

CAPITOLO 5

IL CAMPIONAMENTO DEL SEGNALE

5.1 - IL TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO

L'elaborazione di segnali complessi e l'effettuazione di misure ripetitive e lunghe induce lo sperimentatore all'uso di sistemi di calcolo automatico. L'elaborazione mediante calcolatore di segnali analogici è difficoltosa perché tale è la costruzione di calcolatori analogici, soprattutto per problemi di stabilità.

La rappresentazione mediante delta permette una descrizione precisa di $x(t)$ mediante una sequenza di infiniti numeri, ciascuno dei quali rappresenta l'area di una delta.

La domanda è se per la rappresentazione precisa di $x(t)$ occorra una infinità continua di numeri: ad essa risponde il teorema del campionamento che può essere enunciato come segue.

Sia $x(t)$ un segnale avente T.F. $X(\omega)$ e che sia a banda limitata $(-B, B)$, cioè

$$X(\omega) = 0 \quad \omega \notin \{-2\pi B, 2\pi B\}$$

Il segnale $x(t)$ è completamente determinato dalla conoscenza dei valori istantanei ("campioni") presi ad intervalli di tempo costanti

$$T_s \leq 1/2B$$

cioè con frequenza (di Nyquist)

$$(5.1) \quad \nu_s = 1/T_s \geq 2B$$

In altri termini, il teorema afferma che se sono noti i campioni del segnale presi negli istanti T_s , è possibile da essi ricavare il valore del segnale in qualunque altro istante t .

Per la dimostrazione, supponiamo che i campioni siano prelevati in maniera ideale, filtrando il segnale $x(t)$, in accordo con la (4.12), con una sequenza di finestre temporali di durata infinitamente breve, cioè con una funzione pettine di periodo T_s , ottenendo così:

$$(5.2) \quad x_s(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{d}(t - kT_s)$$

Si noti, ricordando la (1.21), che ogni campione è rappresentato da una delta, la cui area è il valore del campione stesso.

Allora, nel dominio delle frequenze

$$(5.3) \quad X_s(\omega) = X(\omega) * \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{d}(\omega - n\omega_s)$$

Pertanto, per la (2.54), lo spettro di $x_s(t)$ è quello di $x(t)$ ripetuto indefinitamente sull'asse ω ad

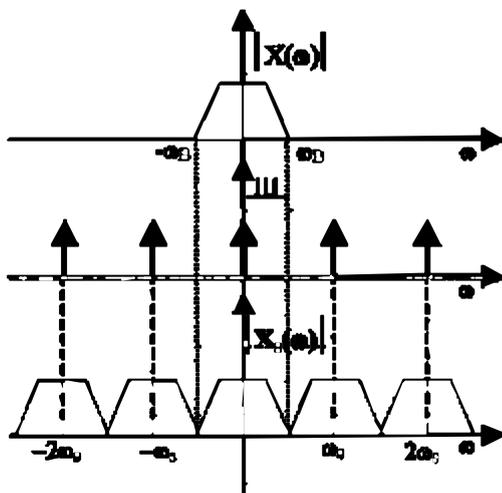


Fig. 5.1

intervalli T_s . Tale spettro è mostrato in **Fig. 5.1** per il caso $\omega_s = 2\omega_B$, con $\omega_B = 2\pi B$.

Come si osserva, essendo $X(\omega)$ a banda limitata, se $\omega_s \geq 2\omega_B$ le ripetizioni non si sovrappongono e il “motivo” dello spettro non è deformato. Ne segue che con un filtro passa-basso ideale (4.8), di frequenza di taglio ω_B , si può riottenere lo spettro del segnale $x(t)$ da quello del segnale campionato $x_s(t)$.

Filtrando lo spettro $X_s(\omega)$ si ha infatti, per la (4.8):

$$(5.4) \quad X(\omega) * \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{d}(\omega - n\omega_s) \cdot \Pi_{\omega_s}(\omega) = \omega_s X(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

che è lo spettro $X(\omega)$ a meno di un fattore di scala in ampiezza, ω_s , e di un ritardo lineare di fase, $-\omega t_0$, inessenziali per quanto detto nel par. 4.1.

