

CAPITOLO 9

IL RUMORE ED IL SISTEMA DI MISURA

9.1 - INTRODUZIONE

In fisica nucleare, l'elemento chiave di un sistema di misura è costituito da un rivelatore di radiazione ionizzante, il quale è un trasduttore che genera un segnale elettrico che costituisce il *messaggio* che trasporta l'informazione sul fenomeno fisico (interazione della radiazione con la materia) che è avvenuto all'interno del rivelatore stesso.

L'informazione viene ricavata misurando un parametro del segnale; tale parametro è la *tensione*, v_i , oppure la *corrente*, i_i , oppure la *carica*, q_i , oppure infine il *tempo* t in cui appare il segnale rispetto ad una certa origine.

Il segnale è generalmente molto debole, per cui risulta impossibile una misura del parametro direttamente all'uscita del rivelatore ed è necessario un preamplificatore posto immediatamente a valle del rivelatore stesso.

La pratica di laboratorio dimostra che all'uscita del preamplificatore il segnale è sempre accompagnato da un *rumore*, che rende problematica la misura del parametro. Pertanto, è necessario far seguire al preamplificatore un *filtro* $H(s)$ che ha lo scopo di ridurre il rumore. Questo filtro modifica sia lo spettro del rumore che quello del segnale: se $s(t)$ è la forma del segnale prima del filtro, la forma all'uscita sarà $s'(t) \neq s(t)$. Per analogia, la rete di filtraggio viene chiamata rete di formazione, o di *shaping*, del segnale. Nel successivo capitolo studieremo il problema dello *shaping* (o del filtro) ottimo. Il sistema preamplificatore + shaper è chiamato usualmente sistema di front-end.

Per effettuare la misura, il segnale amplificato e filtrato viene generalmente processato con elettronica commerciale. Questa elettronica (disponibile sotto forma di moduli funzionali costruiti secondo certi

standard, per es. NIM, CAMAC, ...) accetta segnali di tensione su una impedenza di 50 ohm, che è l'impedenza caratteristica dei cavi coassiali con i quali si fanno le interconnessioni. Pertanto, il segnale di uscita dal front-end è sempre una tensione, v_o .

Se il parametro da misurare è la tensione del segnale primario, v_i , si parla di *preamplificatore sensibile alla tensione* (o semplicemente preamplificatore di tensione); negli altri due casi si parla rispettivamente di *preamplificatore sensibile alla corrente* e di *preamplificatore sensibile alla carica*.

Il guadagno G del front-end sarà nel primo caso un *guadagno di tensione*, v_o/v_i , (adimensionale); nel secondo caso sarà un *guadagno di transresistenza*, v_o/i_i ; nel terzo caso sarà una *sensibilità alla carica*, v_o/q_i (espresso tipicamente in mV/femtocoulomb, oppure in $\mu\text{V}/\text{elettrone}$)

La **Fig. 9.1** mostra lo schema generale di un apparato di misura.

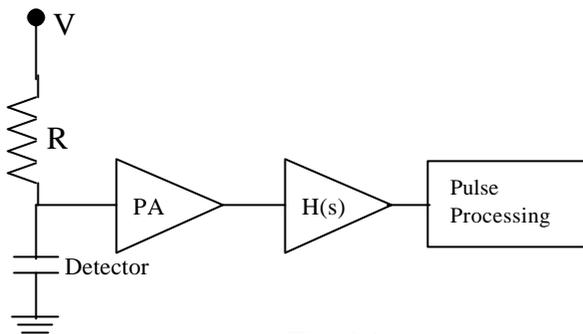


Fig. 9.1

In senso lato, per rumore si intende un disturbo che interferisce con il segnale desiderato. Tale disturbo può essere di origine esterna all'apparato sperimentale, ed è dovuto in tal caso ad un accoppiamento elettrostatico o elettromagnetico dell'apparato con apparecchiature esterne che

irradiano il disturbo stesso; oppure può essere di origine intrinseca all'apparato stesso.

La **Fig. 9.2** mostra schematicamente ciò che si potrebbe osservare con un analizzatore di spettro all'uscita di un amplificatore con banda passante

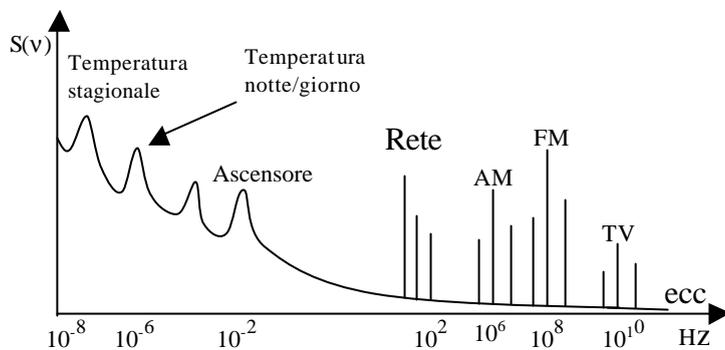


Fig. 9.2

ideale da 0 a ∞ .

I picchi sovrapposti sulla linea di base rappresentano i possibili disturbi generati da sorgenti esterne (*rumore ambientale*). Si noterà che questi disturbi sono in generale dovuti all'azione dell'uomo e quindi, almeno in linea di principio, sono eliminabili o sopprimendo la sorgente o con adeguata schermatura.

Una componente del rumore intrinseco è generata dai componenti con cui è costruita l'elettronica (*rumore elettronico*). In Fig. 9.2 la sua densità spettrale è rappresentata dalla linea di base sottostante ai picchi. Questo rumore, che è di natura random, è in gran parte ineliminabile, ma è possibile intervenire sull'apparato in modo da minimizzarne gli effetti sulla misura. È del rumore elettronico che ci occuperemo nel seguito.

Esiste infine un rumore intrinseco legato alla statistica di formazione del segnale oggetto della misura

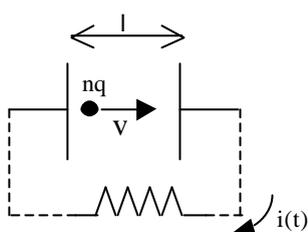


Fig. 9.3

(*rumore del segnale*): per es. in un rivelatore a gas il passaggio di una particella ionizzante provoca la ionizzazione di un certo numero di atomi del gas stesso, generando così una carica che si muove fra le armature del rivelatore.

