIGURA 11.11.

Sappiamo che ω è chiusa nell'aperto $A := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Si noti che A non è stellato quindi non c'è motivo per ritenere che il valore dell'integrale sia 0. Tuttavia, osserviamo che la curva proposta e la circonferenza $\tilde{\gamma}$ di raggio 1 percorsa una volta in senso orario sono omòtope (vd. Fig. 11.11): in base al teorema precedente

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\tilde{\gamma}} \omega;$$

nell'Es. 11.9 abbiamo già calcolato $\int_{\tilde{\gamma}} \omega$, trovando per esso il valore 2π , quindi

$$\int_{\gamma} \omega = 2\pi.$$

Possiamo verificare la correttezza di questo valore eseguendo direttamente il calcolo proposto. Spezzando il cammino nelle sue quattro componenti regolari abbiamo:

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \omega &= \int_{(1,1) \rightarrow (1,-1)} \omega + \int_{(1,-1) \rightarrow (-1,-1)} \omega + \int_{(-1,-1) \rightarrow (-1,1)} \omega + \int_{(-1,1) \rightarrow (1,1)} \omega \\
 &= \int_1^{-1} \frac{-1}{1+y^2} dy + \int_1^{-1} \frac{-1}{1+x^2} dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{1+y^2} dy + \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\
 &= 4 \int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2} dt = 2\pi.
 \end{aligned}$$

■

Dim. Dimostriamo il teorema sotto alcune ipotesi aggiuntive, che sono:

- γ_1 e γ_2 sono sostegni di curve chiuse e regolari (quindi non solo regolari a tratti) che chiamiamo Φ_1 e Φ_2 , entrambe definite su $[0, 1]$;
- Φ_1 e Φ_2 ammettono un prolungamento ad un aperto contenente $[0, 1]$ e sono di classe \mathcal{C}^2 ;
- l'omotopia Ψ tra le due curve, ovvero la funzione soddisfacente le seguenti richieste:
 - i. $\Psi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e continua,
 - ii. $\Psi(0, t) = \Phi_1(t)$ e $\Psi(1, t) = \Phi_2(t)$ per ogni $t \in [0, 1]$,
 - iii. $\Psi(s, 0) = \Psi(s, 1)$ per ogni $s \in [0, 1]$,

ammette un prolungamento come funzione di classe \mathcal{C}^2 ad un aperto $B \supseteq [0, 1] \times [0, 1]$.

Si può dimostrare che le ipotesi precedenti non sono restrittive, ovvero che il teorema nella sua formulazione originale segue dalla sua versione semplificata: la dimostrazione di questo fatto è però troppo complessa e non sarà qui esposta.

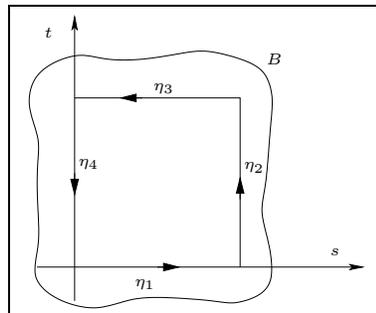


FIGURA 11.12.

Consideriamo quindi nel piano dei parametri s e t la regione $R := \{(s, t) : 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$ contenuta in B (vd. Fig. 11.12). Orientiamo il bordo di R in senso antiorario: esso è composto da quattro curve regolari i cui sostegni indichiamo con η_i con $i = 1, 2, 3, 4$, dove η_1 è il tratto con $s : 0 \mapsto 1$ e t costante ed uguale a 1, e gli altri tratti sono tra loro contigui. Definiamo la seguente forma differenziale su R :

$$\omega^\# := \sum_{i=1}^n f_i(\Psi(s, t)) \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial s} ds + \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} dt \right)$$

e calcoliamone l'integrale lungo il bordo ∂R . Abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\eta_1} \omega^\# &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n f_i(\Psi(s, 0)) \frac{\partial \Psi_i}{\partial s}(s, 0) ds \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n f_i(\Psi(s, 1)) \frac{\partial \Psi_i}{\partial s}(s, 1) ds = - \int_{\eta_3} \omega^\#, \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che per ipotesi $\Psi(s, 0) = \Psi(s, 1)$ per ogni s (e quindi sono uguali anche le loro derivate parziali rispetto ad s). Inoltre

$$\int_{\eta_2} \omega^\# = \int_0^1 f_i(\Psi(1, t)) \frac{\partial \Psi_i}{\partial t}(1, t) dt = \int_{\gamma_2} \omega$$

ed analogamente

$$\int_{\eta_4} \omega^\# = \int_1^0 f_i(\Psi(0, t)) \frac{\partial \Psi_i}{\partial t}(0, t) dt = - \int_{\gamma_1} \omega,$$

così che

$$(11.9) \quad \int_{\partial R} \omega^\# = \int_{\gamma_2} \omega - \int_{\gamma_1} \omega.$$

D'altra parte, osserviamo che

$$\int_{\partial R} \omega^\# = \sum_{i=1}^n \int_{\partial R} f_i(\Psi(s, t)) \frac{\partial \Psi_i}{\partial s}(s, t) ds + f_i(\Psi(s, t)) \frac{\partial \Psi_i}{\partial t}(s, t) dt$$

e dunque, in base al Teor. 10.4, abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_{\partial R} \omega^\sharp &= \sum_{i=1}^n \int_R -\frac{\partial}{\partial t} \left(f_i(\Psi(s, t)) \frac{\partial \Psi_i}{\partial s}(s, t) \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(f_i(\Psi(s, t)) \frac{\partial \Psi_i}{\partial t}(s, t) \right) ds dt \\
&= \sum_{i=1}^n \int_R \left[-\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{\Psi(s, t)} \frac{\partial \Psi_j}{\partial t}(s, t) \frac{\partial \Psi_i}{\partial s}(s, t) - f_i(\Psi(s, t)) \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial t \partial s}(s, t) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{\Psi(s, t)} \frac{\partial \Psi_j}{\partial s}(s, t) \frac{\partial \Psi_i}{\partial t}(s, t) + f_i(\Psi(s, t)) \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial s \partial t}(s, t) \right] ds dt.
\end{aligned}$$