Nel dominio del tempo, ricordando la (4.8) e (4.9) si ha

$$(5.5) \quad x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{d}(t - kT_s) * \frac{\omega_B \text{sen } \omega_B(t - t_0)}{p \omega_B(t - t_0)} = \omega_s x(t - t_0)$$

il segnale $x(t)$ può essere ricostruito per ogni t facendo passare la sequenza dei campioni in un filtro passa-basso ideale con frequenza di taglio eguale a ω_B .

Ricordando la (1.17), si può riscrivere la (5.5) come segue

$$(5.6) \quad \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} x(kT_s) \mathbf{d}(t - kT_s) * \frac{\text{sen } \omega_B(t - t_o)}{\omega_B(t - t_o)} = x(t - t_o)$$

e infine, trascurando per comodità il fattore di scala 2π e ponendo il ritardo $t_o = 0$

$$(5.7) \quad x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(kT_s) \frac{\text{sen } \omega_B(t - kT_s)}{\omega_B(t - kT_s)}$$

cioè $x(t)$ è ricostruibile sommando delle sinc centrate sugli istanti di campionamento, come mo-

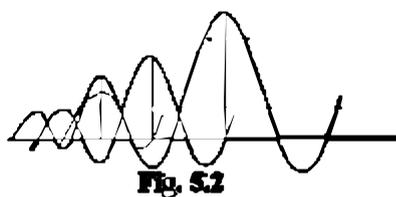


Fig. 5.2

strato in **Fig. 5.2**. In tal modo, si ritrovano i valori di $x(t)$ in-

termedi tra i campioni. Questa operazione si chiama

“interpolazione”, e la sinc è anche nota come funzione di

interpolazione di Shannon. Si osservi che questa in-

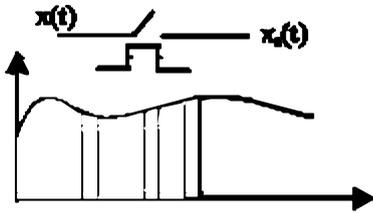
terpolazione è non causale: la ricostruzione del valore $x(t_0)$,

$t_0 \neq kT_s$, ha bisogno della conoscenza dei campioni futuri, che definiscono ampiezza e istante di centramento delle sinc, come appare dalla Fig. 5.2.

Si noti nella Fig. 5.2 come gli zeri della sinc centrata sul campione k -mo cadano sugli altri istanti di campionamento ($\neq k$). Ciò può essere facilmente verificato. Ovviamente deve essere così, poiché i valori dei campioni non devono essere alterati sommando le sinc.

5.2 - CAMPIONAMENTO DI DURATA FINITA

Non sappiamo realizzare un campionamento istantaneo: una “gate lineare” realizzabile in



laboratorio ha un tempo di attivazione finito Δt . Il risultato del campionamento può essere schematizzato come in

Fig. 5.3, ove per semplicità si è assunto che la finestra del filtro sia ideale; nel paragrafo seguente viene considerato il caso generale. Ogni campione contiene ora “informazione” in più rispetto al caso del campionamento istantaneo, per cui è ragionevole aspettarsi che non cambi niente.

La funzione peso del filtro può essere espressa come:

$$(5.8) \quad f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \bigcap_{\frac{\Delta t}{2}}(t - kT_s)$$

Il segnale campionato è pertanto:

$$(5.9) \quad x_s(t) = x(t)f(t) = x(t) \sum_{-\infty}^{\infty} \bigcap_{\frac{\Delta t}{2}}(t - kT_s)$$

