

CAPITOLO 10

IL FILTRAGGIO OTTIMO PER MISURE DI ENERGIA

10.1 MISURA OTTIMA DELLA CARICA

Nel capitolo 9 abbiamo studiato le sorgenti fisiche del rumore, sia nei rivelatori che negli elementi del front-end, ed abbiamo introdotto la carica equivalente di rumore, ENC, come fattore di merito dell'apparato di misura.

L'oggetto della misura è la carica Q fornita dal rivelatore, perché essa è proporzionale all'energia rilasciata dalla particella nell'attraversare il rivelatore stesso.

ENC^2 è la fluttuazione q.m. nella misura di Q .

Per ridurre queste fluttuazioni, si pone un filtro all'uscita dell'amplificatore, Fig. 10.1. Il filtro ottimo sarà una rete che, al momento della misura t_m , minimizza la fluttuazione q.m., cioè minimizza lo scarto q.m. fra il segnale vero ed il segnale disponibile. Per questo si dice che la misura è ottima nel senso dei minimi quadrati.

Affrontiamo ora il problema della ricerca della risposta impulsiva del filtro ottimo, $h(t)$.

Sia $Q_s(t)$ il segnale di tensione all'uscita dell'amplificatore, che trasporta l'informazione sul parametro Q che si vuole misurare. Sia $N(\omega)$ la densità spettrale del rumore introdotto dall'amplificatore stesso. Il rumore è assunto ergodico e a media nulla.

Cercare il filtro che minimizza la varianza del noise equivale a cercare il filtro che, per un dato segnale, massimizza il rapporto segnale-rumore SNR a t_m , vedi (9.9).

La ricerca di $h(t)$ verrà fatta nel dominio delle frequenze.

Detta $H(s) = TL\{h(t)\}$ la funzione di trasferimento del filtro cercato, il segnale alla sua uscita sarà'

-10.2-

$$(10.1) \quad v_o(t) = Qs(t)*h(t) \Leftrightarrow QS(\omega)H(j\omega)$$

o anche

$$(10.2) \quad v_o(t) = Q \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)S(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

La densità spettrale del rumore all'uscita del filtro sarà

$$(10.3) \quad S_{yy}(\omega) = d\langle v_n^2 \rangle / d\omega = N(\omega)|H(j\omega)|^2$$

quindi

$$(10.4) \quad \langle v_n^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} N(\omega)|H(j\omega)|^2 d\omega$$

Consideriamo SNR^2 all'uscita del filtro al momento della misura t_m

$$(10.5) \quad SNR^2 = Q^2 \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)S(\omega)e^{j\omega t_m} d\omega \right]^2}{\int_{-\infty}^{\infty} N(\omega)|H(j\omega)|^2 d\omega}$$

La $H(s)$ cercata è quella che massimizza SNR^2 .

Applichiamo al numeratore la disuguaglianza di Schwartz, che afferma quanto segue:

siano $u_1(\omega)$ e $u_2(\omega)$ due funzioni complesse; allora

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\omega)u_2(\omega)d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |u_1(\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} |u_2(\omega)|^2 d\omega$$

e il segno di = si ha se

$$(10.6) \quad u_1(\omega) = k'u_2^*(\omega) \quad k' \text{ cost. arbitr.}$$

Nel nostro caso, scegliamo

$$(10.7) \quad u_1(\omega) = H(j\omega)N^{1/2}(\omega) \qquad u_2(\mathbf{w}) = \frac{S(\mathbf{w})e^{j\mathbf{w}t_m}}{N^{1/2}(\mathbf{w})}$$

Avremo

$$(10.8) \quad Q^2 \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} H(j\mathbf{w})S(\mathbf{w})e^{j\mathbf{w}t_m} d\mathbf{f} \right]^2}{\int_{-\infty}^{\infty} N(\mathbf{w})/|H(j\mathbf{w})|^2 d\mathbf{f}} \leq Q^2 \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} N(\mathbf{w})/|H(j\mathbf{w})|^2 d\mathbf{f} \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(\mathbf{w})|^2}{N(\mathbf{w})} d\mathbf{f} \right]}{\int_{-\infty}^{\infty} N(\mathbf{w})/|H(j\mathbf{w})|^2 d\mathbf{f}}$$

ove si è fatto uso della relazione

$$(10.9) \quad |e^{jx}|^2 = |\cos x + j \sin x|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

In conclusione

$$(10.10) \quad SNR^2 \leq Q^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(\mathbf{w})|^2}{N(\mathbf{w})} d\mathbf{f}$$

Si è ottenuto un risultato molto interessante: il rapporto segnale-rumore ha un limite superiore che è *indipendente da H(s)*. In altri termini, possiamo affermare che passando un segnale S(ω) accompagnato da un rumore N(ω) in una qualunque rete lineare, la (10.10) è il massimo SNR realizzabile: SNR² non potrà mai superare l'integrale del rapporto tra la densità di energia del segnale e la densità di potenza del rumore.