Per ipotesi Ψ è di classe \mathcal{C}^2 , quindi i termini contenenti le derivate seconde di Ψ si elidono, per cui dalla relazione precedente abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_{\partial R} \omega^\sharp &= \sum_{i=1}^n \int_R \left[-\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{\Psi(s, t)} \frac{\partial \Psi_j}{\partial t}(s, t) \frac{\partial \Psi_i}{\partial s}(s, t) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{\Psi(s, t)} \frac{\partial \Psi_j}{\partial s}(s, t) \frac{\partial \Psi_i}{\partial t}(s, t) \right] ds dt.
\end{aligned}$$

scambiano gli indici i e j nella seconda somma doppia abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial R} \omega^\sharp \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_R \left[-\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{\Psi(s, t)} \frac{\partial \Psi_j}{\partial t}(s, t) \frac{\partial \Psi_i}{\partial s}(s, t) + \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Big|_{\Psi(s, t)} \frac{\partial \Psi_i}{\partial s}(s, t) \frac{\partial \Psi_j}{\partial t}(s, t) \right] ds dt \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_R \left[-\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{\Psi(s, t)} + \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Big|_{\Psi(s, t)} \right] \frac{\partial \Psi_i}{\partial s}(s, t) \frac{\partial \Psi_j}{\partial t}(s, t) ds dt;
\end{aligned}$$

dato che per ipotesi ω è una forma chiusa sappiamo che $\partial_{x_i} f_j = \partial_{x_j} f_i$ per ogni i e j , quindi dalla formula precedente segue che

$$\int_{\partial R} \omega^\sharp = 0.$$

Questa relazione e la (11.9) dimostrano la tesi. \blacksquare

Oss. 11.5 Un importante teorema di topologia, noto come Lemma di Jordan, afferma che una curva chiusa e regolare di \mathbb{R}^2 divide il piano in due componenti connesse, una limitata (l'interno) e l'altra illimitata (l'esterno). Questo fatto, per quanto intuitivo, ha in realtà una dimostrazione abbastanza complessa per la quale rimandiamo ai testi di topologia.

conseguenza

$$0 = \int_{\eta_2 + \eta_6 - \eta_4 - \eta_5} \omega = \int_{\eta_2} \omega + \int_{\eta_6} \omega - \int_{\eta_4} \omega - \int_{\eta_5} \omega.$$

Sommando le due relazioni appena trovate abbiamo

$$\int_{\eta_1} \omega - \int_{\eta_3} \omega + \int_{\eta_2} \omega - \int_{\eta_4} \omega = 0$$

ovvero

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\eta_1 + \eta_2} \omega = \int_{\eta_3 + \eta_4} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

che è la tesi.

La dimostrazione precedente può essere facilmente generalizzata a tutti i domini aperti e connessi A che siano della forma \mathbb{R}^2 privato di un numero finito di punti. In realtà, è possibile estendere questa tecnica fino a dimostrare, con essa, il Teor. 11.5 in tutta la sua generalità.

Il teorema precedente ammette un utile corollario per la cui formulazione dobbiamo però prima dare la seguente definizione.

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso. Se ogni curva regolare e chiusa è omòtopa rispetto ad un punto (visto come sostegno di una curva costante) allora A è detto *semplicemente connesso*.

Esempio 11.18 Se A è stellato allora è anche semplicemente connesso. Infatti, supponiamo che il centro per A sia il punto \mathbf{p} e che $\Phi(t)$ sia una curva regolare e chiusa in A . Allora $\Psi(s, t) := \mathbf{p} + s(\Phi(t) - \mathbf{p})$ è un'omotopia in A tra la curva Ψ ed il punto \mathbf{p} . ($\Psi(s, \cdot)$ è l'omotetia di fattore s che muove i punti lungo i raggi uscenti da \mathbf{p}). ■

Esempio 11.19 L'insieme $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ è semplicemente connesso (e non stellato). L'insieme $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ non è semplicemente connesso. L'insieme $\mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$ non è semplicemente connesso. ■

Corollario 11.1 Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso e semplicemente connesso. Sia ω una forma differenziale di classe \mathcal{C}^1 in A . Se ω è chiusa allora è anche esatta.

Dim. Sia γ il sostegno di una curva chiusa regolare a tratti. Per ipotesi γ è omòtopa ad un punto. D'altra parte la chiusura di ω garantisce, in virtù del teorema precedente, che il valore dell'integrale di ω su γ è uguale a quello sul

punto e quindi è zero (il punto ha misura nulla). La tesi segue allora dal punto *i.* del Teor. 11.2. ■

Esempio 11.20 *Detta $\tilde{\omega}(x, y) := \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$, si consideri la forma differenziale*

$$\omega(x, y) := \tilde{\omega}(x + 1, y) - \tilde{\omega}(x - 1, y) = \frac{-4xy dx + 2(x^2 - y^2 - 1) dy}{((x + 1)^2 + y^2)((x - 1)^2 + y^2)}.$$

Verificare che:

- i.* ω è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$,
- ii.* ω è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : |x| \geq 1\}$,
- iii.* ω non esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$,
- iv.* ω è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : |x| \leq 1\}$.

Punto *i.* Si tratta di verificare l'uguaglianza delle due derivate

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-4xy}{((x + 1)^2 + y^2)((x - 1)^2 + y^2)} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2x^2 - 2y^2 - 2}{((x + 1)^2 + y^2)((x - 1)^2 + y^2)} \right).$$

Si possono evitare questi conti osservando che $\tilde{\omega}$ è chiusa, di conseguenza anche $\tilde{\omega}(x + 1, y)$ ed $\tilde{\omega}(x - 1, y)$ lo sono (perché ottenute per traslazione) e che quindi anche ω , che ne è la somma, lo è.

Punto *ii.* Basta osservare che $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : |x| \geq 1\}$ è semplicemente connesso, per cui qui ω , che dal punto precedente sappiamo essere chiusa, risulta anche esatta.

Punto *iii.* Basta trovare una curva chiusa lungo il cui sostegno γ l'integrale di ω non sia nullo. Consideriamo la curva il cui sostegno è la circonferenza di raggio 1 centrata in $(1, 0)$ e percorsa in senso antiorario. Tale circonferenza è parametrizzata da $\Phi(\vartheta) := (1 + \cos \vartheta, \sin \vartheta)$, con $\vartheta : 0 \mapsto 2\pi$, quindi

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_0^{2\pi} \frac{-4(1 + \cos \vartheta) \sin \vartheta d(\cos \vartheta) + (2(1 + \cos \vartheta)^2 - 2 \sin^2 \vartheta - 2) d(\sin \vartheta)}{(2 + \cos \vartheta)^2 + \sin^2 \vartheta} \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \frac{2(1 + \cos \vartheta) \sin^2 \vartheta + ((1 + \cos \vartheta)^2 - \sin^2 \vartheta - 1) \cos \vartheta}{5 + 4 \cos \vartheta} d\vartheta \\ (11.10) \quad &= \int_0^{2\pi} \frac{4 + 2 \cos \vartheta}{5 + 4 \cos \vartheta} d\vartheta. \end{aligned}$$

Il calcolo di questo integrale può essere completato osservando che l'integranda è una espressione razionale nella funzione $\cos \vartheta$; la sostituzione standard è quindi

porre $\tan(\vartheta/2) =: u$ da cui segue che

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{12 + 4u^2}{(9 + u^2)(1 + u^2)} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3}{9 + u^2} + \frac{1}{1 + u^2} du = 2\pi.$$

Dato che l'integrale non vale zero la forma ω non può essere esatta (questo era chiaro già da (11.10): l'integranda infatti è strettamente positiva).