Supponiamo, **Fig. 9.3**, che un cluster di n portatori di carica q si muova (sotto l'azione di una differenza di potenziale non mostrata in fig.) con velocità v percorrendo un mezzo di lunghezza l , delimitato da due elettrodi (rivelatore), dando luogo ad una corrente

$$(9.1) \quad i(t) = Q/t = nqv(t)/l$$

Una corrente di eguale intensità deve circolare nel circuito esterno che collega le armature: tale corrente costituisce il *segnale*. Ora, sia v che n non sono costanti, ma variano da evento a evento. Le fluttuazioni di v sono dovute agli urti delle cariche q con gli atomi del gas. Le fluttuazioni di n sono dovute alla statistica di ionizzazione. Entrambe le fluttuazioni sono dovute a leggi di natura, sulle quali l'uomo può intervenire solo marginalmente

La corrispondente fluttuazione di i è

$$(9.2) \quad \langle di^2 \rangle = (nq/l)^2 \langle dv^2 \rangle + (qv/l)^2 \langle dn^2 \rangle$$

assumendo le fluttuazioni di v e n incorrelate.

Pertanto, anche se le particelle fossero rigorosamente identiche, il segnale ad esse associato fluttuerebbe casualmente da particella a particella. In definitiva, il rumore del segnale è da considerare ineliminabile ed i suoi effetti vanno subiti. In conclusione, nella fisica delle particelle elementari, il valore del parametro da misurare *cambia da segnale a segnale* e l'effetto del rumore va valutato *sulla singola misura*.

Nel capitolo 12 studieremo il caso in cui il valore del parametro non cambia da segnale a segnale.

9.2 - EFFETTI DEL RUMORE SULLA MISURA DI AMPIEZZA. SNR ED ENC.

Immaginiamo di inviare N volte in un sistema rumoroso h(t) un segnale impulsivo (di tensione, per fissare le idee) di ampiezza v_i(t_m) rigorosamente costante (t_m è l'istante in cui si effettua la misura di ampiezza, e di norma corrisponde al picco del segnale). Supponiamo il rumore indipendente dal segnale, cioè di tipo additivo. Il segnale di uscita v_o(t_m) sarà una variabile aleatoria data dalla somma del contributo (deterministico) dovuto al segnale originale

$$(9.3) \quad v_{os}(t_m) = [v_i(t) * h(t)]_{t=t_m}$$

più la tensione (casuale) di rumore a t_m, v_{on}(t_m); quindi

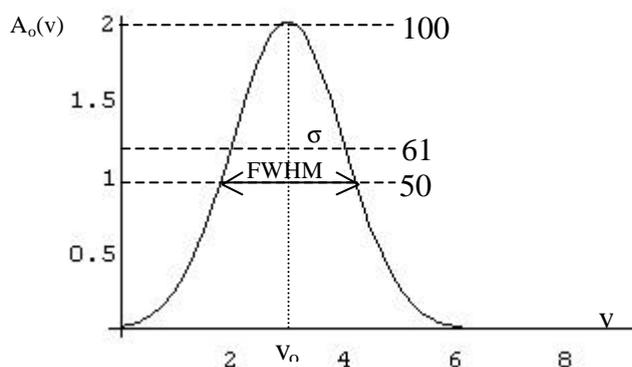


Fig. 9.4

$$(9.4) \quad v_o(t_m) = v_{os}(t_m) + v_{on}(t_m)$$

Mentre la distribuzione di ampiezza A_i(v) del segnale di entrata è una riga in v=v_i, rappresentabile come Nδ(v-v_i), quella del segnale di uscita A_o(v) dipende dalla distribuzione di ampiezza del rumore, precisamente dalla densità di probabilità di am-

piezza del rumore stesso, p_n(v):

$$(9.5) \quad A_o(v) = Np_n(v-v_i)$$

che è la convoluzione della distribuzione di entrata con la p_n(v). Come più volte ricordato, la distribuzione di ampiezza del rumore risulta essere gaussiana, come appare anche dalla osservazione oscillografica, **Fig. 9.10**.

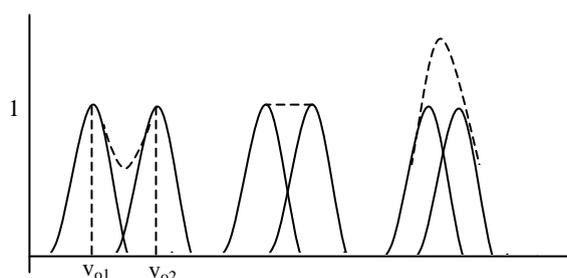


Figura 9.5

La **Fig. 9.4** mostra l'allargamento corrispondente della riga spettrale. La larghezza della riga determina la *risoluzione* dell'apparato, cioè la minima

differenza distinguibile tra le ampiezze dei segnali di entrata. Infatti, se all'ingresso del sistema $h(t)$ si inviano due serie di impulsi, una con ampiezza v_{i1} e l'altra con ampiezza v_{i2} di poco differenti, in uscita le due distribuzioni si sovrappongono, come mostrato in **Fig. 9.5**, e i due eventi saranno identificabili solo se i picchi delle due distribuzioni sono distinguibili. La Fig. 9.5 illustra la situazione in tre casi. Appare quindi naturale esprimere la risoluzione mediante la larghezza della riga a metà altezza (FWHM), che nel caso gaussiano è pari a 2.35σ , essendo σ la standard deviation, s.d.. È anche utile definire la larghezza a 1/10 dell'altezza, FWTM, che vale 4.29σ .

In definitiva, la misura dell'ampiezza del segnale di uscita all'istante t_m è *affetta da un errore* dovuto al rumore che, su una singola misura, vale

$$(9.6) \quad v_o(t_m) - v_{os}(t_m) = v_{on}(t_m)$$

e in media quadratica è uguale al valore quadratico medio del rumore

$$(9.7) \quad \langle v_{on}^2(t_m) \rangle = \langle v_{on}^2(t) \rangle$$

assumendo il processo stazionario. Poiché il rumore è a media nulla, questo valore q.m. coincide con la varianza, σ_o^2 .