Il massimo SNR viene ottenuto quando

$$(10.11) \quad H(j\mathbf{w}) = k' \frac{S^*(\mathbf{w})}{N(\mathbf{w})} e^{-j\mathbf{w}t_m}$$

La soluzione nel dominio del tempo, per antitrasformazione, richiede la conoscenza delle caratteristiche spettrali del noise. Tale soluzione diventa particolarmente semplice nel caso che il rumore sia bianco, cioè N(ω)=W. Allora

$$(10.12) \quad H(j\mathbf{w}) = \frac{k'}{W} S^*(\mathbf{w}) e^{-j\mathbf{w}t_m}$$

da cui

$$(10.13) \quad h(t) = \frac{k'}{W} s(-t) * d(t - t_m)$$

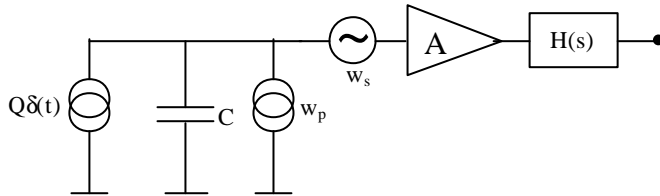


Fig. 10.1

e infine

$$(10.14) \quad h(t) = Ks(t_m - t)$$

con K costante arbitraria. Quindi, la risposta alla delta del filtro ottimo ha una forma che è l'immagine speculare del

segnale su cui si deve fare la misura. Questo filtro risulta quindi "adattato" al segnale (matched filter).

È chiaro che, affinché il filtro possa essere sintetizzato, occorre che $s(t)$ sia una funzione nota.

Si osservi anche che, nel caso del rumore bianco, si ha dalla (10.10), col teorema di Parseval

$$(10.15) \quad SNR_{max}^2 = \frac{Q^2}{W} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 df = \frac{Q^2}{W} \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt$$

quindi, si può ottenere il max SNR solo utilizzando tutta l'energia del segnale, cioè tutta l'informazione che esso trasporta. Pertanto, il momento migliore per fare la misura è quando il segnale all'uscita dell'amplificatore finisce: allora il segnale di uscita dal filtro avrà la massima ampiezza (integrale di una quantità positiva).

Un'ultima osservazione è anche interessante. Poniamo per semplicità nella (10.14) $K=1$ e $t_m=0$. Se indichiamo con $x(t) = v_0(t) + v_n(t)$ il segnale totale all'uscita dell'amplificatore, la risposta all'uscita del filtro ottimo sarà

$$y(t) = x(t) * h(-t) = C_{xs}(t)$$

Possiamo cioè affermare che il filtro che, posto all'uscita di un apparato, massimizza il rapporto segnale-rumore è quello che effettua la correlazione incrociata fra il segnale *ricevuto* $x(t)$ (all'uscita dell'apparato) ed il segnale *trasmesso* $s(t)$ (all'ingresso dell'apparato).

10.2 IL FILTRO OTTIMO NEL CASO DEI RIVELATORI DI PARTICELLE

La Fig. 10.1 mostra il modello ormai familiare del rivelatore e del front-end, e sono indicate le sorgenti del rumore. Per semplicità, supponiamo che si abbia un amplificatore di tensione con resistenza di entrata infinita e con banda passante infinita.