Punto *iv*. Osserviamo che $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : |x| \leq 1\}$ non è semplicemente connesso, quindi l'esattezza di ω non può essere dimostrata facendo appello al Cor. 11.1. Per dimostrare l'esattezza di ω non resta altra possibilità che farlo utilizzando la condizione equivalente *i*. del Teor. (11.2), ovvero verificare la nullità del suo integrale lungo il sostegno di *ogni curva chiusa* che sia contenuto nella regione $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : |x| \leq 1\}$. La chiusura di ω ci autorizza a limitare questa verifica alle curve che *non sono omòtope* ad un punto (altrimenti per il Teor. 11.5 sappiamo già che il valore dell'integrale è zero). Sia poi η una qualsiasi curva in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : |x| \leq 1\}$ non omòtopa ad un punto. Osserviamo che ogni altra curva in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : |x| \leq 1\}$ non omòtopa ad un punto è necessariamente omòtopa o a η o a $-\eta$, a seconda dell'orientazione. Di conseguenza, per il Teorema di invarianza omotopica (Teor. 11.5) basta verificare la nullità dell'integrale di ω lungo η . Quale curva η scegliamo la circonferenza di raggio 2 centrata in $(0, 0)$ e percorsa in senso antiorario. Essa è parametrizzata da $\Psi(\vartheta) := (2 \cos \vartheta, 2 \sin \vartheta)$, con $\vartheta : 0 \mapsto 2\pi$, quindi

$$\begin{aligned} \int_{\eta} \omega &= \int_0^{2\pi} \frac{-16 \cos \vartheta \sin \vartheta d(2 \cos \vartheta) + (8 \cos^2 \vartheta - 8 \sin^2 \vartheta - 2) d(2 \sin \vartheta)}{((2 \cos \vartheta + 1)^2 + \sin^2 \vartheta)((2 \cos \vartheta - 1)^2 + \sin^2 \vartheta)} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{12 \cos \vartheta}{(5 + 4 \cos \vartheta)(5 - 4 \cos \vartheta)} d\vartheta = 24 \int_0^{\pi} \frac{\cos \vartheta}{(5 + 4 \cos \vartheta)(5 - 4 \cos \vartheta)} d\vartheta. \end{aligned}$$

Per valutare questo integrale possiamo procedere come nel precedente, tuttavia osserviamo che il suo valore è sicuramente zero visto che l'integranda è dispari rispetto alla simmetria $\vartheta \mapsto \pi - \vartheta$ del dominio. Stante la discussione precedente, questo implica che ω è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : |x| \leq 1\}$.

Nella risoluzione dell'esercizio si poteva procedere anche così. La forma $\tilde{\omega}$ è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ma qui non è esatta poiché $\int_{\gamma} \tilde{\omega} = 2\pi$, dove γ è la circonferenza di raggio 1, centro 0 e percorsa in senso antiorario. Ne segue che $\tilde{\omega}_1(x, y) := \tilde{\omega}(x + 1, y)$ è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0)\}$, senza esservi esatta, con $\int_{\gamma_1} \tilde{\omega}_1 = 2\pi$, dove γ_1 è la circonferenza di raggio 1, centro $(-1, 0)$ e percorsa in senso antiorario.

Analogamente $\tilde{\omega}_2(x, y) := \tilde{\omega}(x - 1, y)$ è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$, non esatta, con $\int_{\gamma_2} \tilde{\omega}_2 = 2\pi$, dove γ_2 è la circonferenza di raggio 1, centro $(1, 0)$ e percorsa in senso antiorario. Inoltre $\int_{\gamma_2} \tilde{\omega}_1 = 0$, poiché γ_1 sta interamente in una regione in cui $\tilde{\omega}_1$ è esatta; analogamente $\int_{\gamma_1} \tilde{\omega}_2 = 0$. Quindi abbiamo

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_1} \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2 = \int_{\gamma_1} \tilde{\omega}_1 - \int_{\gamma_1} \tilde{\omega}_2 = 2\pi - 0 = 2\pi$$

che immediatamente prova *ii*. Inoltre

$$\int_{\eta} \omega = \int_{\eta} \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2 = \int_{\eta} \tilde{\omega}_1 - \int_{\eta} \tilde{\omega}_2$$

ma η è omòtopa a γ_1 nella regione in cui $\tilde{\omega}_1$ è chiusa, ed analogamente η è omòtopa a γ_2 nella regione in cui $\tilde{\omega}_2$ è chiusa quindi

$$\int_{\eta} \omega = \int_{\eta} \tilde{\omega}_1 - \int_{\eta} \tilde{\omega}_2 = \int_{\gamma_1} \tilde{\omega}_1 - \int_{\gamma_2} \tilde{\omega}_2 = 2\pi - 2\pi = 0$$

che dimostra *iv*. ■

11.1. Complemento: il potenziale vettore

Tra tutti gli spazi \mathbb{R}^n lo spazio \mathbb{R}^3 è speciale in quanto qui è possibile definire l'operatore rot che ha la proprietà di mandare campi vettoriali in campi vettoriali.

Def. Sia A un aperto connesso di \mathbb{R}^3 e sia \mathbf{F} un campo vettoriale in A e continuo. Un *potenziale vettore per \mathbf{F}* , se esiste, è un campo vettoriale \mathbf{G} di classe \mathcal{C}^1 in A tale che $\text{rot } \mathbf{G} = \mathbf{F}$.

L'interesse per questo concetto sta nel seguente risultato.

Teorema 11.6 *Sia A un aperto connesso di \mathbb{R}^3 ed \mathbf{F} un campo vettoriale continuo in A . Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- i.* $\int_S \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma = 0$ per ogni superficie regolare, orientabile e chiusa (ovvero privo di bordo) contenuta in A ;
- ii.* per ogni coppia di superfici S_1 ed S_2 orientabili aventi il medesimo bordo ed ugualmente orientate si ha

$$\int_{S_1} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma = \int_{S_2} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma;$$

- iii.* \mathbf{F} ammette un potenziale vettore.

In base a tale teorema, quindi, l'esistenza del potenziale vettore è equivalente alla nullità del flusso di \mathbf{F} attraverso ogni superficie chiusa, ovvero, il suo flusso attraverso una data superficie con bordo dipende solo dal suo bordo e non dal superficie vera propria. In sostanza, se un campo vettoriale ammette un potenziale vettore allora ne risulta estremamente semplificato il calcolo del flusso attraverso ogni superficie (sufficientemente regolare).

Dim.

i. \Leftrightarrow *ii.* Ovvvia.

iii. \Rightarrow *i.* Sia S una superficie regolare e priva di bordo. Supponiamo che $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G}$, allora il flusso di \mathbf{F} attraverso S è di fatto il flusso di $\text{rot } \mathbf{G}$, sempre attraverso S . Dal teorema di Stokes segue che tale flusso è di fatto il lavoro di \mathbf{G} lungo la curva che fa da bordo di S , ma S è per ipotesi priva di bordo, quindi l'integrale è nullo.

ii. \Rightarrow *iii.* Purtroppo è troppo elaborata per essere qui riportata. ■

Come accade per il potenziale scalare, anche il potenziale vettore, quando esiste, non è mai unico: difatti, se $\text{rot } \mathbf{G} = \mathbf{F}$, allora anche $\text{rot}(\mathbf{G} + \nabla f) = \mathbf{F}$, per ogni funzione f a valori scalari e di classe \mathcal{C}^2 . Sui domini semplicemente connessi questa è l'unica arbitrarietà: infatti, se due campi vettoriali \mathbf{G} e $\tilde{\mathbf{G}}$ sono entrambi potenziali vettori per il medesimo campo \mathbf{F} , allora la loro differenza è un campo irrotazionale e dal Cor. 11.1 sappiamo che sui domini semplicemente connessi equivale all'esistenza di una funzione scalare tale che $\mathbf{G} - \tilde{\mathbf{G}} = \nabla f$.