Come fattore di merito della misura si può assumere il *rapporto segnale-rumore* (SNR) che è un numero adimensionale e può essere definito

$$(9.8) \quad \text{SNR}^2 = (\text{potenza del segnale})/(\text{potenza del rumore})$$

Più propriamente, SNR va definito al momento t_m in cui si effettua la misura sul segnale: allora, come potenza del segnale conviene scegliere la potenza istantanea. Se ci riferiamo all'uscita dell'apparato di misura, come già detto è preferibile che il segnale sia una tensione; si può scrivere

$$(9.9) \quad \text{SNR}_o^2(t_m) = \frac{v_{os}^2(t_m)}{\mathbf{s}_o^2}$$

e σ_o^2 è la tensione q.m. del rumore all'uscita: viene anche chiamata tensione di rumore integrato, poi-

ché la varianza è uno spettro di potenza integrato.

Si può anche definire

$$(9.10) \quad \text{SNR}_o(t_m) = v_{os}(t_m)/\sigma_o$$

essendo σ_o la tensione efficace del rumore di uscita, v_{eff} .

Si noti che il valore di SNR *dipende dal segnale*; nel caso della fisica delle alte energie tale segnale non è costante, per cui SNR non è utile come fattore di qualità del sistema di misura, che è invece più propriamente caratterizzato dalla varianza σ_o^2 (o dalla standard deviation) del noise che esso genera.

Si osservi che se $v_{os}(t_m) = \sigma_o$, cioè $\text{SNR}=1$, non c'è alcun modo di distinguere il segnale dal rumore, sulla base di una singola misura. Quindi, σ_o rappresenta il *minimo segnale di tensione di uscita misurabile*.

È preferibile riferire segnale e rumore all'ingresso del preamplificatore (cioè direttamente all'uscita del rivelatore) dividendo entrambi per il guadagno G . Il rapporto segnale-rumore di entrata sarà

$$(9.11) \quad \text{SNR}_i = \frac{v_{os}/G}{\sigma_o/G}$$

In fisica delle particelle elementari, il segnale fornito dal rivelatore, v_{os}/G , è in generale un impulso di corrente che conviene rappresentare come

$$(9.12) \quad i(t) = Qs(t)$$

essendo Q la carica del segnale e $s(t)$ la funzione di forma che descrive l'andamento temporale del segnale (dimensionalmente, in questo caso, è l'inverso di un tempo). In molti casi, l'impulso di corrente primario è molto breve, e si può assumere $s(t) \approx \delta(t)$. Pertanto, essendo nota la forma del segnale, la grandezza che resta da misurare è la carica Q ; diremo che il segnale di entrata al front-end è una carica. L'amplificatore di front-end sarà quindi del tipo sensibile alla carica, e dovrà dare una

tensione di uscita proporzionale all'integrale di $i(t)$

$$(9.13) \quad v_{os}(t) \propto \int i(t)$$

si comporterà cioè come un integratore, e G sarà la sua sensibilità alla carica.

Allora, il *rumore equivalente di entrata*

$$(9.14) \quad \sigma_i = \sigma_o/G$$

rappresenta il *minimo segnale di carica rivelabile* con l'apparato in uso, e si chiama *carica equivalente di rumore*, ENC. Possiamo anche dire che ENC è la carica che, iniettata all'ingresso dell'apparato (con la forma $Q\delta(t)$), dà luogo ad un segnale di uscita la cui ampiezza a t_m è pari a σ_o , cosicché $SNR = 1$.

Nei casi che interessano l'elettronica nucleare, ENC è un numero molto piccolo, per cui è usualmente espresso in numero di elettroni, oppure in femtocoulomb, fC (1 fC = 6250 elettroni).

In base alla (9.14), per misurare ENC occorre misurare la tensione efficace del rumore di uscita, σ_o , e la sensibilità alla carica G al momento della misura t_m . Per misurare G , occorre inviare all'ingresso un impulso di corrente $Q\delta(t)$, con Q noto, ottenendo in uscita

$$(9.15) \quad v_o(t_m) = Q\delta(t)*h(t) = Qh(t_m)$$

e dividere poi per Q , ottenendo infine $G = h(t_m)$. In definitiva

$$(9.16) \quad ENC = \sigma_o/h(t_m)$$

Illustriamo ora brevemente un semplice metodo per stimare l'ENC di un sistema $h(t)$. Poiché, come già detto, il rumore è gaussiano, se lo si osserva all'oscilloscopio (con una banda passante \gg di quella dell'amplificatore + shaper) e si ignorano i picchi rari del noise, l'ampiezza picco-picco restante è $\sim 6\sigma_o$: si può così avere una stima di σ_o . Quanto ad $h(t_m)$, se tramite un condensatore di piccola capacità C (tipicamente 1 pF) si invia all'ingresso dell'amplificatore (la cui impedenza di entrata è supposta trascurabile) un gradino di ampiezza V e con fronte molto ripido, si inietta nell'amplificatore

stesso una carica $Q=CV$, la cui forma approssima una delta, $Q\delta(t)$, tenuto conto della forte derivazione effettuata da C, **Fig. 9.6**. All'uscita del sistema si osserverà $Qh(t)$. Misurandone il valore

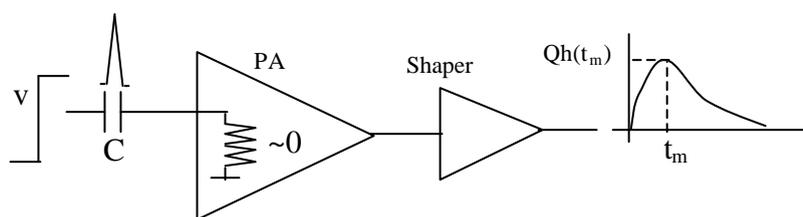


Fig. 9.6

all'istante t_m , cioè $Qh(t_m)$, e dividendolo per Q si avrà $h(t_m)$. Dalla (9.16) si ha ENC.