Facciamone la T.F., ricordando la (3.56):

$$(5.10) \quad X_s(\omega) = X(\omega) * \sum_{-\infty}^{\infty} \omega_s \Delta t \frac{\text{sen}(n \omega_s \frac{\Delta t}{2})}{n \omega_s \frac{\Delta t}{2}} \mathbf{d}(\omega - n \omega_s)$$

o anche

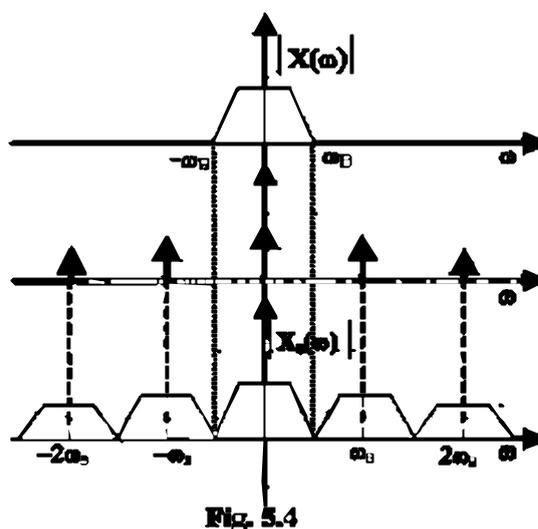
$$(5.11) \quad X_s(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} \Delta t \frac{\text{sen}(n \omega_s \frac{\Delta t}{2})}{n \omega_s \frac{\Delta t}{2}} [X(\omega) * \omega_s \mathbf{d}(\omega - n \omega_s)]$$

Quindi, a differenza del caso del campionamento istantaneo (5.3), il motivo ripetuto indefinitamente è ora “pesato” dalla sinc, **Fig. 5.4**.

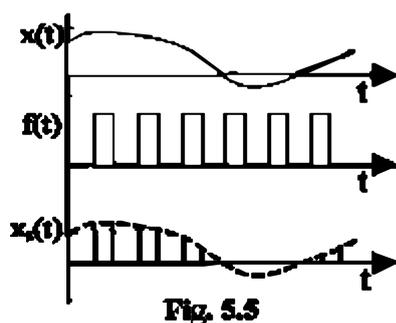
Con un filtro passa-basso ideale (4.8) che tagli a ω_B si ha

$$(5.12) \sum_{-\infty}^{\infty} \Delta t \frac{\text{sen}(n \omega_s \frac{\Delta t}{2})}{n \omega_s \frac{\Delta t}{2}} [X(\omega) * \omega_s d(\omega - n \omega_s)] \Pi_{\omega_B}(\omega) = \omega_s \Delta t X(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

e lo spettro originale viene recuperato, a meno della costante di ampiezza $\omega_s \Delta t$ e del ritardo di fase ωt_0 . Tuttavia, occorre sottolineare che per recuperare lo spettro del segnale originale occorre conservare esattamente la forma del campione, come mostrato in Fig. 5.3: cioè occorre memorizzare $x(t)$ istante per istante entro Δt .



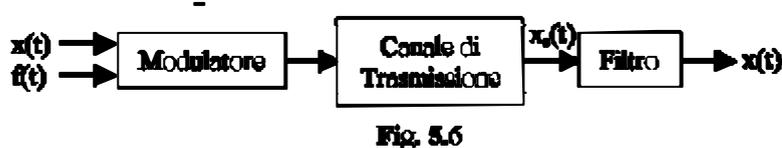
Il campionamento non istantaneo ha interesse nella tecnica di trasmissione a distanza dei segnali mediante modulazione di ampiezza ad impulsi (P.A.M.). Il processo di modulazione è illustrato in Fig. 5.5, mentre il processo di trasmissione e ricostruzione può essere schematizzato come in Fig. 5.6.