Def. Sia A un aperto connesso di \mathbb{R}^3 ed \mathbf{F} una campo vettoriale di classe \mathcal{C}^1 in A . \mathbf{F} è detto *solenoidale* se

$$\text{div } \mathbf{F} = 0.$$

Oss. 11.6 L'aggettivo solenoidale è mutuato dalla teoria dell'elettromagnetismo: l'equazione $\text{div } \mathbf{B} = 0$, dove \mathbf{B} è il vettore di campo magnetico è infatti una delle quattro equazioni di Maxwell che sono alla base di tale teoria.

Teorema 11.7 Sia A un aperto connesso di \mathbb{R}^3 ed \mathbf{F} una campo vettoriale di classe \mathcal{C}^1 in A . Se \mathbf{F} ammette un potenziale vettore, allora \mathbf{F} è solenoidale.

Dim. Sia \mathbf{G} un potenziale vettore per \mathbf{F} . La dimostrazione sarebbe immediata se sapessimo che un potenziale vettore di \mathbf{F} è di classe \mathcal{C}^2 . Sotto tale ipotesi, infatti

le derivate seconde miste di \mathbf{G} coincidono, ragione per cui $\operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{G}) = \mathbf{0}$. Purtroppo non sappiamo se \mathbf{G} sia o meno di classe \mathcal{C}^2 (a priori siamo certi solo che esso è di classe \mathcal{C}^1), quindi una dimostrazione diversa è necessaria. Supponiamo però che per assurdo esista un punto \mathbf{p} in cui $(\operatorname{div} \mathbf{F})(\mathbf{p}) \neq 0$. Dato che per ipotesi \mathbf{F} è di classe \mathcal{C}^1 , la funzione $\operatorname{div} \mathbf{F}$ è continua quindi esiste un intorno sferico V di centro \mathbf{p} in cui $\operatorname{div} \mathbf{F} > 0$, ma allora

$$(11.11) \quad \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mu_V > 0.$$

D'altra parte, dal Teor. 10.1 (teorema della divergenza) segue che

$$(11.12) \quad \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mu_V = \int_{\partial V} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle \, d\sigma$$

e dato che ∂V è la sfera, ovvero una superficie regolare chiusa, in base all'equivalenza dei punti *i.* e *iii.* del teorema precedente possiamo affermare che

$$(11.13) \quad \int_{\partial V} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle \, d\sigma = 0.$$

Le equazioni (11.11), (11.12) e (11.13) sono evidentemente in contraddizione, completando così la dimostrazione della tesi. ■

Esempio 11.21 Verificare che:

- se \mathbf{E} è irrotazionale, allora $\mathbf{E} \wedge \mathbf{x}$ è solenoidale;
- più in generale, se \mathbf{E} ed \mathbf{F} sono irrotazionali, allora $\mathbf{E} \wedge \mathbf{F}$ è solenoidale;
- se f è scalare e soddisfa l'equazione

$$\Delta f = 0, \quad \text{dove} \quad \Delta f := \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f,$$

allora ∇f è sia irrotazionale sia solenoidale. ■

Un campo solenoidale non ammette necessariamente un potenziale vettore, come il seguente esempio illustra.

Esempio 11.22 In $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ il campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3}(x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z)$ è solenoidale, tuttavia il flusso di \mathbf{F} attraverso la sfera di raggio 1 non è zero poiché

$$\int_{\text{sfera}} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle \, d\sigma = \int_{\text{sfera}} d\sigma = 4\pi,$$

dimostrando così che \mathbf{F} non ammette un potenziale vettore. ■

Un campo solenoidale ammette tuttavia un potenziale vettore in domini con proprietà topologiche particolari, infatti vale il seguente risultato:

Teorema 11.8 (Lemma di Poincaré per pot. vettore) *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto stellato con centro \mathbf{x}_0 e sia \mathbf{F} un campo solenoidale in A . Allora il campo vettoriale*

$$\mathbf{G} := -(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \int_0^1 t \mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) dt$$

è un potenziale vettore per \mathbf{F} .

Dim. Si tratta di dimostrare che $\text{rot } \mathbf{G} = \mathbf{F}$. Anzitutto osserviamo che \mathbf{F} , in quanto solenoidale, è di classe \mathcal{C}^1 e che quindi per l'Oss. 6.12 è lecito derivare sotto il segno di integrale. Per poter procedere abbiamo bisogno di una formula per le derivate parziali del prodotto vettore di due campi vettoriali. A tal fine introduciamo il *simbolo di Ricci*, ovvero la quantità ϵ_{ijk} in cui gli indici i, j, k variano in 1, 2, 3 ed i cui valori sono:

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, \quad \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1, \quad \text{tutti gli altri casi} = 0.$$

Usando tale simbolo le definizioni di rotore di un campo \mathbf{A} e di prodotto vettore di due campi \mathbf{A} e \mathbf{B} diventano:

$$(\text{rot } \mathbf{A})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \partial_j A_k, \quad (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} A_j B_k.$$

Tramite queste identità risulta semplice verificare che

$$(11.14) \quad (\text{rot}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}))_i = A_i \text{div } \mathbf{B} - B_i \text{div } \mathbf{A} + \sum_j B_j \partial_j A_i - \sum_j A_j \partial_j B_i.$$

Infatti,

$$\begin{aligned} (\text{rot}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}))_i &= \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \partial_j (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})_k = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \partial_j \left(\sum_{u,v} \epsilon_{kuv} A_u B_v \right) \\ &= \sum_{j,k} \sum_{u,v} \epsilon_{ijk} \epsilon_{kuv} \partial_j (A_u B_v) = \sum_{j,u,v} \left(\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{kuv} \right) \partial_j (A_u B_v) \end{aligned}$$

ma per definizione ϵ_{ijk} vale zero quando i suoi indici non sono tutti diversi, quindi è semplice constatare che

$$\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{kuv} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = u \text{ e } j = v \text{ e } u \neq v, \\ -1 & \text{se } i = v \text{ e } j = u \text{ e } u \neq v, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e così

$$\begin{aligned} (\text{rot}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}))_i &= \sum_{j,u,v} (\delta_{i=u} \delta_{j=v} - \delta_{i=v} \delta_{j=u}) \partial_j (A_u B_v) \\ &= \sum_v \partial_v (A_i B_v) - \sum_u \partial_u (A_u B_i) \end{aligned}$$

che è la (11.14).