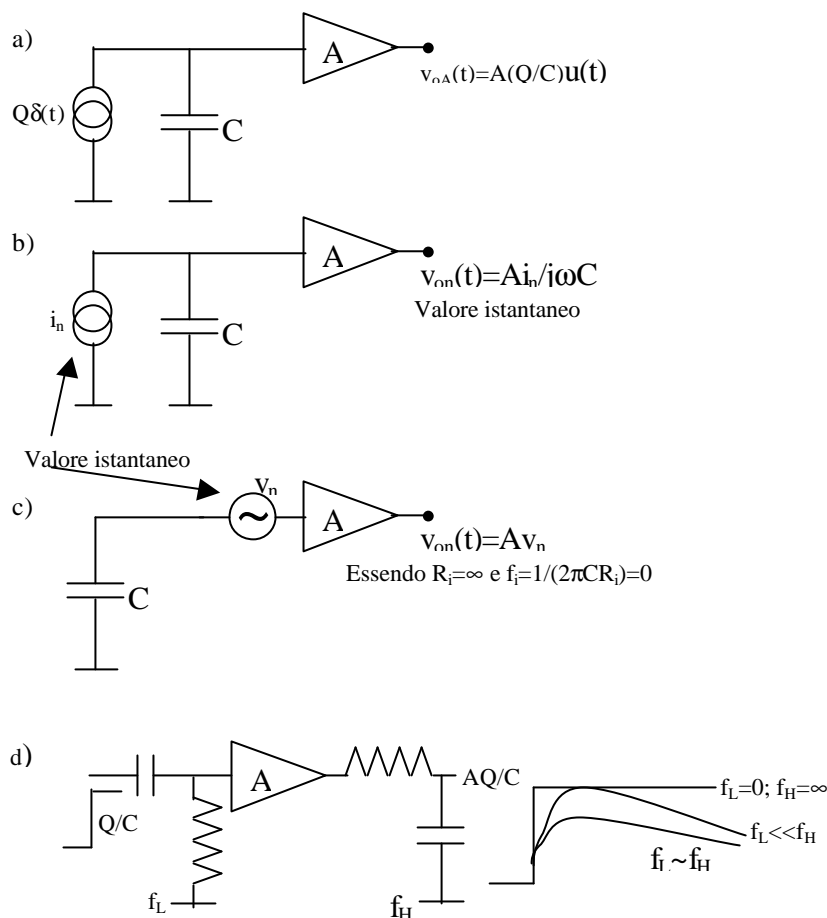


Fig. 10.2

Le Fig. 10.2a,b,c permettono di calcolare, col principio di sovrapposizione, i contributi dei singoli generatori al segnale di uscita dall'amplificatore. La densità spettrale del rumore si ottiene calcolando dapprima il valore istantaneo dell'uscita; successivamente si calcola il valore q.m. e lo si differenzia; infine si divide per df ottenendo la densità.

Il contributo del rumore $1/f$ è assunto trascurabile, per non appesantire i calcoli.

La Fig. 10.2a dà il segnale di uscita. In Fig. 10.2d viene anche indicato come cambierebbe l'ampiezza del segnale se la banda passante non fosse infinita; una misura corretta di Q richiede comunque che sia $f_H \gg f_L$.

Il segnale all'uscita dell'amplificatore è

$$v_o(t) = (QA/C)u(t) \Leftrightarrow QA/sC$$

La densità del rumore all'uscita dell'amplificatore è, con la (8.43) [in questo caso, per il rumore serie è $H_1(s) = A$; per quello parallelo è $H_1(s) = A/sC$]

$$(10.16) \quad N(\omega) = A^2 \left(w_s + \frac{w_p}{\omega^2 C^2} \right)$$

che non è bianco; quindi non è possibile utilizzare il filtro ottimo (10.14).

Il problema viene risolto facendo passare dapprima segnale e rumore in un *filtro di imbianchimento del rumore*; una volta ottenuto il rumore bianco, si può sintetizzare il filtro ottimo nella forma (10.14). La sintesi del whitening filter avviene come segue.

Detto $S_{yy}(\omega) = W$ il valore costante della densità che si vuole in uscita, la funzione di trasferimento $H_w(s)$ di tale filtro deve essere tale che

$$(10.17) \quad W = N(\omega) |H_w(j\omega)|^2$$

Allora

$$(10.18) \quad |H_w(j\omega)|^2 = H_w(j\omega) H_w^*(j\omega) = \frac{W}{N(\omega)} = \frac{W\omega^2 C^2}{A^2(w_p + w_s\omega^2 C^2)}$$

da cui

$$(10.19) \quad H_w(j\omega) = \frac{j\omega C \sqrt{W}}{A(\sqrt{w_p} + j\omega C \sqrt{w_s})} = \frac{\sqrt{W}}{A\sqrt{w_s}} \frac{j\omega C \sqrt{\frac{w_s}{w_p}}}{\left(1 + j\omega C \sqrt{\frac{w_s}{w_p}}\right)} = G \frac{j\omega\tau_c}{1 + j\omega\tau_c}$$

$$(10.20) \quad H_w^*(j\omega) = -G \frac{j\omega\tau_c}{1 - j\omega\tau_c}$$

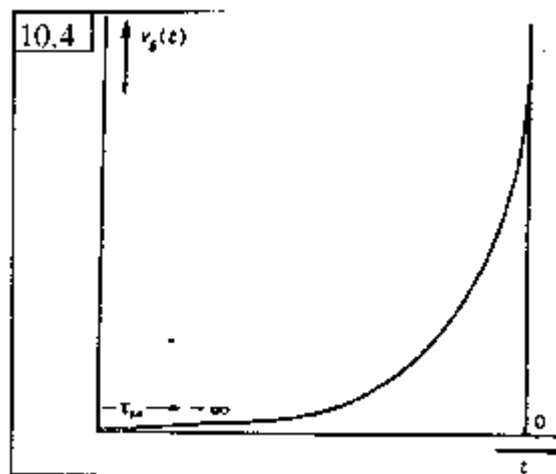
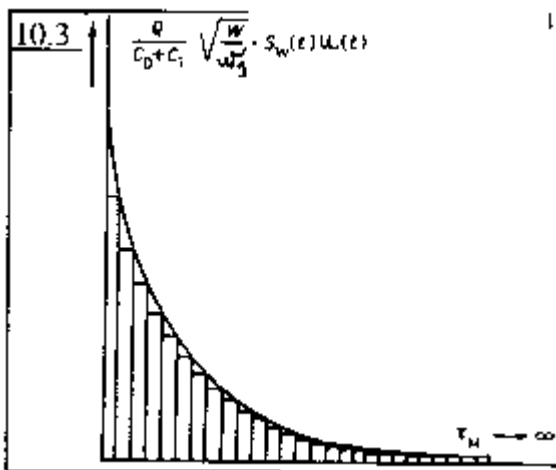
Scegliamo la prima soluzione, che qui riscriviamo:

$$(10.21) \quad H_w(s) = G \frac{s\tau_c}{1 + s\tau_c}$$

Pertanto, il filtro di imbianchimento è costituito da un amplificatore (ideale) di guadagno