La durata finita dei campioni rende invece problematica l'elaborazione dell'informazione sotto forma numerica (calcoli mediante un calcolatore digitale, trasmissione P.C.M., ...): abbiamo quindi la necessità di associare a ciascun campione un numero che ne rappresenti il valore, Fig. 5.7. La domanda è con che criterio va scelto questo

numero, e con quali conseguenze sulla ricostruzione del segnale $x(t)$. Un criterio ragionevole, che può essere implementato

mediante un sample-and-hold (S.H.)



seguito da un convertitore analogico-digitale (A.D.C.), **Fig. 5.8**, è quello della media:

$$(5.13) \quad c(kT_s) = \frac{1}{\Delta t} \int_{kT_s - \frac{\Delta t}{2}}^{kT_s + \frac{\Delta t}{2}} x(t) dt$$

o anche

$$(5.14) \quad \begin{aligned} \chi(kT_s) &= \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \Pi_{\frac{\Delta t}{2}}(\lambda - kT_s) d\lambda \\ &= \frac{1}{\Delta t} [x(t) * \Pi_{\frac{\Delta t}{2}}(t)]_{t=kT_s} \end{aligned}$$

Pertanto, il segnale campionato è rappresentabile come:

$$(5.15) \quad \begin{aligned} x_s(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(kT_s) \mathbf{d}(t - kT_s) \\ &= \frac{1}{\Delta t} [x(t) * \Pi(t)] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{d}(t - kT_s) \end{aligned}$$

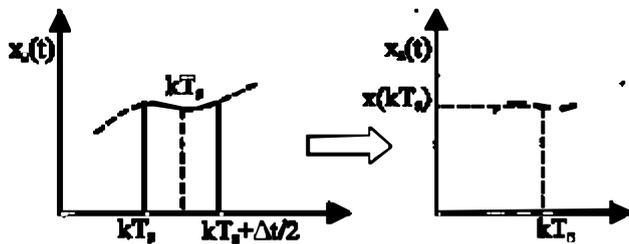


Fig. 5.7

Questo equivale a campionare in maniera ideale il segnale

$$x_1(t) = x(t) * \Pi(t)$$

ed il segnale $x_1(t)$, non $x(t)$, potrà essere ricostruito dai campioni.

Nel dominio delle frequenze:

$$(5.16) \quad X_s(\omega) = \frac{1}{\Delta t} [X(\omega) \Delta t \frac{\text{sen} \omega \frac{\Delta t}{2}}{\omega \frac{\Delta t}{2}}] * \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{d}(\omega - n\omega_s)$$

Se si confronta questo risultato con la (5.3), si vede che a $X(\omega)$ è stata sostituita la funzione:

$$(5.17) \quad X_I(\omega) = X(\omega) \frac{\text{sen} \omega \frac{\Delta t}{2}}{\omega \frac{\Delta t}{2}} = X(\omega) H(\omega)$$



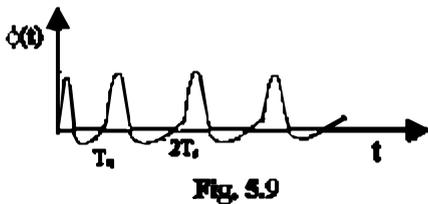
Fig. 5.8

cioè $X(\omega)$ risulta filtrato nel filtro $H(\omega)$: lo spettro del segnale campionato è la ripetizione indefinita di $X_1(\omega)$, non di $X(\omega)$ e

l'operazione di ricostruzione restituisce $x_1(t)$, non il segnale vero $x(t)$.

5.3 - CAMPIONAMENTO REALE

In realtà, il campionamento di durata finita di Fig. 5.3 è una idealizzazione; i campionatori che sappiamo realizzare non sono capaci di transizioni istantanee e finiscono per realizzare delle



finestre non rettangolari, ma descrivibili con funzioni $\Phi(t)$ piuttosto complesse, come schematizzato in **Fig. 5.9**, ove è mostrata la funzione peso

$$(5.18) \quad f(t) = \sum_k \Phi(t - kT_s)$$

Si può assumere come valore del campione, posizionato all'istante kT_s

$$(5.19) \quad c(kT_s) = \int_{kT_s}^{kT_s+q} x(t)f(t)dt$$

che è una media pesata. Si può anche scrivere:

$$(5.20) \quad c(kT_s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)f(t - kT_s)dt = x(t) * f(-t)|_{t=kT_s}$$

essendo $h(t) = \Phi(-t)$ la risposta impulsiva del campionatore.