Applichiamo dunque la formula (11.14) al campo vettoriale \mathbf{G} , ottenendo che

$$\begin{aligned} (\text{rot} \mathbf{G})_i &= -(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)_i \int_0^1 t \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) dt \\ &\quad + \int_0^1 t F_i(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) dt \operatorname{div}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &\quad - \sum_v \int_0^1 t F_v(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) dt \partial_v (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)_i \\ &\quad + \sum_v (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)_v \int_0^1 t \partial_v F_i(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) dt. \end{aligned}$$

Si osservi però che per ipotesi $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, che $\partial_v (\mathbf{x})_i = \delta_{v=i}$ e che inoltre $\operatorname{div} \mathbf{x} = 3$, per cui l'espressione precedente diventa

$$\begin{aligned} (\text{rot} \mathbf{G})_i &= 3 \int_0^1 t F_i(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) dt - \int_0^1 t F_i(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) dt \\ &\quad + \int_0^1 t \sum_v (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)_v \partial_v F_i(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) dt; \end{aligned}$$

ma $\partial_v(F_i(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))) = t(\partial_v F_i)|_{\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}$, quindi

$$\begin{aligned} (\text{rot } \mathbf{G})_i &= 2 \int_0^1 t F_i(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) dt + \int_0^1 t^2 \sum_v (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)_v (\partial_v F_i)|_{\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)} dt \\ &= 2 \int_0^1 t F_i(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) dt + \int_0^1 t^2 \frac{d}{dt} (F_i(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (t^2 F_i(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))) dt = t^2 F_i(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \Big|_0^1 = F_i(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

■

Esempio 11.23 Sia $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, 0, 0)^T$; dopo aver verificato che si tratta di un campo solenoidale su \mathbb{R}^3 , trovarne un potenziale vettore.

Dato che $\text{div } \mathbf{F} = \partial_x y = 0$ il campo è solenoidale. \mathbb{R}^3 è evidentemente stellato quindi possiamo usare la formula dimostrata nel teorema precedente per scrivere un potenziale vettore per \mathbf{F} . Assumiamo come centro il punto $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Abbiamo quindi

$$\mathbf{G} = -\mathbf{x} \wedge \int_0^1 t \mathbf{F}(t\mathbf{x}) dt = -\mathbf{x} \wedge \int_0^1 t \begin{pmatrix} ty \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -yz/3 \\ y^2/3 \end{pmatrix},$$

ed è immediato verificare che $\text{rot } \mathbf{G} = \mathbf{F}$. ■

Oss. 11.7 Supponiamo che il dominio A sia stellato rispetto a due distinti centri, \mathbf{x}_1 ed \mathbf{x}_2 . Allora, in base al Teor. 11.8 se \mathbf{F} è solenoidale i campi vettoriali

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &:= -(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \wedge \int_0^1 t \mathbf{F}(\mathbf{x}_1 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)) dt, \\ \mathbf{H} &:= -(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \wedge \int_0^1 t \mathbf{F}(\mathbf{x}_2 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)) dt \end{aligned}$$

sono entrambi potenziali vettori per \mathbf{F} quindi la loro differenza è irrotazionale. Per il Teor. 11.4 tale differenza deve così essere conservativa, ovvero deve esistere un potenziale scalare f tale che $\nabla f = \mathbf{G} - \mathbf{H}$. Infatti si può verificare (ma i calcoli sono laboriosi) che se definiamo f come il flusso di \mathbf{F} attraverso la superficie $T_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}}$ il cui bordo è il triangolo di vertici \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 e \mathbf{x} , orientato in questo ordine, ovvero se poniamo

$$f(\mathbf{x}) := \int_{T_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}}} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma,$$

allora $\nabla f = \mathbf{G} - \mathbf{H}$. Si osservi poi che dal Teorema della divergenza e dal fatto che $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ segue che il valore di f non viene modificato se nella sua definizione si utilizza una qualsiasi altra superficie che abbia il medesimo bordo ed orientazione di $T_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}}$.

Quando il dominio è addirittura un rettangolo allora esistono anche altre formule che forniscono un potenziale vettore di campo solenoidale.

Teorema 11.9 *Sia A un rettangolo aperto, ovvero $A = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3)$ per opportuni reali a_i, b_i e sia \mathbf{F} un campo solenoidale in A . Sia (α, β, γ) un punto arbitrario in A . Allora ciascuno dei campi vettoriali seguenti*

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &:= \left(0, \int_{\alpha}^x F_3(t, y, z) dt, \int_{\beta}^y F_1(\alpha, t, z) dt - \int_{\alpha}^x F_2(t, y, z) dt \right)^T \\ \mathbf{H} &:= \left(\int_{\gamma}^z F_2(x, \beta, t) dt - \int_{\beta}^y F_3(x, t, z) dt, 0, \int_{\beta}^y F_1(x, t, z) dt \right)^T \\ \mathbf{L} &:= \left(\int_{\gamma}^z F_2(x, y, t) dt, \int_{\alpha}^x F_3(t, y, \gamma) dt - \int_{\gamma}^z F_1(x, y, t) dt, 0 \right)^T\end{aligned}$$

è un potenziale vettore per \mathbf{F} .

Dim. Dimostriamo che $\operatorname{rot} \mathbf{G} = \mathbf{F}$; per gli altri campi si procede in modo analogo. Per la prima coordinata abbiamo

$$(\operatorname{rot} \mathbf{G})_1 = \partial_y \left(\int_{\beta}^y F_1(\alpha, t, z) dt - \int_{\alpha}^x F_2(t, y, z) dt \right) - \partial_z \left(\int_{\alpha}^x F_3(t, y, z) dt \right)$$

e dato che le funzioni integrande sono di classe \mathcal{C}^1 per la Oss.6.12 è possibile derivare sotto il segno di integrale, ottenendo

$$(\operatorname{rot} \mathbf{G})_1 = F_1(\alpha, y, z) + \int_{\alpha}^x (-\partial_y F_2(t, y, z) - \partial_z F_3(t, y, z)) dt,$$

e usando la condizione $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ abbiamo così

$$\begin{aligned}&= F_1(\alpha, y, z) + \int_{\alpha}^x \partial_t F_1(t, y, z) dt \\ &= F_1(\alpha, y, z) + F_1(x, y, z) - F_1(\alpha, y, z) = F_1(x, y, z).\end{aligned}$$

Per le altre coordinate il calcolo è ancora più semplice:

$$(\operatorname{rot} \mathbf{G})_2 = -\partial_x \left(\int_{\beta}^y F_1(\alpha, t, z) dt - \int_{\alpha}^x F_2(t, y, z) dt \right) = F_2(x, y, z),$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{G})_3 = \partial_x \left(\int_{\alpha}^x F_3(t, y, z) dt \right) = F_3(x, y, z).$$

■

Oss. 11.8 Dato che \mathbf{G} ed \mathbf{H} sono entrambi potenziali vettori per il campo \mathbf{F} e dato che il loro dominio è evidentemente un convesso, la loro differenza deve essere un campo conservativo. Infatti si può verificare che

$$\mathbf{G} - \mathbf{H} = \nabla f, \quad \text{con } f := \int_{\alpha}^x \left[\int_{\beta}^y F_3(u, t, z) dt \right] du - \int_{\alpha}^x \left[\int_{\gamma}^z F_2(u, 0, t) dt \right] du;$$

considerazioni analoghe per le differenze $\mathbf{G} - \mathbf{L}$ ed $\mathbf{H} - \mathbf{L}$.