Una volta nota ENC, si ottiene

la risoluzione nella misura della carica

$$(9.17) \quad \text{FWHM} = 2.35\text{ENC} \quad \text{elettroni rms}$$

Quindi, due segnali la cui carica differisce di meno di FWHM elettroni sono indistinguibili.

Se indichiamo con ε l'energia media (in eV) che la radiazione ionizzante deve cedere al rivelatore per generare una coppia ione+elettrone, si può ottenere la risoluzione nella misura dell'energia rilasciata dalla radiazione ionizzante nel rivelatore

$$(9.18) \quad \text{FWHM} = 2.35\varepsilon\text{ENC} \quad \text{eV rms}$$

In un rivelatore al silicio, è $\varepsilon = 3.5$ eV, mentre in un rivelatore a gas ε è dell'ordine di 30 eV. I rivelatori al Si hanno oggi la migliore risoluzione in energia (in realtà, il Ge ha una ε ancora minore, circa 2.5 eV, ma la grande corrente inversa relega le applicazioni di questi rivelatori al caso di apparati di minime dimensioni, dove è possibile raffreddare il rivelatore a costi ragionevoli). Questi rivelatori sono inoltre molto compatti. Purtroppo, il loro costo è di gran lunga superiore a quello dei rivelatori a gas.

Citiamo, infine, un altro fattore di merito di un sistema, che si incontra talvolta: la *figura di rumore*. Questo è un numero adimensionale che esprime la variazione di SNR nel passare dall'ingresso all'uscita del sistema stesso:

$$(9.19) \quad \text{NF} = 10\log(\text{SNR}_i/\text{SNR}_o) \quad \text{db}$$

-9.10-

Se, per es., un sistema ha $NF = 3 \text{ db}$, ciò significa che $SNR_i = 2SNR_o$: il rumore aggiunto dal sistema peggiora di un fattore 2 il rapporto segnale-rumore.

Ci sono anche dei filtri che hanno NF negativa, cioè essi migliorano il rapporto segnale-rumore lasciando passare indenne il segnale e deprimendo il rumore.

9.3 -LO SHOT NOISE

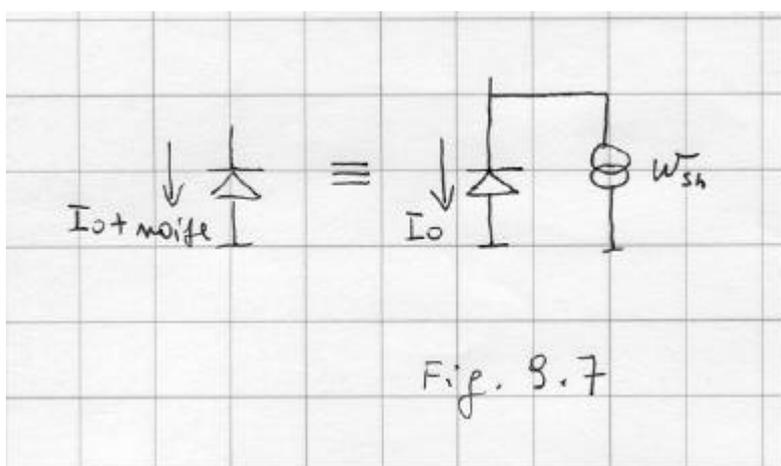
Consideriamo una giunzione pn polarizzata (direttamente o inversamente) con una tensione costante V_0 , che si trovi all'ingresso di un sistema $h(t)$. Tale giunzione potrebbe essere per es. una strip di un rivelatore al Si (che è polarizzato inversamente), connesso all'ingresso del sistema, oppure la giunzione base-emettitore del transistor di entrata dell'amplificatore, o entrambi come in Fig. 9.13. La corrente costante I_0 , che attraversa la giunzione, è data dalla ben nota relazione

$$(9.20) \quad I_0 = I_{INV} \left(e^{\frac{qV_0}{kT}} - 1 \right)$$

In realtà, misurando accuratamente I_0 istante per istante, si trova che essa non è costante. La ragione è la seguente. Possiamo intanto scrivere $I_0 = \Delta Q / \Delta t = nq / \Delta t$, essendo n il numero di portatori che attraversano la giunzione nel tempo Δt e q la carica di ciascuno di essi. Ora, poiché l'energia dei portatori è distribuita secondo la statistica di Boltzman, il numero n di portatori che supera la barriera nell'intervallo $(t, t+\Delta t)$, è variabile casualmente con t e di conseguenza la corrente I_0 subisce delle fluttuazioni che costituiscono un rumore, noto come *shot noise*.

Se al sistema $h(t)$ viene inviato un segnale di corrente $Q_s(t)$, a questo si sommerà lo shot noise e la misura della risposta sarà affetta da un errore.

Si noti che la presenza dello shot noise è legata alla presenza di una barriera di potenziale; cosicché, la corrente che attraversa un conduttore non è soggetta a shot noise.



Dal punto di vista dello shot noise, una giunzione rumorosa può essere modellata come una giunzione non rumorosa (attraversata da una corrente costante I_0) con in parallelo un generatore di corrente di opportuna densità spettrale, w_{ish} , (vedi fig. 9.7) che si vuole determinare e che tiene