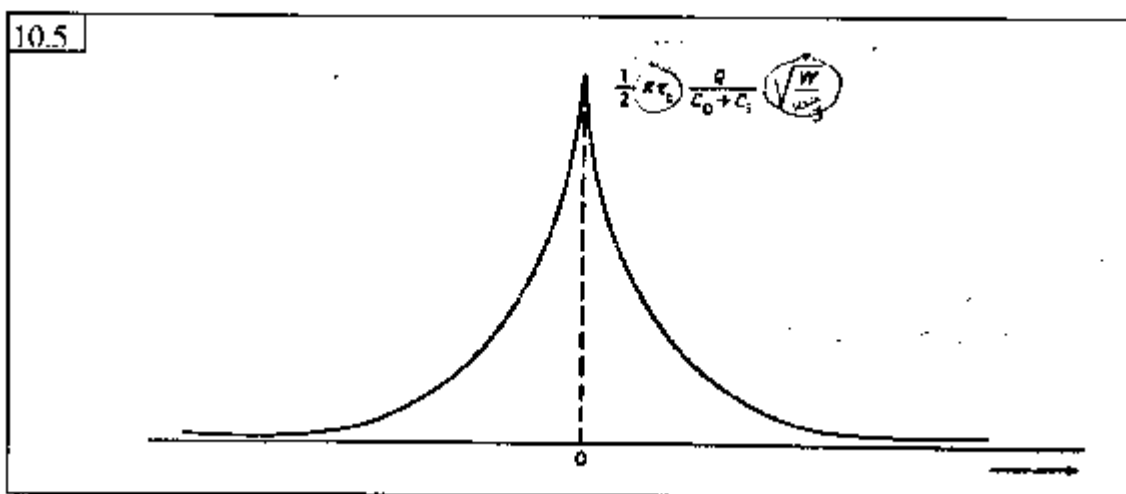
$$(10.22) \quad G = \frac{1}{A} \sqrt{\frac{W}{W_s}}$$

seguito da un derivatore RC di costante di tempo



$$(10.23) \quad t_c = C \sqrt{\frac{W_s}{W_p}}$$

costante di tempo del rumore. Dalla (10.16) si ha un interessante significato fisico per τ_c : per $\omega = \omega_c = 1/\tau_c$, la densità del rumore parallelo all'uscita dell'amplificatore è uguale a quella del rumore serie.



All'uscita del filtro di imbianchimento, il noise ha densità costante W ; ma il segnale, che ha attraversato lo stesso filtro, ha cambiato forma, diventando, **Fig. 10.3**

$$(10.24) \quad V_w(s) = V_o(s)H_w(s) = \frac{Q}{C} \sqrt{\frac{W}{w_s}} \frac{1}{s + 1/t_c} \Leftrightarrow v_w(t) = \frac{Q}{C} \sqrt{\frac{W}{w_s}} e^{-\frac{t}{t_c}} u(t)$$

Possiamo ora sintetizzare il filtro ottimo. Per quanto detto a proposito della (10.15), il max SNR si ha utilizzando tutta l'informazione trasportata dal segnale; quindi, il momento t_m della misura è all'infinito. La risposta impulsiva del filtro cercato è, con la (10.14)

$$(10.25) \quad h(t) = Ke^{\frac{t}{t_c}} u(-t) \quad K \text{ arbitr.}$$

mostrata in **Fig. 10.4**, ove si è supposta l'eccitazione applicata a $t = -\infty$.

La risposta del processor totale (amplificatore+whitening filter+shaper ottimo) è la convoluzione di (10.25) con (10.24):

$$(10.26) \quad v_{opt}(t) = \frac{KQ}{C} \sqrt{\frac{W}{w_s}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{q}{t_c}} u(q) e^{\frac{t-q}{t_c}} u(t+q) dq$$

mostrata in **Fig. 10.5**: si tratta di una cuspidine indefinita.

Il valore della risposta al momento della misura ($t_m=0$, in Fig. 10.5) è

$$(10.27) \quad v_{opt,max} = \frac{KQ}{C} \sqrt{\frac{W}{w_s}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2q}{t_c}} dq = \frac{1}{2} \frac{KQ}{C} \sqrt{\frac{W}{w_s}} t_c$$

La tensione efficace del rumore di uscita è

$$(10.28) \quad \sqrt{\langle v_n^2 \rangle} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} W |H(j\omega)|^2 df \right]^{\frac{1}{2}}$$

e facendo uso del teorema di Parseval

$$(10.29) \quad = \left[W \int_{-\infty}^{\infty} K^2 e^{\frac{2t}{t_c}} dt \right]^{\frac{1}{2}} = K \left[\frac{1}{2} t_c W \right]^{\frac{1}{2}}$$

Pertanto, il rapporto segnale-rumore ottimo è

$$(10.30) \quad SNR_{opt} = \frac{Q}{\sqrt{C}} \frac{1}{\sqrt[4]{4w_s w_p}}$$

Naturalmente, lo stesso risultato è ottenibile partendo dalla (10.15), con la sostituzione

$$(10.31) \quad Q \rightarrow \frac{Q}{C} \sqrt{\frac{W}{w_s}}$$

La carica equivalente di rumore ottima è immediatamente ricavabile dalla (10.30) imponendo $SNR=1$, come da definizione

$$(10.32) \quad ENC_{opt} = \sqrt{C} \sqrt[4]{4w_s w_p}$$

Con semplici operazioni, si può anche scrivere

$$(10.33) \quad ENC_{opt} = 2C \sqrt{\frac{kTR_s}{t_c}}$$

essendo R_s la resistenza equivalente del rumore serie.