Pertanto, il segnale campionato è rappresentabile come

$$(5.21) \quad x_s(t) = [x(t) * h(t)] \sum_k \delta(t - kT_s)$$

Questo è equivalente a campionare in maniera ideale il segnale

$$(5.22) \quad x_1(t) = x(t) * h(t)$$

come si deduce dal confronto con la (5.2). È $x_1(t)$ il segnale che potrà essere ricostruito dai campioni, non $x(t)$.

Si potrebbe pensare di ricavare $x(t)$ per deconvoluzione

$$(5.23) \quad x(t) = x_1(t) * h(t)$$

ma in pratica la funzione $\Phi(t)$ del campionatore reale raramente è conosciuta con precisione.

5.4 - CAMPIONAMENTO DI SEGNALI DI DURATA FINITA

Nel paragrafo precedente si è visto un primo limite pratico alla utilizzabilità del teorema del campionamento, costituito dal campionatore che si è capaci di costruire. C'è ancora un aspetto importante che non bisogna perdere di vista quando si vuole effettuare un campionamento. Infatti, occorre notare che un segnale a banda limitata ha necessariamente durata infinita, come è mostrato chiaramente dalla ricostruzione per interpolazione, Fig. 5.2 (la sinc si estende da $+\infty$ a $-\infty$).

Un segnale fisicamente realizzabile ha sempre durata finita

$$(5.24) \quad x_T(t) = 0 \quad t \notin (-T/2, T/2)$$

e si può facilmente verificare che è a banda illimitata. Infatti, si può scrivere formalmente

$$(5.25) \quad x_T(t) = x(t)\Pi_{T/2}(t)$$

essendo $x(t)$ un segnale di durata infinita, a banda limitata, coincidente con $x_T(t)$ entro l'intervallo di esistenza di quest'ultimo, cioè

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & t \in (-T/2, T/2) \\ \text{arbitr.} & \text{altrove} \end{cases}$$

Per trasformata di F.

$$X_T(\omega) = X(\omega) * \frac{\text{sen} \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}$$

che non è a banda limitata.

Si noti tuttavia che la sinc si va smorzando al crescere di ω ; questo corrisponde al fatto che $X_T(\omega)$ tende a zero al crescere di ω (tutti i sistemi reali sono passa-basso). Pertanto, si può pensare di troncare lo spettro trascurando la frazione al di sopra di una opportuna ω_B :

$$X_T(\omega) = 0 \quad \omega \notin \{-\omega_B, \omega_B\}$$

In tal modo, il segnale $x_T(t)$ risulterà approssimato con un numero N finito di campioni

$$N = T/T_s = Tv_s = 2BT$$

-5.10-

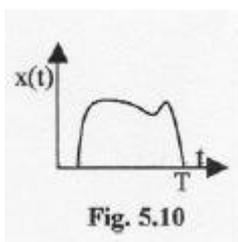
e si può dimostrare che

$$(5.26) \quad |X_T(\omega)| \sim 1/BT \quad \omega \notin (-\omega_B, \omega_B)$$

Quindi, l'errore di approssimazione è tanto più piccolo quanto più BT è grande (quindi, T grande e T_s piccolo).

5.5 - CAMPIONAMENTO NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE

Gli analizzatori di spettro moderni calcolano la T.F. per punti, non continua (per questioni di precisione), sia che la $x(t)$ sia nota in forma continua, sia che lo sia in forma campionata. Lo



strumento pertanto opera un campionamento dello spettro.

Il problema è determinare con che passo Δv_s vanno calcolati questi punti per una corretta ricostruzione dello spettro.