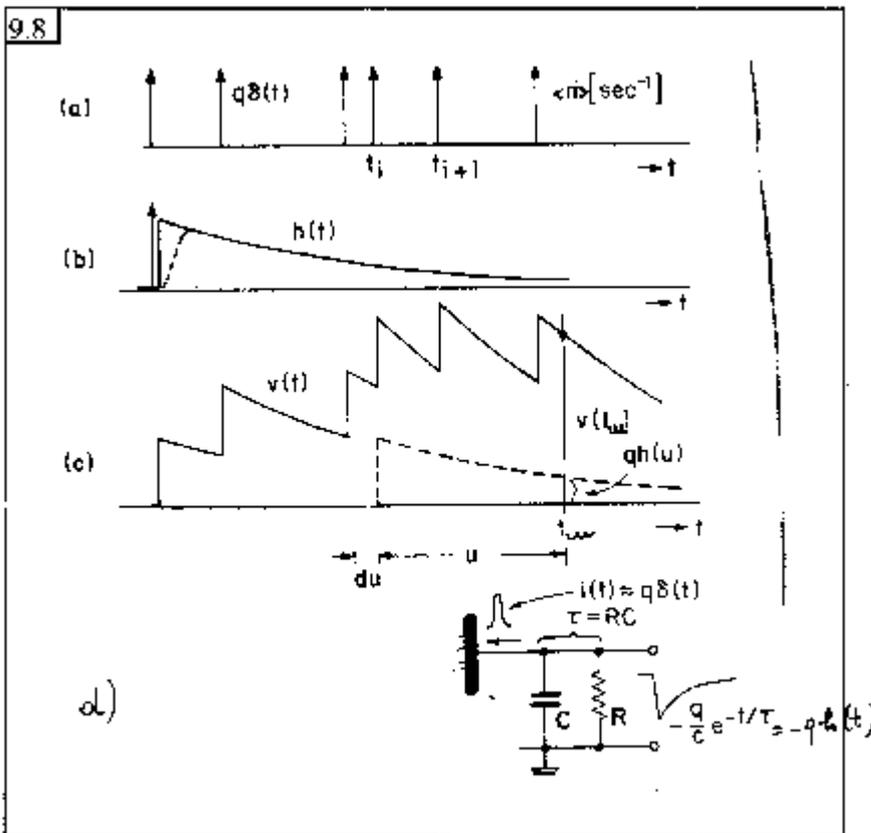
conto delle fluttuazioni.

La corrente I_0 è il risultato della sovrapposizione dei contributi di ciascuno dei portatori di carica che attraversa la barriera; poiché ognuno di tali portatori è indipendente dagli altri, la distribuzione temporale di tali contributi è data dalla statistica di Poisson:

$$(9.21) \quad p(m, \tau) = \frac{(\langle n \rangle \tau)^m}{m!} e^{-\langle n \rangle \tau}$$

essendo p la probabilità che m portatori superino la barriera nell'intervallo di tempo τ , e $\langle n \rangle$ il numero medio di portatori che attraversano la giunzione per unità di tempo (rate). Se inoltre approssimiamo l'impulso di corrente indotto da ciascun portatore con $q\delta(t)$, la corrente (diretta o inversa) che attraversa la giunzione può essere descritta da un processo impulsivo di Poisson (8.45)

$$I = \sum_k q\delta(t-t_k)$$



Il valor medio del processo è per la (6.38) $\langle I \rangle = \langle n \rangle q$, ed è la corrente che misura un tester in dc. Se la giunzione è polarizzata inversamente, sarà $\langle I \rangle = I_{INV}$; se la polarizzazione è diretta, sarà $\langle I \rangle = I_0$.

Poiché il processo è poissoniano, la densità spettrale bilaterale del processo è, per la (8.47) (trattandosi di una fluttuazione intorno ad una

corrente I_0 , tale densità è una corrente quadratica media per unità di intervallo di frequenza, vedi (8.15a):

$$(9.25) \quad S_{xx}(\omega) = \frac{di^2}{df} = \langle n \rangle q^2 = w_{ish} = q \langle I \rangle A^2 / Hz$$

Lo shot noise è quindi un rumore bianco. La densità unilaterale è ovviamente $2q\langle I \rangle$.

Il sistema $h(t)$ usato nella misura, risponderà a ciascun impulso del processo con il segnale di tensione $v_o(t) = qh(t)$.

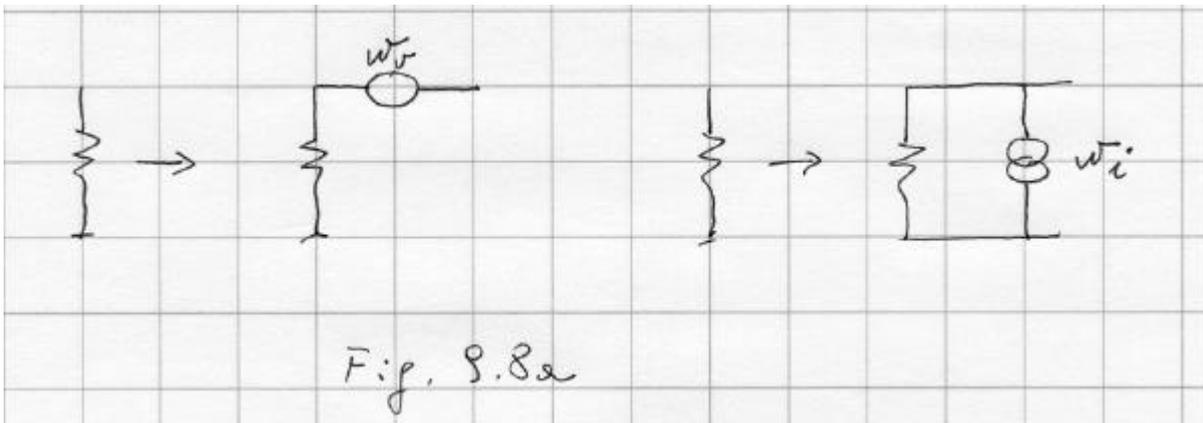
In **Fig. 9.8a** è mostrata la sequenza random degli impulsi di corrente di entrata. In **Fig. 9.8b** è mostrata la $h(t)$ del sistema, che per fissare le idee è stato supposto di tipo RC, Fig. 9.8d.

La **Fig. 9.8c** mostra che l'ampiezza della tensione di uscita a t_m è il risultato della sovrapposizione degli impulsi di corrente che sono entrati prima di t_m .

9.4 IL RUMORE TERMICO

Consideriamo un conduttore, di resistenza R, elettricamente neutro, non sottoposto a campo elettrico esterno e in equilibrio termico con l'ambiente circostante; esso è equipotenziale, quindi il valor medio della differenza di potenziale V tra due punti qualunque è 0. Il moto browniano dei portatori di carica liberi all'interno del conduttore fa sì che tale differenza di potenziale V, pur essendo mediamente nulla, sia istante per istante diversa da zero, fluttuando a caso. Questa fluttuazione costituisce il rumore termico.

