Lezioni di Analisi Matematica 3

corso di Laurea in Fisica

a.a. 2005-'06

G. Molteni, M. Vignati

Notazioni

- I vettori di $\mathbb{R}^n$ e le funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$ sono indicate in grassetto, per cui si dirà $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ ed $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Saranno indicati in corsivo invece gli elementi di $\mathbb{R}$ e le funzioni a valori scalari.
- $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ indicano la base standard di $\mathbb{R}^n$.
- Data $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, indichiamo con $F_1, \ldots, F_n$ i coefficienti della decomposizione di $\boldsymbol{F}$ sulla base canonica:

$$\boldsymbol{F} = F_1\boldsymbol{e}_1 + F_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + F_n\boldsymbol{e}_n.$$

- I vettori di $\mathbb{R}^n$ sono indicati come vettori colonna e gli operatori agiscono a sinistra, quindi il valore di un operatore lineare T su di un vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ è indicato con $T\boldsymbol{v}$. Il prodotto scalare tra due vettori $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ è indicato con $<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}>$. Infine, data la matrice A di tipo $n \times m$ e la matrice B di tipo $n \times m'$, indichiamo con il

$$[A \vdots B]$$

la matrice $n \times (m + m')$ ottenuta accostando A e B.
- Coerentemente con quanto detto precedentemente, il gradiente ∇f di una funzione f è un vettore riga (infatti il gradiente non è un vettore ma un funzionale).
- Talvolta, per maggiore leggibilità nelle formule inserite nel testo ed in altre rare occasioni, e comunque quando ciò non sarà fonte di confusione alcuna, rappresenteremo i vettori di $\mathbb{R}^n$ come vettori riga. Scriveremo ad esempio '... il punto $(-2, 3)$...' anziché '... il punto $(-2, 3)^T$...'.
- Per le derivate parziali useremo indifferentemente le notazioni seguenti:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \partial_x f(x, y) = \partial_1 f(x, y)$$

e per le derivate parziali successive useremo quindi indifferentemente le notazioni:

$$\frac{\partial^{(k)} f(x_1,\dots,x_k)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} = \frac{\partial^{(k)} f}{\partial x_1 \cdots \partial x_k}(x_1,\dots,x_n) = \partial^{(k)}_{x_1 \cdots x_k} f(x_1,\dots,x_n)$$
$$= \partial^{(k)}_{1\cdots k} f(x_1,\dots,x_n).$$

- Talvolta sarà utile indicare il valore di una funzione in un punto oltre con l'usuale notazione $f(x,y)$ anche col simbolo
$$f|_{(x,y)}.$$
- Quando non è nota la relazione d'ordine tra due numeri reali a e b, indichiamo con $)a,b($ l'intervallo aperto di estremi a,b.
- Dato un numero reale x, il simbolo $\lfloor x \rfloor$ indica la parte intera di x, ovvero
$$\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} : \ n \le x\}.$$
- χ_E è la funzione caratteristica dell'insieme E: $\chi_E(x)$ vale 1 se $x \in E$, altrimenti vale 0.
- $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.
- $m^*(E)$ e $m(E)$ indicano rispettivamente la misura esterna e la misura dell'insieme E.
- $\mathcal{P}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{M}$, indicano rispettivamente le σ-algebre delle parti, dei boreliani e degli insiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^\omega$ indicano rispettivamente gli insiemi delle funzioni continue, delle funzioni derivabili n volte con derivata n-esima continua, delle funzioni derivabili ad ogni ordine e delle funzioni analitiche (sviluppabili in serie di Taylor).
- $\mathfrak{m}(E)$, $L(E)$ indicano gli insiemi delle funzioni rispettivamente misurabili e integrabili in E.
- $\mathcal{R}([a,b])$ è l'insieme delle funzioni Riemann integrabili in $[a,b]$.

CAPITOLO 1

Richiami

1.1. Sulle serie numeriche

1] Data la successione numerica $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, il simbolo di *serie numerica* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ viene usato per cercare di dare un senso alla somma di tutti i numeri a_n. Per farlo, si costruisce la *successione delle somme parziali*

$$s_0 = a_0\,,\; s_1 = a_0 + a_1\,,\; \ldots,\; s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\,, \ldots.$$

e si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è *regolare* oppure *irregolare* a seconda che la $\{s_n\}$ ammetta limite oppure no; nel caso di serie regolari, si parla di serie *convergente* alla *somma* S se

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = S \in \mathbb{R}$$

mentre si parla di serie *divergente* a $+\infty$ (oppure a $-\infty$) se $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ (risp. $-\infty$).