10.3 USO PARZIALE DELL'INFORMAZIONE DISPONIBILE ALL'USCITA DEL FILTRO DI IMBIANCHIMENTO

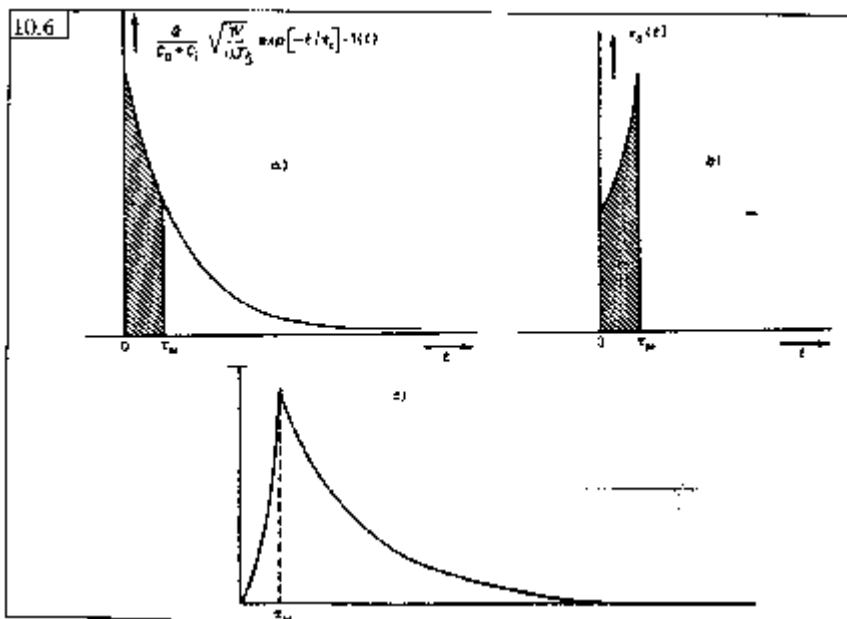
Il risultato ottimo espresso dalla (10.30) si riferisce al caso che tutta l'informazione del segnale disponibile all'uscita del filtro di imbianchimento sia utilizzata, in accordo con la (10.15). Questo implica che il momento della misura t_m all'uscita del filtro ottimo (picco della cuspidi) è ritardato di un tempo infinito rispetto all'eccitazione.

Se si vuole che t_m sia finito, solo una parte dell'informazione trasportata dal segnale può essere utilizzata, **Fig. 10.6a**.

Allora, la risposta del filtro ottimo deve essere come in **Fig. 10.6b**, e la risposta dell'intero sistema all'impulso di corrente proveniente dal rivelatore, cioè la convoluzione della Fig. 10.3 con la Fig. 10.6b, è mostrata in **Fig. 10.6c**; si tratta di una cuspidi troncata.

Il nuovo rapporto segnale-rumore può essere ottenuto dalle (10.15) e (10.31) limitando l'integrazione tra 0 e t_m . Si ha

$$(10.34) \quad SNR = \frac{Q}{C} \frac{1}{\sqrt{W_s}} \left[\int_0^{t_m} e^{-\frac{2t}{\tau_c}} dt \right]^{\frac{1}{2}} = SNR_{opt} \left[1 - e^{-\frac{2t_m}{\tau_c}} \right]^{\frac{1}{2}}$$



Il peggioramento rispetto al caso ottimo non è drammatico: se, per es., è $t_m = \tau_c$ si ha

$$(10.35) \quad SNR = 0.92 SNR_{opt}$$

Estendere t_m da τ_c all'infinito farebbe guadagnare solo l'8%.

10.4 TEORIA DEL FILTRO OTTIMO NEL CASO DI UN RATE FINITO DI ARRIVO DEGLI EVENTI SUL RIVELATORE.

La teoria del filtro ottimo per la misura dell'ampiezza di un impulso con minima varianza è stata sviluppata nei paragrafi precedenti senza nessun vincolo sulla durata dell'impulso di uscita. Se si vuole il massimo rapporto segnale-rumore, la risposta del filtro ha la forma di una cuspidine indefinita e il momento della misura t_m (quando si ha il massimo della cuspidine) è all'infinito, il che rende fisicamente irrealizzabile la misura.