Si osservi che, a livello fondamentale, il rumore termico è della stessa natura dello shot noise, come già evidenziato dal teorema di Carson: infatti, se consideriamo un singolo portatore di carica q, esso si muove all'interno del conduttore subendo urti e cambiando casualmente direzione. La corrente



attraverso una generica sezione S del conduttore, associata a tale moto, si può esprimere come

$$i(t) = \frac{q}{d} \bar{v}(t) \times \bar{r} = as(t)$$

essendo d la distanza fra gli urti, r un versore normale a S e $\langle a \rangle = 0$. Le fluttuazioni sono quindi dovute alle variazioni casuali della velocità (vettoriale). Considerando ~ 0 l'intervallo di tempo fra due urti, il contributo alla corrente di rumore in questo intervallo sarà $a\delta(t)$: il fenomeno può essere modellato con un processo impulsivo di Poisson a media nulla, Fig. 8.5.

Dal punto di vista del rumore termico, una resistenza reale può essere modellata con una resistenza di pari valore ma non rumorosa in serie a un generatore di tensione o in parallelo a un generatore di corrente, di densità opportuna, da determinare, che tiene conto delle fluttuazioni. Fig. 9.8a

La densità bilaterale di potenza disponibile del generatore (si ricordi che la potenza disponibile di un

generatore è quella che il generatore fornisce ad una resistenza di carico eguale alla sua resistenza interna; essa è quindi la massima potenza erogabile dal generatore) può essere calcolata con considerazioni di termodinamica statistica e con il teorema dell'equipartizione dell'energia, e risulta essere

$$(9.28) \quad \frac{dW}{df} = \frac{hf}{2[\exp(\frac{hf}{kT}) - 1]} \text{ Watt/Hz}$$

in cui h è la costante di Plank, k la costante di Boltzman, T la temperatura assoluta del conduttore, f la frequenza.

Se le frequenze di interesse sono tali che $hf \ll kT$, cioè, a temperatura ambiente

$$(9.29) \quad f \ll kT/h \sim 6 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$$

(e questa è a tutt'oggi la generalità dei casi), allora sviluppando in serie l'esponenziale la densità spettrale diventa

$$(9.30) \quad dW/df = kT/2 \text{ Watt/Hz}$$

che è uno spettro bianco.

Si noti che la potenza disponibile è indipendente dalla resistenza del conduttore, poiché tale è l'agitazione termica dei portatori di carica nel conduttore.

A temperatura ambiente, la (9.30) dà $2 \cdot 10^{-21}$ Watt/Hz (o Joule).

La potenza disponibile di rumore in un intervallo di frequenza $\Delta f = f_2 - f_1$ sarà

$$(9.31) \quad W = \int_{f_1}^{f_2} dW = \int_{f_1}^{f_2} \frac{1}{2} kT df = \frac{1}{2} kT \Delta f \text{ watt}$$

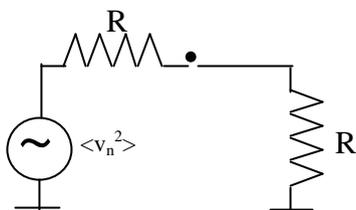


Fig. 9.9

Conviene esprimere la densità di potenza disponibile in altre forme. Rappresentando il generatore di rumore con un generatore di tensione, **Fig. 9.9**, e detta v la tensione istantanea di rumore termico generato dalla resistenza R ,

la tensione istantanea che verrà misurata ai capi di una resistenza di carico eguale sarà $v/2$. La potenza istantanea trasferita al carico sarà $v^2/4R$; la potenza media trasferita sarà

$$(9.32) \quad W = \langle v^2 \rangle / 4R = \int S(\omega) df \quad \text{watt}$$

La densità di potenza trasferita sarà infine

$$(9.33) \quad \frac{dW}{df} = \frac{1}{4R} \frac{d v^2}{df} \quad \text{watt/Hz}$$

Eguagliando alla (9.30) si ha

$$(9.34) \quad w_{vth} = dv^2/df = 2kTR \quad \text{Volt}^2/\text{Hz}$$

Analogamente si trova

$$(9.35) \quad w_{ith} = di^2/df = 2kT/R \quad \text{Ampere}^2/\text{Hz}$$

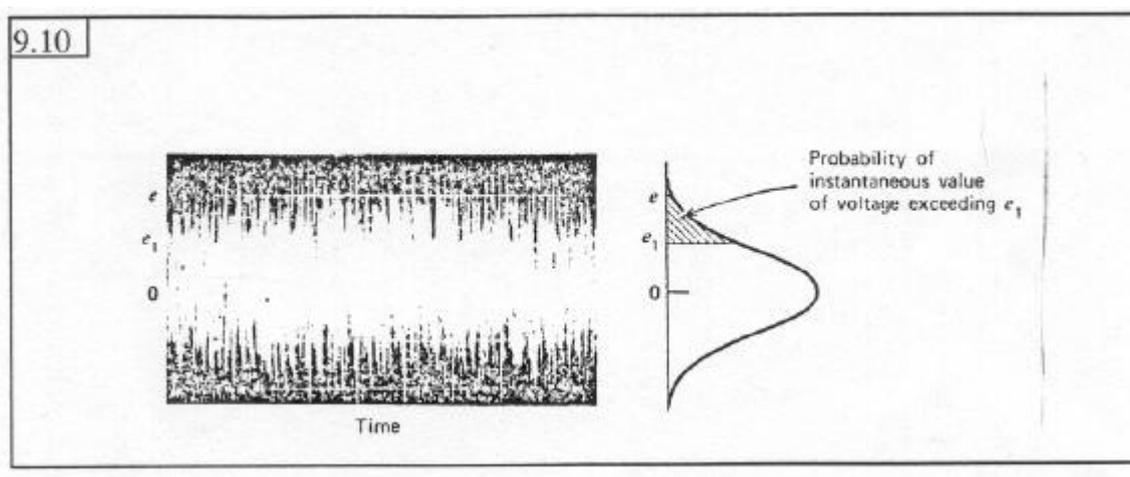
Per esempio, la (densità di) tensione efficace (unilaterale), cioè lo spot noise, misurata ai capi di una resistenza di 1 kOhm a temperatura ambiente risulta essere 4 nV/ $\sqrt{\text{Hz}}$. Questo significa che se la resistenza si trova all'ingresso di un filtro la cui banda passante equivalente per il rumore è 1 kHz, la tensione efficace di rumore di uscita dovuta alla resistenza sarà $4\sqrt{1000} \sim 132$ nV.