Così come per le curve, anche per le superfici è possibile introdurre il concetto di omotopia. La sua definizione formale ha alcuni aspetti “tecnici” che ne oscurerebbero l’essenza, per questo motivo preferiamo illustrarla nel seguente modo informale:

Def. Siano Φ_1 e Φ_2 due superfici in un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^3$, regolari a pezzi e chiuse. Diciamo che esse sono *omotope* in A quando è possibile deformare con continuità una nell’altra sempre restando all’interno di A .

Esempio 11.24 In $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ le sfere di centro $(1, 0, 0)$ e raggio minore di 1 sono superfici omotope; anche le sfere di raggio maggiore di 1 lo sono. Non lo sono, invece, una sfera di raggio maggiore di 1 ed una di raggio minore di 1. ■

Esempio 11.25 In \mathbb{R}^3 ogni superficie regolare e chiusa è omotopa alla superficie costante (il punto). Più in generale, se $A \subseteq \mathbb{R}^3$ è stellato, allora in A ogni superficie regolare e chiusa è omotopa al punto. ■

Teorema 11.10 (Invarianza omotopica) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto connesso e sia F un campo vettoriale di classe \mathcal{C}^1 in A e solenoidale. Se S_1 ed S_2 sono superfici regolari chiuse ed omotope, allora

$$\int_{S_1} \omega = \int_{S_2} \omega.$$

Di questo risultato non diamo la dimostrazione.

Esempio 11.26 Il campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3}(x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z)$ è solenoidale in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Il suo flusso attraverso la sfera di raggio 1 è pari a 4π , quindi, in base al teorema precedente il suo flusso attraverso ogni superficie omòtopa in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ a tale sfera sarà ancora uguale a 4π . In particolare varrà 4π il flusso di \mathbf{F} attraverso la superficie del cubo di lato 2 centrato in $\mathbf{0}$: verificare direttamente questa affermazione.

Il cubo ha un bordo composto da sei facce che sono sostegno di superfici regolari; data la simmetria del problema il flusso totale sarà pari a sei volte il flusso attraverso una qualsiasi di queste facce. Consideriamo dunque la faccia con $z = 1$: la sua normale uscente $\boldsymbol{\nu}$ è \mathbf{e}_3 , quindi

$$\int_{\text{cubo}} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma = 6 \int_{[-1,1] \times [-1,1]} \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}} dx dy.$$

Le simmetrie del dominio di integrazione e della funzione integranda mostrano che

$$\int_{\text{cubo}} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma = 48 \int_D \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}} dx dy,$$

dove $D := \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$. Passando alle coordinate polari si ha

$$\int_{\text{cubo}} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma = 48 \int_{\tilde{D}} \frac{\rho}{(1 + \rho^2)^{3/2}} d\rho d\vartheta,$$

dove $\tilde{D} := \{(\vartheta, \rho) : 0 \leq \vartheta \leq \pi/4, 0 \leq \rho \leq 1/\cos \vartheta\}$. Dunque

$$\begin{aligned} \int_{\text{cubo}} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma &= 48 \int_0^{\pi/4} \left[\int_0^{1/\cos \vartheta} \frac{\rho}{(1 + \rho^2)^{3/2}} d\rho \right] d\vartheta \\ &= 48 \int_0^{\pi/4} \left[-\frac{1}{(1 + \rho^2)^{1/2}} \Big|_0^{1/\cos \vartheta} \right] d\vartheta \\ &= 48 \int_0^{\pi/4} \left[1 - \frac{\cos \vartheta}{(1 + \cos^2 \vartheta)^{1/2}} \right] d\vartheta \\ &= 48 \left[\vartheta - \arcsin \left(\frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} \right) \right]_0^{\pi/4} \\ &= 48 \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right] = 4\pi. \end{aligned}$$

■

Esempio 11.27 Calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3}(x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z)$ attraverso la superficie di equazione $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1$.

Sappiamo che F è solenoidale in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$, in particolare lo è anche nel semispazio $z > 1/2$ che è un dominio della forma prevista nel Teor. 11.9, di conseguenza il flusso attraverso quella superficie deve essere nullo. Verifichiamo comunque la correttezza di questa previsione eseguendone direttamente il calcolo. Il vettore $\boldsymbol{\nu} := (x, y, z-2)^T$ è ortogonale e uscente dalla superficie sferica, inoltre è di norma unitaria nei punti della sfera, quindi

$$\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle = \frac{x^2 + y^2 + z(z-2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Parametrizziamo la superficie tramite le coordinate polari centrate in $(0, 0, 2)$, ovvero ponendo

$$\begin{cases} x = \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = 2 + \cos \vartheta \end{cases} \quad \text{con } (\vartheta, \varphi) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi].$$

Sappiamo che rispetto a questa scelta di coordinate $d\sigma = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$, di conseguenza

$$\begin{aligned} \int_{\text{sfera}} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma &= \int_{[-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi]} \frac{\sin^2 \vartheta + (2 + \cos \vartheta) \cos \vartheta}{(\sin^2 \vartheta + (2 + \cos \vartheta)^2)^{3/2}} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + 2 \cos \vartheta}{(5 + 4 \cos \vartheta + \cos^2 \vartheta)^{3/2}} \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned}$$

L'ultimo integrale è calcolabile per sostituzione, tuttavia il suo valore è sicuramente nullo dato che l'integranda è dispari rispetto alla simmetria $\vartheta \rightarrow -\vartheta$ del dominio di integrazione. ■

Introduciamo ora il seguente concetto, analogo a quello di semplice connessione.

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto connesso. Se ogni superficie regolare e chiusa è omòtopa rispetto ad un punto (visto come sostegno di una superficie costante) allora A è detto *2-semplimente connesso*.

Esempio 11.28 Se A è stellato allora è anche 2-semplimente connesso. ■

Oss. 11.9 I concetti di semplice connessione e 2-semplimente connessione, per quanto simili, sono in realtà distinti e non hanno mutue implicazioni; infatti l'insieme

$\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ è semplicemente connesso ma non è 2-semplicemente connesso. D'altra parte, l'insieme $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z): x=y=0\}$ è 2-semplicemente connesso ma non è semplicemente connesso.

Il teorema di invarianza omotopica ha quindi il seguente utile corollario.

Corollario 11.2 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto connesso e 2-semplicemente connesso. Sia \mathbf{F} un campo vettoriale di classe \mathcal{C}^1 in A . Se \mathbf{F} è solenoitale allora ammette un potenziale vettore.*

Dim. Infatti, dal teorema precedente il flusso di \mathbf{F} attraverso qualsiasi superficie chiusa è zero poiché ogni superficie siffatta è omòtopa ad un punto e l'integrale di flusso è un invariante per omotopia. La tesi segue allora dal punto *i.* del Teor. 11.6. ■

11.2. Complemento: osservazioni termodinamiche

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e sia ω una forma differenziale di classe \mathcal{C}^1 in A . Sia chiama *fattore integrante* per ω una funzione g a valori scalari non identicamente nulla e tale che $g\omega$ sia esatta. Ciò che vogliamo dimostrare ora è che quando si lavora nel piano ogni forma differenziale ammette sempre, almeno localmente, un fattore integrante. Più precisamente vogliamo dimostrare il seguente fatto.