Il problema di stabilire se una serie numerica è convergente, divergente o irregolare viene enunciato dicendo che si vuole determinare il *carattere* della serie.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \;\text{è}\; \begin{cases} \textit{regolare} \implies \begin{cases} \textit{convergente}\ (\text{cioè } \lim\limits_{n\to+\infty} s_n = S \in \mathbb{R}) \\[2ex] \textit{divergente}\ (\text{cioè } \lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty, \text{ opp. } -\infty) \end{cases} \\[6ex] \textit{irregolare}\ (\text{cioè } \lim\limits_{n\to+\infty} s_n \text{ non esiste}) \end{cases}$$

Se viene modificato un numero finito di addendi, la serie non cambia carattere ma solo, al più, la somma; è il comportamento "alla lunga" dei termini a_n che determina il carattere della serie.

2] Le serie convergenti sono esattamente quelle per cui vale la *condizione di Cauchy* per le serie:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}: \ n \geq N, \ p \geq 1 \implies \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon \, . \tag{1.1}$$

Questa proprietà si ottiene applicando la nota condizione di Cauchy per successioni alla successione $\{s_n\}$, ed è necessaria e sufficiente per la convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. È spesso di difficile applicazione, ma se ne ricava una condizione necessaria per la convergenza:

$$\text{“}\mathit{se} \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ \ \mathit{converge, \ allora} \ \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \text{ ”}. \tag{1.2}$$

3] Una condizione sufficiente, ma in generale non necessaria, per la convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è la sua *convergenza assoluta*, cioè la convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Spesso, in mancanza di informazioni sui segni degli addendi a_n, lo studio della convergenza assoluta di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è l'unico strumento che può portare a stabilire che la serie converge.

4] Nel caso di serie a termini non-negativi, cioè $a_n \geq 0$ per ogni n, la convergenza assoluta coincide con la convergenza. In questo caso, la serie è necessariamente regolare, e può solo convergere (scriviamo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$) oppure divergere a $+\infty$ (scriviamo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$). Lo stesso accade se $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq \bar{n}$, cioè se gli addendi sono definitivamente non-negativi.

5] Per serie a termini non-negativi esistono vari criteri utili per stabilire se si ha convergenza o divergenza. Ne ricordiamo alcuni:

·) Criterio del confronto: date la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, con $0 \leq a_n \leq b_n$ per ogni n, si ha:

$$\begin{aligned} \mathit{se} \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ &= \ +\infty \ \ \mathit{allora} \ \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty; \\ \mathit{se} \ \sum_{n=0}^{\infty} b_n \ &< \ +\infty \ \ \mathit{allora} \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty. \end{aligned}$$

Questo criterio è spesso utilizzato nella seguente versione:

se esistono due costanti $c, C > 0$ *per le quali*

$$ca_n \leq b_n \leq Ca_n \quad \textit{definitivamente},$$

allora le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *sono entrambe convergenti o divergenti. In particolare, questo accade quando* $a_n \sim b_n$.

·) Criterio integrale: se $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione non-negativa e monotòna non-crescente, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ e l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ sono contemporaneamente convergenti oppure divergenti.

·) Criterio del rapporto: sia data $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, con $a_n > 0$ per ogni n ed esista $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0, +\infty]$, allora:

$$\begin{aligned} &\cdot)\text{ se } \ell < 1, \text{ la serie converge;}\\ &\cdot)\text{ se } \ell > 1, \text{ la serie diverge.}\end{aligned}$$

·) Criterio della radice: sia data $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, con $a_n \geq 0$ per ogni n ed esista $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda \in [0, +\infty]$, allora:

$$\begin{aligned} &\cdot)\text{ se } \lambda < 1, \text{ la serie converge;}\\ &\cdot)\text{ se } \lambda > 1, \text{ la serie diverge.}\end{aligned}$$

6] Riportiamo alcuni esempi di serie numeriche di cui è noto il carattere:

·) La serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ di ragione $q \in \mathbb{R}$ è convergente se $|q| < 1$ e ha somma $S(q) = \frac{1}{1-q}$. Per $q \geq 1$ diverge a $+\infty$, mentre per $q \leq -1$ è irregolare.

·) La serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ converge per ogni $p > 1$ e diverge a $+\infty$ se $p \leq 1$.

·) La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^p (\log n)^q}$ converge solo nei casi $\{p > 1,\ \forall q\}$ e $\{p = 1, q > 1\}$.

7] Un caso molto particolare di serie numerica con addendi di segno non costante è costituito dalle serie con termini di segno alternato, cioè della forma $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ con $a_n > 0$ per ogni n. Per queste serie vale il *criterio di Leibniz*, che ne garantisce la convergenza nel caso sia soddisfatta la condizione $a_n \downarrow 0$.