Si osservi, infine, che la potenza disponibile di rumore termico ai capi di una resistenza R_1 non può essere considerata come una fonte di energia utilizzabile: infatti è facile verificare (ma lo si potrebbe dedurre con semplici considerazioni termodinamiche) che se in parallelo ad R_1 poniamo una resistenza R_2 ("carico"), alla stessa temperatura, la potenza di rumore termico trasferita da R_1 a R_2 è pari a quella trasferita, contemporaneamente, da R_2 a R_1 . Così non è se le due resistenze sono mantenute (con mezzi esterni) a temperature diverse: verrà trasferita energia da quella calda a quella fredda, ma ciò non viola il secondo principio della termodinamica.

Come ultima osservazione, da quanto sopra detto dovrebbe apparire chiaro che le resistenze che generano rumore termico sono quelle fisiche, ohmiche, all'interno delle quali ci sono portatori di carica in agitazione termica: una resistenza dinamica non genera rumore termico, in quanto essa è *solo un modello* che noi introduciamo per descrivere il comportamento di una entità fisica.

Finora abbiamo considerato le proprietà del rumore nel dominio del tempo e delle frequenze. Per

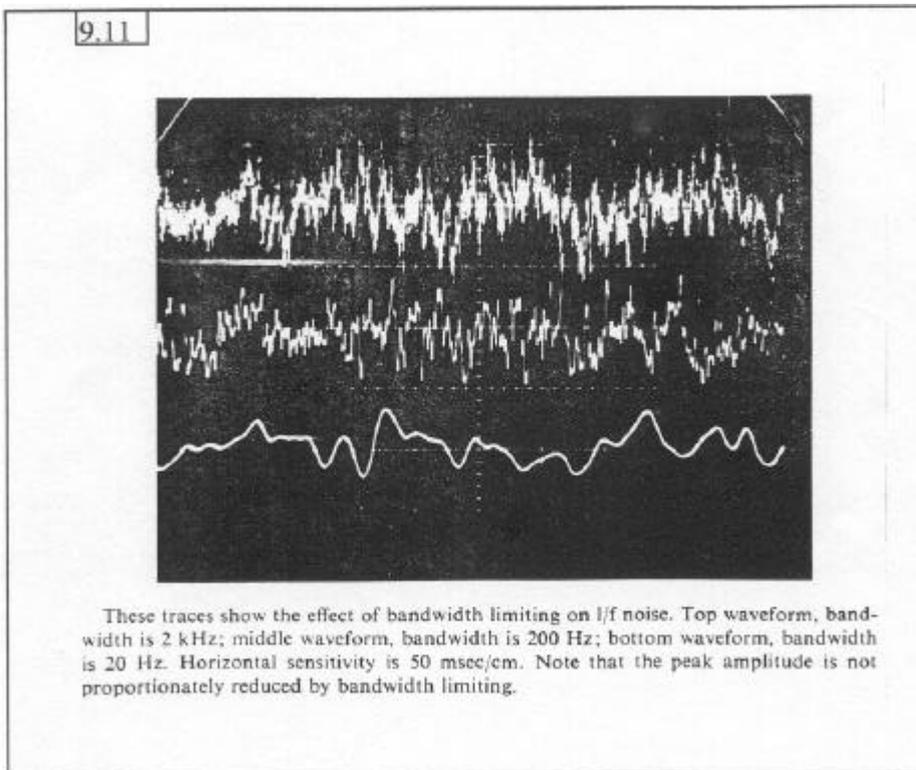
quel che riguarda la distribuzione di ampiezza, si osservi che la variabile aleatoria che rappresenta il rumore di uscita appare, sia per il rumore termico che per quello shot, come il risultato della sovrapposizione in un sistema lineare di un gran numero di variabili aleatorie (i contributi dei singoli portatori). Pertanto, per il teorema del limite centrale, il risultato è una variabile aleatoria con distribuzione di ampiezza gaussiana. La **Fig. 9.10** illustra la situazione.



9.5 IL RUMORE 1/f

All'interno dei componenti che interessano l'elettronica esiste un'altra forma di rumore il quale sembra essere legato alle imperfezioni nella costruzione dei componenti stessi. Per es. nel caso dei componenti a semiconduttore, le imperfezioni superficiali del cristallo (dovute sia a conseguenze della lavorazione del cristallo stesso, sia alla deposizione di strati di materiali diversi, per es. SiO₂ nel caso dei FET) agiscono come "trappole" (cioè livelli energetici fuori della banda di conduzione o di valenza) per i portatori di carica: può accadere che alcuni portatori cadano casualmente in queste trappole e vengano liberati successivamente, cosicché la corrente che sta attraversando il cristallo è soggetta a fluttuazioni, e lo stesso accade alla tensione ai suoi capi. Le resistenze a carbone mostrano un marcato noise 1/f: esse sono infatti costituite da un impasto di granuli di carbone tra i quali si stabiliscono dei microarchi al passaggio della corrente, la cui intensità subisce fluttuazioni. La densità spettrale delle fluttuazioni dovute al noise 1/f risulta essere, sperimentalmente

$$(9.36) \quad w_f = dv^2/df = A/|f|^\alpha \quad V^2/Hz$$



ove α è compreso fra 0.8 e 1.2, e A è una costante che ha valori diversi da caso a caso. Nei componenti elettronici, il caso più comune è $\alpha=1$. Questa relazione è stata verificata fino a bassissime frequenze: in Fig. 9.2 il noise 1/f è

rappresentato dalla linea di base crescente al diminuire di f .