Se si impone il vincolo di poter fare la misura a un tempo finito, la risposta ha la forma di una cuspidine troncata, ma la sua durata è pur sempre infinita. In questo secondo caso è possibile utilizzare l'apparato per fare la misura su un solo evento: infatti nel caso di eventi multipli i picchi delle cuspidine degli eventi successivi al primo si sovrapporrebbero sulle code delle cuspidine precedenti, con conseguente errore nella misura di ampiezza (pile-up).

Nel caso di eventi multipli occorre evidentemente aggiungere un ulteriore vincolo sulla durata dell'impulso all'uscita dello shaper, la quale deve essere finita per evitare l'errore di pile-up.

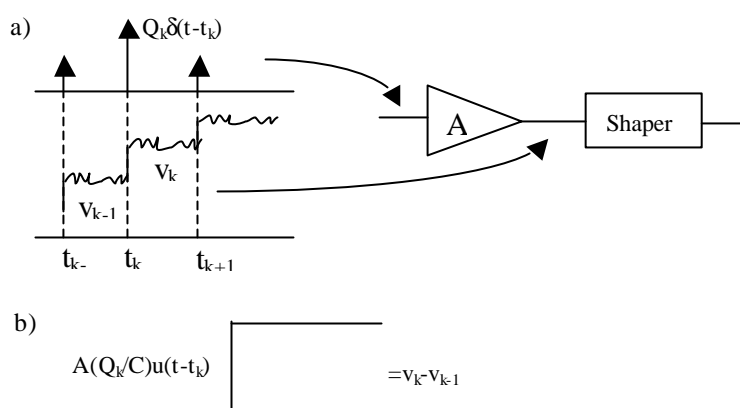


Fig. 10.7

Il problema della misura ottima viene ora riformulato assumendo che gli eventi che attraversano il rivelatore si succedano a caso nel tempo con un rate finito λ , secondo la statistica di Poisson. La **Fig. 10.7** illustra la situazione all'uscita del preamplificatore. La scalinata stocastica rappresenta l'effetto della sovrapposizione casuale di scalini dovuti ai singoli impulsi di corrente del rivelatore.

Per trattare questo problema, facciamo l'ipotesi semplificativa che

Per trattare questo problema, facciamo l'ipotesi semplificativa che

$$(10.36) \quad t_m \ll \tau_c$$

Questa ipotesi è frequentemente verificata in fisica delle particelle elementari. Allora, dalla Fig. 9.36 appare che *il rumore parallelo è trascurabile rispetto al rumore serie*, cioè si può porre $w_p = 0$. Dalla (10.16), in assenza di rumore parallelo la densità spettrale del rumore all'uscita del preamplificatore vale $A^2 w_s$, ed è bianca. Pertanto non c'è bisogno di filtro di imbianchimento.

Il problema è ora quello di misurare la carica Q_k associata all'evento che si verifica al tempo t_k ; occorre quindi stimare l'altezza dello scalino

$$(10.37) \quad (Q_k A/C)u(t-t_k)$$

in presenza di rumore bianco.

Poiché questo evento non è l'unico, ma è preceduto e seguito da altri eventi, dalla Fig. 10.7 appare che per stimare l'altezza dello scalino in oggetto occorre stimare la differenza

$$(10.38) \quad v_k - v_{k-1}$$

cioè lo scalino di altezza v_{k-1} è la "linea di base" dello scalino oggetto della misura.

Questo è equivalente a:

- stimare dapprima uno scalino di altezza $-v_{k-1}$ avendo a disposizione un tempo $t_k - t_{k-1}$, **Fig. 10.8a**;
- stimare poi uno scalino di altezza v_k avendo a disposizione un tempo $t_{k+1} - t_k$, **Fig. 10.8b**;
- fare la somma algebrica delle due stime.

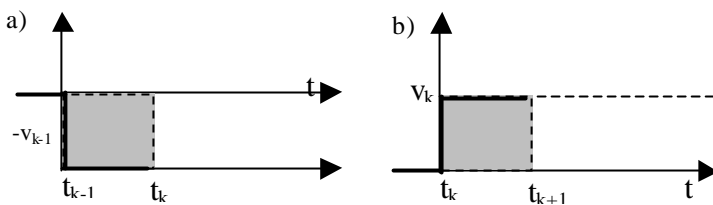


Fig. 10.8

Poiché le due stime vanno effettuate in intervalli di tempo successivi, si può sintetizzare un unico filtro che nell'intervallo (t_{k-1}, t_k) stima $-v_{k-1}$, e nel successivo intervallo (t_k, t_{k+1}) stima v_k .

La differenza può essere ottenuta riferendo la stima di v_k alla linea di base $-v_{k-1}$, ricavata dalla stima precedente.

Dalla Fig. 10.8 appare che il segnale totale da stimare è quello tratteggiato in **Fig. 10.9**.