Proposizione 11.2 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso e sia ω una forma differenziale di classe \mathcal{C}^1 in A . Sia $\mathbf{p} \in A$ un punto in cui $\omega(\mathbf{p}) \neq 0$. Allora esiste un intorno aperto $B \subseteq A$ contenente \mathbf{p} ed una funzione g a valori reali e di classe \mathcal{C}^1 in B che è fattore integrante per ω in B .*

Dim. Sia dunque $\omega = f_1 dx + f_2 dy$ con f_1, f_2 di classe \mathcal{C}^1 . Per ipotesi $f_1(1p)$ e $f_2(1p)$ non valgono entrambe zero, ed a meno di operare uno scambio di coordinate possiamo supporre che sia $f_2(p) \neq 0$. Inoltre, dato che stiamo cercando un fattore g per cui $g\omega$ sia esatta, possiamo dividere ω per f_2 ovvero limitarci a dimostrare la tesi per le forme differenziali del tipo $\omega = f_1 dx + dy$. Localmente l'esattezza coincide con la chiusura (poiché l'intorno B può sempre essere preso semplicemente connesso od addirittura convesso), quindi l'esattezza di $g\omega$ equivale alla condizione

$$\partial_y(gf_1) = \partial_x g.$$

Consideriamo l'equazione differenziale $y' = -f_1(x, y)$. Dato che per ipotesi f_1 è di classe \mathcal{C}^1 , ogni problema di Cauchy centrato in (x_0, y_0) con tale equazione ammette

una ed una sola soluzione locale, che indichiamo con $\phi_{(x_0, y_0)}(x)$. Supponiamo di conoscere una costante del moto relativa a questa equazione, ovvero di conoscere una funzione U , di classe \mathcal{C}^2 in un intorno di \mathbf{p} , per la quale il valore lungo la curva $(x, \phi_{(x_0, y_0)}(x))$ resta costante nella sua dipendenza da x (ma che è a priori dipendente dalla curva in esame, ovvero della condizione iniziale (x_0, y_0)). In base alla definizione di costante del moto una tale funzione soddisfa necessariamente la relazione

$$0 = \frac{d}{dx}U(x, \phi_{(x_0, y_0)}(x)) = \partial_x U + (\partial_y U) \frac{d}{dx} \phi_{(x_0, y_0)}(x) = \partial_x U - f_1 \cdot \partial_y U.$$

Se prendiamo quindi come funzione g la funzione $\partial_y U$, abbiamo:

$$\partial_y(gf_1) = \partial_y(f_1 \partial_y U) = \partial_y(\partial_x U) = \partial_x(\partial_y U) = \partial_x g,$$

che dimostra che $\partial_y U$ è (se non identicamente nullo) un fattore integrante per ω (si noti che nel calcolo precedente abbiamo utilizzato l'ipotesi che U sia di classe \mathcal{C}^2 per poter procedere allo scambio dell'ordine di derivazione). Per concludere la dimostrazione resta quindi da dimostrare che ogni equazione differenziale $y' = -f_1(x, y)$ con f_1 di classe \mathcal{C}^1 ammette sempre, almeno localmente, una costante del moto. Questo è però un fatto evidente: siano (x_p, y_p) le coordinate di \mathbf{p} . Dal teorema di esistenza ed unicità, ogni problema di Cauchy con origine in (x_p, y_0) ha una ed una sola soluzione purché y_0 sia sufficientemente vicino ad y_p ; non solo, ma la regolarità di f_1 fa sì che esista un aperto \tilde{B} contenente il segmento verticale $S := \{(x_p, y) : -\eta < y - y_0 < \eta\}$ (per qualche $\eta > 0$) in cui per ogni punto passa una ed una sola curva integrale relativa all'equazione differenziale $y' = -f_1$ ed intersecante S (vd. Fig. 11.14).

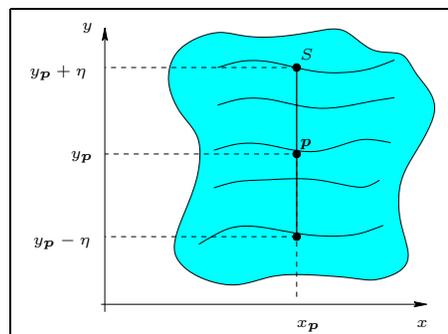


FIGURA 11.14.

Si consideri dunque la seguente funzione:

$$U(x, y) := \begin{array}{l} \text{ordinata dell'intersezione con } S \text{ della} \\ \text{curva integrale passante per } (x, y); \end{array}$$

dal teorema di esistenza ed unicità segue che tale funzione è una costante del moto. Che si tratti di una funzione di classe \mathcal{C}^2 , almeno localmente, è un fatto assicurato dalla regolarità di f_1 , ma la sua dimostrazione va oltre le intenzioni di queste note. ■

Esempio 11.29 *Determinare un fattore integrante per la forma differenziale $\omega = y dx + dy$.*

Seguiamo la costruzione data nella dimostrazione della proposizione precedente. Consideriamo l'equazione differenziale $y' = -y$. Le curve integrali di questa equazione sono tutte della forma $y = y_0 e^{-x}$, dove y_0 è l'ordinata con cui la curva integrale interseca l'asse delle ordinate. La costante del moto è quindi la funzione $U(x, y) = y_0$, ovvero $U(x, y) = y e^x$. In effetti $U_y = e^x$ ed $U_y \omega = y e^x dx + e^x dy = d(y e^x)$, che quindi è esatta in tutto il piano. ■

Esempio 11.30 *Determinare un fattore integrante per la forma differenziale $\omega = (x + y) dx + dy$.*

Seguiamo la costruzione data nella dimostrazione della proposizione precedente. Consideriamo l'equazione differenziale $y' = -y - x$. Le curve integrali di questa equazione sono tutte della forma $y = 1 - x + c e^{-x}$, dove c è una costante. Il valore della funzione $U(x, y) := (x + y - 1) e^x$ è quindi costante lungo le curve integrali, ovvero, è una costante del moto. Infatti $U_y = e^x$ ed $U_y \omega = (x + y) e^x dx + e^x dy = d((x + y - 1) e^x)$, che quindi è esatta in tutto il piano. ■

Lasciamo per un momento da parte queste considerazioni dall'aspetto principalmente analitico e consideriamo un sistema termodinamico costituito da un unico tipo molecolare che immaginiamo trovarsi in un unico stato fisico. Con terminologia più precisa ciò significa che stiamo considerando un sistema termodinamico costituito da un'unica fase: un gas contenente un'unica specie molecolare o un liquido puro sono sistemi che presentano un'unica fase questo non è vero per le miscele di gas nonché sistemi costituiti da un'unica sostanza che sia però presente in più stati di aggregazione (ad esempio una miscela di acqua e ghiaccio od una soluzione di glucosio destrogiro e levogiro). Uno dei primi risultati della

termodinamica, noto come *regola della fasi di Gibbs*, afferma che un sistema composto da un'unica fase *ha solamente due gradi di libertà*; detto in altro modo, ciò significa che due grandezze sono sufficienti per descriverne lo stato univocamente. Si tratta di un fatto che tutto sommato ha una semplice dimostrazione per la quale rimandiamo però a testi dedicati all'argomento.