Consideriamo il caso di un segnale reale causale

$$(5.27) \quad x(t) \Leftrightarrow X(\omega); \quad x(t) = 0 \quad t \notin \{0, T\}$$

rappresentato in **Fig. 5.10**.

Poiché $x(t)$ è la T.F. di $X(\omega)$ ed è a supporto limitato $(0, T)$, per il teorema di Shannon basta campionare $X(\omega)$ con passo

$$(5.28) \quad \Delta v_s \leq 1/T$$

In realtà, l'analizzatore di spettro calcola separatamente $\text{Re}[X(\omega)]$ e $\text{Im}[X(\omega)]$: è a questi che occorre applicare il teorema. A questo scopo, possiamo scrivere

$$(5.29) \quad x(t) \leftrightarrow \text{Re}[X(\omega)] + j\text{Im}[X(\omega)]$$

$$(5.30) \quad x(-t) \leftrightarrow \text{Re}[X(-\omega)] + j\text{Im}[X(-\omega)]$$

Per le proprietà di simmetria della T.F.

$$(5.31) \quad x(-t) \leftrightarrow \text{Re}[X(\omega)] - j\text{Im}[X(\omega)]$$

Si noti che $x(-t)$ è $x(t)$ ribaltato intorno all'asse delle ordinate. Dalle (5.29) e (5.31) si ha

$$(5.32) \quad \text{Re}[X(\omega)] \leftrightarrow \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]$$

$$(5.33) \quad \text{Im}[X(\omega)] \leftrightarrow \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]$$

La Fig. 5.11 mostra chiaramente che il supporto dei secondi membri nelle due ultime relazioni è $2T$, per cui $\text{Re}[\cdot]$ e $\text{Im}[\cdot]$

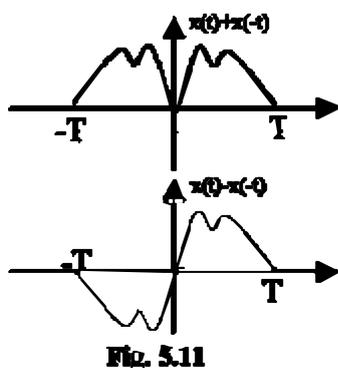


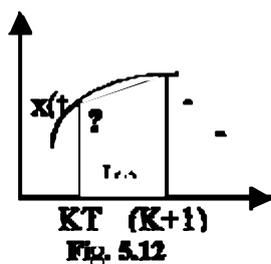
Fig. 5.11

-5.12-

devono essere campionati con passo $\Delta v_s \leq 1/2T$.

5.6 - INTERPOLAZIONE APPROSSIMATA

L'interpolazione di Shannon è non causale, ed è in ogni caso difficile da realizzare, per la difficoltà di generare la sinc. In pratica, ci si può accontentare di una interpolazione lineare, che approssima quella dell'occhio umano.



Occorre valutare la bontà dell'approssimazione. A tale scopo, consideriamo la **Fig. 5.12**. Detto $x(t)$ il segnale vero (ottenibile con l'interpolazione di Shannon) e $x'(t)$ quello ottenuto con interpolazione lineare, si può definire l'errore relativo di approssimazione

$$(5.34) \quad \varepsilon = \max \{ [x(t) - x'(t)] / x(t) \}$$

e cercare la frequenza di campionamento ω_s che garantisca un errore non superiore a un ε assegnato. Si può far vedere che è

$$(5.35) \quad \omega_s / \omega_B \geq 2.2 / \sqrt{\varepsilon}$$

essendo ω_B la pulsazione di taglio considerata per il segnale. Per esempio, se si assume $\varepsilon = 0.01$, deve essere $\omega_s \geq 22\omega_B$, cioè un oversampling di 11.

5.7 - EFFETTO DEL SOTTOCAMPIONAMENTO

Sia $x(t)$ un segnale a banda limitata e lo si campioni ad una frequenza $\nu_s < 2B$. Lo spettro del segnale campionato apparirà come in Fig. 5.13.