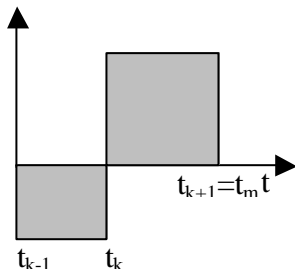


Fig. 10.9

Operativamente, questo filtro deve funzionare come segue: assunta = 0 Volt la tensione all'uscita del filtro all'istante t_{k-1} (linea di base), il filtro comincia a stimare lo scalino di altezza $-v_{k-1}$ (fase 1 in **Fig. 10.10**). Pertanto, la stima di $-v_{k-1}$ è riferita alla linea di base 0 Volt (massa). All'istante t_k la tensione all'uscita del filtro sarà $-v_{k-1}$ (o meglio, la migliore approssimazione di questo valore che il filtro è riuscito a calcolare nel tempo a disposizione) rispetto alla linea di base da cui la stima è iniziata, cioè 0 volt. A questo punto, cioè partendo da una linea di base $-v_{k-1}$, il filtro inizia a stimare lo scalino v_k (fase

filtro sarà $-v_{k-1}$ (o meglio, la migliore

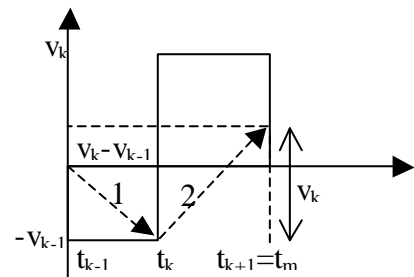


Fig. 10.10

2 in Fig. 10.10). All'istante $t_{k+1}=t_m$, l'uscita del filtro sarà alla tensione v_k rispetto alla linea di base da cui la stima è partita, e quindi in definitiva alla tensione $v_k - v_{k-1}$ rispetto a massa. Il processo è rappresentato simbolicamente dalla linea tratteggiata in Fig. 10.10.

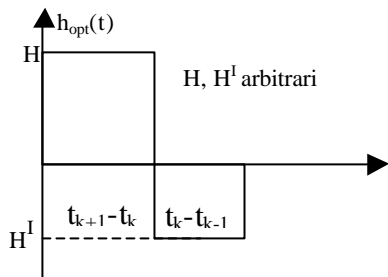


Fig. 10.11

Essendo il rumore bianco, la risposta impulsiva del filtro ottimo è quella rappresentata in **Fig. 10.11**.

E' necessario normalizzare la pesiera $h(t)$ ponendo

$$(10.39) \quad H=1/(t_{k+1}-t_k) \quad H'=1/(t_k-t_{k-1})$$

In questo modo, la linea di base del segnale viene ripristinata a zero. Quando all'istante t_k all'ingresso di questo filtro arriva lo scalino dovuto a Q_k , la risposta del filtro sarà, per convoluzione, quella rappresentata in **Fig. 10.12**.

Poiché il rumore presente è solo di tipo serie e lo shaping è triangolare, la ENC è data dalla (9.104). Questa è stata in realtà scritta per il caso di un triangolo isoscele; nel caso di un triangolo

qualunque, la relazione si scriverà più in generale

$$(10.40) \quad ENC_s^2 = 2kTR_s C^2 (1/t_1 + 1/t_2)$$

come è facile dedurre dalla Fig. 9.34.

Nel nostro caso

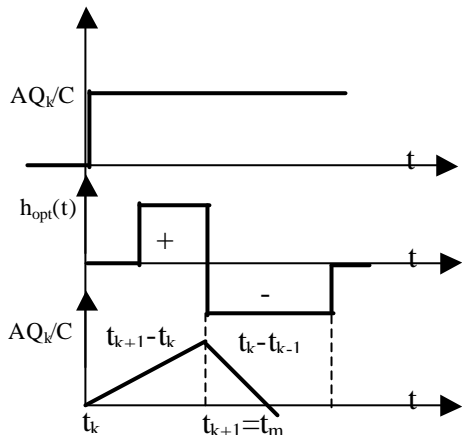


Fig. 10.12

$$(10.41) \quad t_1 = t_{k+1} - t_k$$

$$t_2 = t_k - t_{k-1}$$

Si noti che la sintesi del filtro dipende dalla conoscenza della lunghezza degli intervalli di tempo disponibili per la misura *prima e dopo* l'evento da processare: esso appare quindi non fisicamente realizzabile, non essendo noti in anticipo i tempi di arrivo dei singoli eventi. Inoltre, il filtro ora ricavato è stato adattato alla misura di Q_k , e non è ottimizzato per la misura della carica trasportata dagli altri eventi.

Idealmente [12], si potrebbe sintetizzare preliminarmente un filtro adattato a ciascuna "tipologia" di eventi e, se si conoscesse in anticipo il momento di arrivo dei singoli eventi, si potrebbe attivare il filtro opportuno secondo la logica descritta in

Fig. 10.13. In questa figura si suppone che subito dopo aver effettuato la misura su un evento (picco del triangolo) lo switch viene commutato sull'uscita del filtro relativo all'evento successivo. La **Fig. 10.14** mostra gli impulsi di uscita dai singoli filtri e la sequenza degli impulsi di uscita nell'ipotesi ideale che