Consideriamo quindi un sistema composto da un unico gas, puro (quindi con un'unica fase). Sperimentalmente sono misurabili almeno tre grandezze fisiche: il volume V , la pressione p e il calore scambiato con l'ambiente Q . Dal teorema della fasi segue che tra queste grandezze deve necessariamente esistere una relazione, altrimenti il sistema avrebbe tre gradi di libertà: la relazione in questione è quella che è nota col nome di *equazione di stato*.

Consideriamo la forma differenziale

$$\omega_1 := p dV + dQ,$$

dove V e Q svolgono il ruolo di parametri liberi, mentre p è legata ad V e Q da una relazione che si sa esistere ma che è ignota (l'equazione di stato, appunto). Il primo principio della termodinamica afferma l'equivalenza del lavoro meccanico (termine $p dV$, positivo quando il sistema compie un lavoro verso l'esterno) e del calore scambiato (termine dQ , positivo quando il calore esce dal sistema). Un modo un po' più formale di affermare tale equivalenza è dire che nelle trasformazioni cicliche il bilancio netto tra lavoro meccanico e calore scambiato è nullo, ovvero che $\int_\gamma \omega_1 = 0$ per ogni cammino chiuso γ . In base al Teor. 11.2 ciò equivale a postulare che la funzione $p = p(V, Q)$ sia tale per cui ω_1 è una forma differenziale esatta. Il suo potenziale è una funzione U detta *energia interna*. Concludendo, il primo principio della termodinamica può essere espresso affermando l'esistenza di una funzione $U = U(V, Q)$ tale che

$$dU = p dV + dQ.$$

Supponiamo ora che la dipendenza di U da Q renda possibile l'inversione della relazione $U = U(V, Q)$: perché ciò sia possibile, almeno localmente e fatte alcune assunzioni di regolarità che in Fisica si considerano sempre soddisfatte, è sufficiente supporre che $\partial U / \partial Q \neq 0$ (teorema di Dini!). Sotto questa ipotesi è possibile utilizzare le grandezze V ed U quali nuovi parametri indipendenti, mentre Q e p diventano ora funzioni di V ed U . Possiamo quindi definire la seguente nuova

forma differenziale:

$$\omega_2 := p dV - dU.$$

Essa *non è esatta*, infatti il suo integrale lungo una trasformazione ciclica è pari alla quantità di calore scambiato dal gas con l'ambiente. Ad essa però possiamo applicare la Prop. 11.2 dimostrata all'inizio e concludere che esiste sicuramente un fattore integrante per ω_2 , almeno localmente ed almeno supposte valide alcune ipotesi di regolarità. Tale fattore integrante è solitamente indicato come $1/T$: abbiamo appena dimostrato, quindi, l'esistenza di una funzione $T = T(V, U)$ per la quale

$$\frac{1}{T} \omega_2 = \frac{p}{T} dV + \frac{dU}{T}$$

è un differenziale esatto. Come tradisce già la lettera usata per indicarla, questa funzione è quella che in termodinamica è chiamata *temperatura assoluta*.

Per apprezzare l'importanza di quanto siamo riusciti a fare occorre riflettere un poco sul concetto di temperatura. Usualmente, si definisce la temperatura attraverso il suo processo di misura che consiste nel fissare convenzionalmente i valori 0°C e 100°C in base alla posizione assunta da una colonna di mercurio contenuta in un tubicino di vetro quando questo è in contatto rispettivamente con acqua durante il suo congelamento (lo 0°C) e durante la sua evaporazione (il 100°C), il tutto in condizioni di pressione standard e stazionarie. La scala viene in seguito interpolata suddividendo in cento parti uguali il segmento intermedio e poi estrapolata ai due estremi della scala.

Questa definizione presenta però alcuni gravi difetti:

- utilizza come liquido di riferimento il mercurio, attribuendo a questo metallo un ruolo “speciale” che appare del tutto artificioso ed arbitrario;
- a -39°C il mercurio solidifica, rendendo così impossibile l'utilizzo di tale termometro per misurare temperature più basse; analogamente per questa via non sarebbe possibile misurare a temperature superiori a quella di ebollizione del mercurio (356°C).
- Si potrebbero aggirare le limitazioni precedenti tentando di usare un liquido termometrico diverso, ad esempio per le basse temperature si potrebbe usare l'alcol le cui temperature di fusione e di ebollizione sono rispettivamente -131°C e 78°C . Se facessimo così, però, nel range $0^\circ\text{C} - 78^\circ\text{C}$ avremmo due definizioni diverse di temperatura: quella proveniente dal mercurio e quella

proveniente dall'uso dell'alcol. Questo di per sé non sarebbe un problema se le due definizioni fossero in accordo, purtroppo così non è: la dilatazione della colonna di alcol, infatti, al variare della temperatura (misurata con il mercurio) non è lineare. Ciò si traduce in un disaccordo nella misura della temperatura di un corpo quando si utilizzano i due termometri.

Questi fatti mostrano che in realtà questa definizione di temperatura *non è soddisfacente*. L'uso di quei concetti termodinamici, invece, consente di introdurre in modo naturale, chiaro ed esatto il concetto di temperatura.

Osserviamo che per come abbiamo definito la temperatura assoluta, la forma differenziale ω_2/T è esatta; esiste quindi una funzione $S = S(V, U)$, detta *entropia*, tale che

$$dS = \frac{p}{T} dV + \frac{dU}{T}.$$

Per completezza concludiamo ricordando che una trasformazione termodinamica è detta *reversibile* se corrisponde ad una curva regolare almeno a tratti, nel piano p, V , altrimenti è detta *irreversibile*. L'espansione libera del gas è un esempio di trasformazione irreversibile (l'apertura del rubinetto di un qualsiasi fornello a gas è in buona approssimazione un'espansione libera). Se la trasformazione subita dal gas è irreversibile non ha quindi senso considerare l'integrale $\int_{\gamma} dS$ perché alla trasformazione non corrisponde nessun cammino γ ! Il secondo principio della termodinamica afferma che in un sistema isolato che subisca una trasformazione non reversibile la variazione di entropia è sempre maggiore di zero. Quindi un sistema isolato non può compiere una trasformazione ciclica irreversibile: la ciclicità della trasformazione implica infatti che la variazione di entropia sia nulla, mentre l'irreversibilità ed il secondo principio implicano che la variazione di entropia deve essere maggiore di 0.

Si può dimostrare che tra le conseguenze di questo principio c'è l'esistenza di un estremo inferiore per la funzione T : in altre parole, esso *implica l'esistenza della temperatura zero assoluto*.