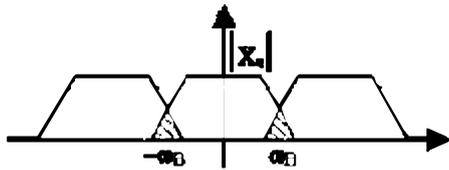


Fig. 5.13

Lo spettro del segnale originale non è più recuperabile,

perché si è “riempito” con contributi inesistenti nel segnale $x(t)$. Questo fenomeno si chiama “aliasing”.

L'aliasing è importante quando si deve campionare un segnale di cui non è conosciuta l'estensione spettrale, e del quale comunque si voglia fare una analisi entro una assegnata banda $[-B, B]$, per esempio la misura della densità spettrale. Se si invia $x(t)$ così come è nell'analizzatore di spettro predisposto per campionare a $\nu_s = 2B$, se la banda reale di $x(t)$ è $\gg B$, l'effetto del riempimento può dare risultati di molto errati.

L'effetto dell'aliasing può essere ridotto filtrando $x(t)$ prima di campionarlo, usando un filtro passa-basso che tagli alla frequenza ω_B .

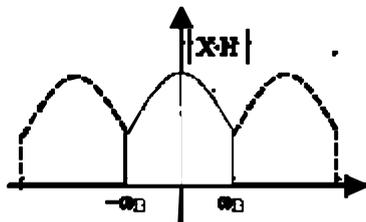


Fig. 5.15

L'effetto di un filtro ideale $H(\omega) = \Pi_{\omega_B}(\omega)$ è mostrato in Fig. 5.15. L'analizzatore di spettro che ha all'ingresso questo

filtro (filtro anti-riempimento) opererà su uno spettro non alterato entro la banda $[-B, B]$.

In realtà, sappiamo costruire solo approssimazioni di un filtro ideale (per esempio, filtri di Chebychev, Butterworth, Cauer, ...); pertanto, la ripetizione indefinita del filtro non sarà come

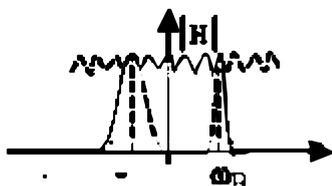
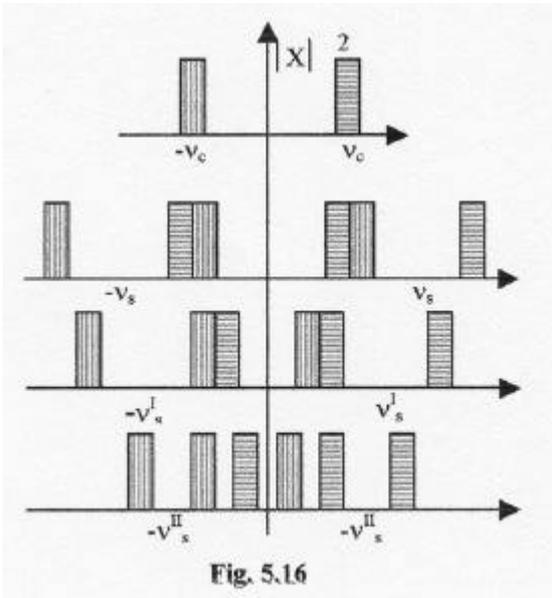


Fig. 5.14

tratteggiato in Fig. 5.15, bensì come in Fig. 5.14, ove ω_B è la frequenza di taglio del filtro, la quale viene assunta come limite di banda. Dalla figura è chiaro che un filtro reale riduce ma non elimina l'aliasing. Il massimo riempimento si ha a $\omega = \omega_B$, come appare dalla Fig. 5.14. L'effetto si attenua

sovracampionando, ma per questo occorrono campionatori più veloci e quindi più costosi. Pertanto, la qualità di un analizzatore di spettro dipende marcatamente da quella del filtro antialiasing: più il filtro è “ripido”, meno si è costretti a sovracampionare per mantenere la percentuale β di aliasing sotto un assegnato livello. Negli analizzatori di spettro commerciali, dotati di filtro antialiasing, è solitamente $1.2 \leq \alpha \leq 2$, per $\beta \sim 1\%$.