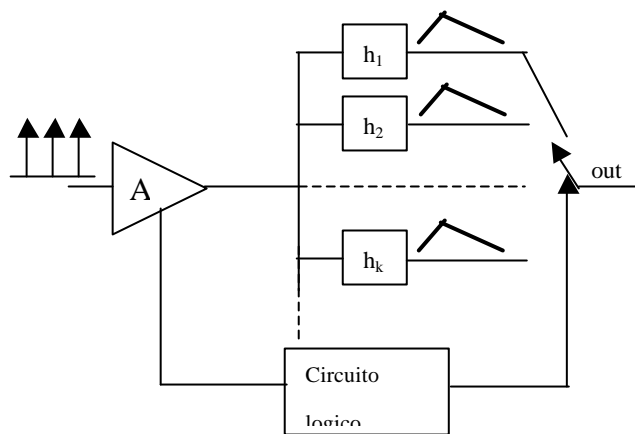


Fig. 10.13

lo switch venga commutato istantaneamente dopo ciascun t_m : si noti che non c'è pile-up al momento della misura. Pertanto, un sample-and-hold potrebbe memorizzare correttamente il valore da misura-

re, per mandarlo quindi ad un ADC.

L'apparato complessivo descritto in Fig. 10.7 è un *filtro time-variant*.

Come si è già detto, non essendo noti in anticipo i tempi di arrivo dei singoli eventi, lo schema di Fig. 10.13 non è fisicamente realizzabile. In pratica, il problema viene risolto in maniera sub-ottima sintetizzando un unico filtro, che per comodità conviene fare a risposta simmetrica di durata $2t_m$ (triangolo isoscele), **Fig. 10.15**, scegliendo t_m sulla base della stima preliminare del rate λ degli eventi (che è

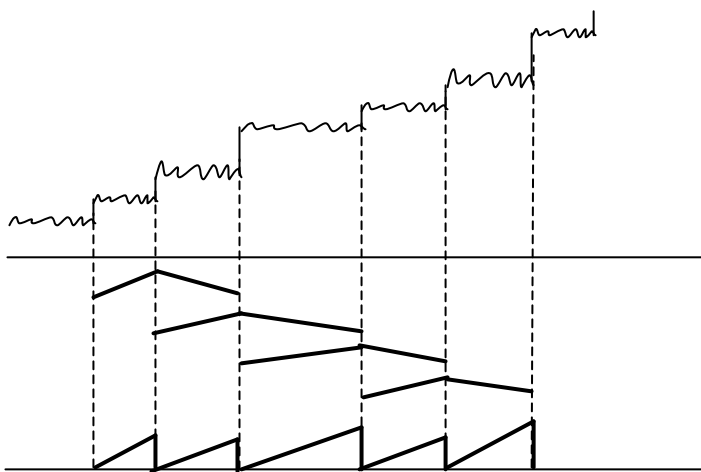


Fig. 10.14

sempre possibile avere) in modo da ridurre la probabilità del pile-up al di sotto di un valore prestabilito.

Infatti, noto il rate λ degli eventi, dalla statistica di Poisson si può calcolare la probabilità che due eventi si verifichino entro il tempo di risoluzione t_m :

$$(10.42)$$

$$P[2, t_m] = \frac{(\lambda t_m)^2}{2!} e^{-\lambda t_m}$$

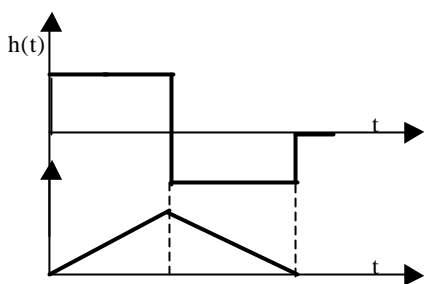


Figura 10.15

Naturalmente, riducendo t_m si riduce la probabilità di pile-up ma aumenta il rumore serie, vedi Fig. 9.36, e quindi peggiora SNR.

Nel caso più generale [12] in cui non è possibile trascurare il rumore

parallelo, e occorre quindi usare il filtro ~~parallelo binoculare~~ ~~si può desiderare~~ (il resto è intuitivo per quanto detto finora) che lo shaping ottimo è una cuspidè troncata di durata finita, **Fig. 10.16**.

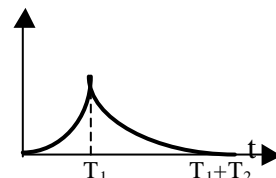


Fig. 10.16

L'ENC risulta in questo caso:

$$(10.43) \quad ENC = ENC_{opt} \sqrt{\frac{1 - \exp(-2(T_1 + T_2)/t_c)}{(1 - \exp(-2T_1/t_c))(1 - \exp(-2T_2/t_c))}}$$

T_1 e T_2 sono definiti in Fig. 10.16.

Bibliografia

- [1] M.J. Buckingham, Noise in electronic devices and systems. J. Wiley, 1983.
- [2] V. Radeka, Low-noise techniques in detectors. In 'Annual Rev. of Nucl. Partic. Science, 1988, pag. 217-277.
- [3] E. Gatti, P. Manfredi, Processing the signals from solid-state detectors in elementary-particle physics. La Rivista del Nuovo Cimento, vol. 9, 1986.