8] Nel caso di serie numeriche a valori complessi ($a_n \in \mathbb{C}$) hanno ancora senso alcuni dei concetti esposti sopra. Si può ancora parlare di serie convergente; per la convergenza è necessaria e sufficiente la condizione di Cauchy; la convergenza assoluta è ancora una condizione sufficiente per la convergenza.

9] Date due serie numeriche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, la loro *serie somma* è definita come $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)$. Se le due serie date sono convergenti, ad S e T rispettivamente, allora la serie somma converge a $S+T$.

Invece, la *serie prodotto secondo Cauchy* delle serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è definita come la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, dove

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 \ .$$

Un teorema, dovuto a Mertens, afferma che se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = T$, ed almeno una delle due è assolutamente convergente, allora la serie prodotto secondo Cauchy converge alla somma ST. Se le due serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ non sono assolutamente convergenti, questo risultato non è garantito.

10] Data una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, un suo *riarrangiamento* è una serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ottenuta dalla precedente permutandone i termini. Questo significa che gli insiemi $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono in corrispondenza biunivoca; in altre parole, per ogni $n \geq 0$ si ha $b_n = a_{p(n)}$ dove $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è una funzione biunivoca.
In generale, né il carattere né la somma (se la serie converge) sono conservati quando una serie viene riarrangiata. Le serie convergenti per le quali ogni riarrangiamento risulti convergente e mantenga la stessa somma sono dette *incondizionatamente convergenti.*
È possibile dimostrare che una serie è incondizionatamente convergente se e solo se è assolutamente convergente. Così, per serie a termini non-negativi accade che tutti i riarrangiamenti siano convergenti alla stessa somma, oppure tutti divergano a $+\infty$.
Questo fatto ci permetterà, nel seguito, di trattare senza ambiguità con le *serie doppie*

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} a_{n,k} \quad \text{con} \quad a_{n,k} \geq 0 \ \ \forall\, n, k.$$

la cui somma è calcolabile sia come $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}\right)$ sia come $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k}\right)$.

1.2. Sulle successioni di funzioni

1] Siano $f_n : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $n = 0, 1, 2 \ldots$, funzioni definite in un comune insieme $D \subseteq \mathbb{R}$. La successione $\{f_n\}$ *converge puntualmente* (o semplicemente) nell'insieme $E \subseteq D$ se per ogni $x \in E$ la successione di numeri reali (o complessi) $\{f_n(x)\}$ converge. La *funzione limite* è la $f : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ definita come $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$, $x \in E$, e scriviamo $f_n \to f$ *in* E.
In generale, la convergenza puntuale non assicura che "buone" proprietà (continuità, derivabilità, integrabilità,...) valide per le f_n possano essere trasferite alla funzione limite.

2] La successione di funzioni $\{f_n\}$ *converge uniformemente in* E alla funzione limite f se vi converge puntualmente, e inoltre si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\sup_{x\in E}|f_n(x) - f(x)|\right] = 0\ .$$

In questo caso scriviamo $f_n \to f$ *unif. in* E.
La quantità $\sup_{x\in E}|f_n(x) - f(x)|$ viene spesso indicata col simbolo $\|f_n - f\|_{\infty,E}$, per cui la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ ad f in E equivale ad avere $\|f_n - f\|_{\infty,E} \to 0$ se $n \to +\infty$.
La condizione di Cauchy, necessaria e sufficiente perché la $\{f_n\}$ sia uniformemente convergente in E, è:

$$\begin{aligned} &\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \text{ tale che :} \\ &\forall\, m, n \geq N \text{ si ha } \|f_m - f_n\|_{\infty,E} < \varepsilon\ . \end{aligned} \tag{1.3}$$

3] La convergenza uniforme, diversamente da quella puntuale, fa sì che la funzione limite "erediti" alcune proprietà dalle funzioni f_n. Più precisamente:
·) Se ogni f_n è limitata in E, e se $f_n \to f$ unif. in E, allora f è limitata in E.
·) Se $f_n \to f$ unif. in E ed ogni f_n è continua in $x_0 \in E$, allora f è continua in x_0. In particolare, se $f_n \in \mathcal{C}(E)$, anche $f \in \mathcal{C}(E)$.
·) Se $f_n \in \mathcal{C}([a, b])$ e $f_n \to f$ unif. in $[a, b]$, allora $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$.

$\cdot$) Se le f_n sono derivabili in un intervallo limitato I, tali che $f'_n \to g$ unif. in I e se $\{f_n\}$ converge puntualmente in almeno un punto $x_0 \in I$, allora $\{f_n\}$ converge uniformemente in I ad una funzione derivabile f, e inoltre $f' = g$.