5.8 - CAMPIONAMENTO DI SEGNALI A BANDA RELATIVA STRETTA



In Fig. 5.16a è mostrato lo spettro di un segnale “passa-banda”. La Fig. 5.16b mostra lo spettro dello stesso segnale campionato con frequenza doppia della massima frequenza contenuta nello spettro del segnale originale, cioè a

$$(5.36) \quad v_s = 2(v_c + B)$$

Le Fig. 5.16c,d mostrano gli spettri del segnale sottocampionato rispetto al limite di Nyquist (5.36), a due frequenze opportune v'_s e v''_s , entrambe minori di v_s .

E' chiaro che il segnale sottocampionato come in c) e d) può essere recuperato integralmente, con un filtro passa-banda ideale, non essendoci aliasing. è anche chiaro che questo è possibile solo con una opportuna scelta della frequenza di campionamento la quale deve garantire che nessuno degli spettri ripetuti si sovrapponga a quello del segnale originale. Per esempio, dalle Fig. b) e c) appare che qualora si campionasse a v^*_s tale che

$$(5.37) \quad v'_s < v^*_s < v_s$$

le ripetizioni si sovrapporrebbero allo spettro del segnale originale, che pertanto non potrebbe più essere recuperato.

Determiniamo le condizioni per un sottocampionamento corretto. Detta v_s la frequenza di campionamento, essa deve essere

tale che:

la k -ma ripetizione dello spettro (cioè quella ottenuta dalla convoluzione di $X(\omega)$ con $\delta(\omega -$

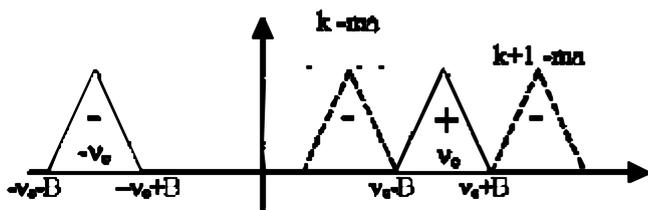


Fig. 5.17

$k\omega_s$) deve avere la parte negativa di $X(\omega)$ (cioè quella compresa fra $[-v_c-B, -v_c+B]$) al più affiancata a sinistra alla parte positiva di $X(\omega)$.

la $(k+1)$ -ma ripetizione deve avere la parte negativa al più affiancata a destra della parte positiva di $X(\omega)$.

Ciò è mostrato in **Fig. 5.17**.

Le due condizioni possono essere scritte analiticamente come segue:

$$(5.38) \quad -v_c + B + kv_s < v_c - B$$

$$(5.39) \quad -v_c - B + (k+1)v_s > v_c + B$$

Da queste si ha:

$$(5.40) \quad kv_s < 2(v_c - B)$$

$$(5.41) \quad (k+1)v_s > 2(v_c + B)$$

o anche

$$(5.42) \quad \frac{2(n_c + B)}{k+1} < n_s < \frac{2(n_c - B)}{k}$$

essendo k il massimo intero che soddisfa la relazione.

Per esempio, consideriamo il caso che sia

$$v_c = 1 \text{ MHz}; \quad B = 5 \text{ kHz}$$

Si ha dalla (5.44)

$$\frac{2(n_c + B)}{k+1} < \frac{2(n_c - B)}{k}$$

da cui $k < 99.5$. Se si prende $k = 99$, si trova dalla (5.44)

$$20100 < v_s < 20101 \text{ Hz}$$

che richiede un controllo molto stringente su v_s . Con $k=50$, si ha

$$39411 < v_s < 39800 \text{ Hz}$$

Con $k=25$

$$77307 < v_s < 79600 \text{ Hz}$$

Bibliografia