La **Fig. 9.11** mostra l'effetto del filtraggio sul rumore $1/f$. La **Fig. 9.12** mostra altre caratteristiche dello stesso rumore.

A tutt'oggi non si hanno le idee chiare su questo rumore, nel senso che non si sa dire con certezza se è o meno di natura fondamentale né si sa dare un modello soddisfacente (si veda quanto detto a proposito del teorema di Carson). Esso inoltre manifesta la sua presenza nei fenomeni più disparati: per es., le fluttuazioni nella velocità di rotazione terrestre, le fluttuazioni nel periodo del battito cardiaco,.... mostrano una componente del tipo $1/f$.

La potenza del rumore $1/f$ in un intervallo di frequenza tra f_l e f_h risulta essere

$$(9.37) \quad W_{1/f} = \langle v^2 \rangle = \int_{f_l}^{f_h} \frac{A}{f} df = A \ln \frac{f_h}{f_l} \quad \text{Volt}^2$$

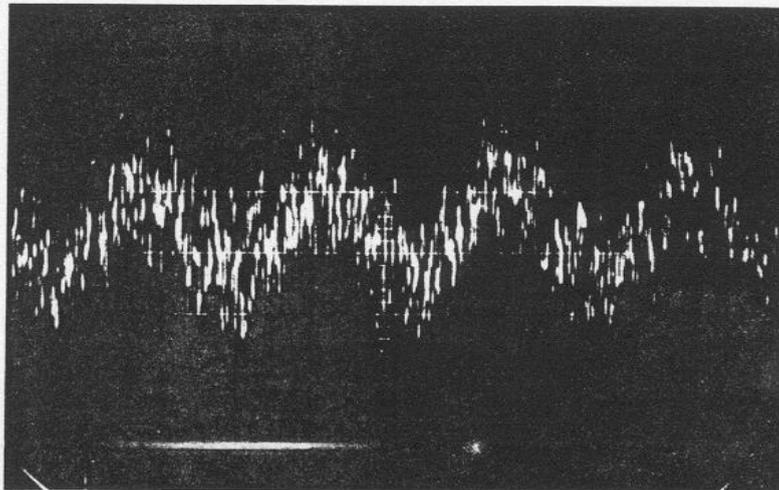
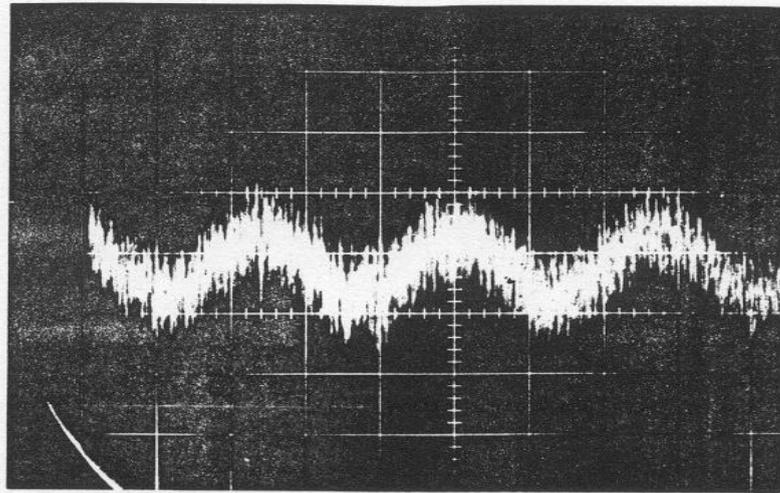
pertanto la potenza del rumore $1/f$ varia molto lentamente al variare dell'intervallo di frequenza di osservazione. Così, per es., se osserviamo il rumore $1/f$ (generato da una opportuna sorgente) tramite un amplificatore in continua che abbia una frequenza di taglio superiore $f_h=1000$ Hz e che venga tenuto acceso per un giorno (pertanto, la sua frequenza di taglio inferiore è dell'ordine di $f \sim 1/86400$ Hz $\sim 10^{-5}$ Hz), la potenza di rumore $1/f$ di uscita sarà

$$(9.38) \quad W_1 = A \ln(10^3/10^{-5}) = A \ln 10^8 \quad \text{V}^2$$

Se lo stesso amplificatore viene tenuto acceso per 100 giorni, la potenza diventa

$$(9.39) \quad W_{100} = A \ln 10^{10} = 1.25 W_1 \quad \text{V}^2$$

9.12



The signal-to-noise ratio is about unity in each photo. Top waveform is sinusoidal signal in white noise; bottom waveform is sinusoidal signal in $1/f$ noise. White noise appears "furry" or "grassy" on an oscilloscope; $1/f$ noise appears "rough" and "jumpy."

Il valore della costante A , che ha carattere provvisorio poiché è legato al rapido perfezionamento delle tecnologie costruttive, è ampiamente variabile col tipo di componente elettronico che si considera, come lo è la frequenza f_c a cui la densità di potenza del rumore $1/f$ è uguale a quella del rumore bianco (f_c corrisponde al ginocchio della curva tratteggiata in Fig. 9.1). Così, nei transistor bipolari al silicio è $A < 10^{-15} \text{ V}^2$ e $f_c \sim 2 \text{ kHz}$. Nei JFET è $A \sim 10^{-14} \text{ V}^2$ e $f_c \sim 2 \text{ kHz}$. Nei MOSFET è $A \sim 10^{-11} \text{ V}^2$ e $f_c \sim 2 \text{ MHz}$. Per i transistor MESFET all'arseniuro di gallio è $A \sim 10^{-8} \text{ V}^2$ e $f_c \sim 100 \text{ MHz}$. Qualche maggiore dettaglio sul coefficiente A per la tecnologia MOS verrà dato nel seguito. Questi

dati mettono in evidenza che per es. un amplificatore costruito con un MESFET può essere utile solo per elaborare segnali il cui spettro contenga frequenze >100 MHz (e quindi la cui durata sia <10 nsec) se si vuole che il rumore $1/f$ non abbia peso, e la misura sia quindi limitata solo dal rumore bianco.

9.6 CIRCUITO EQUIVALENTE PER IL RUMORE DI UN APPARATO DI MISURA

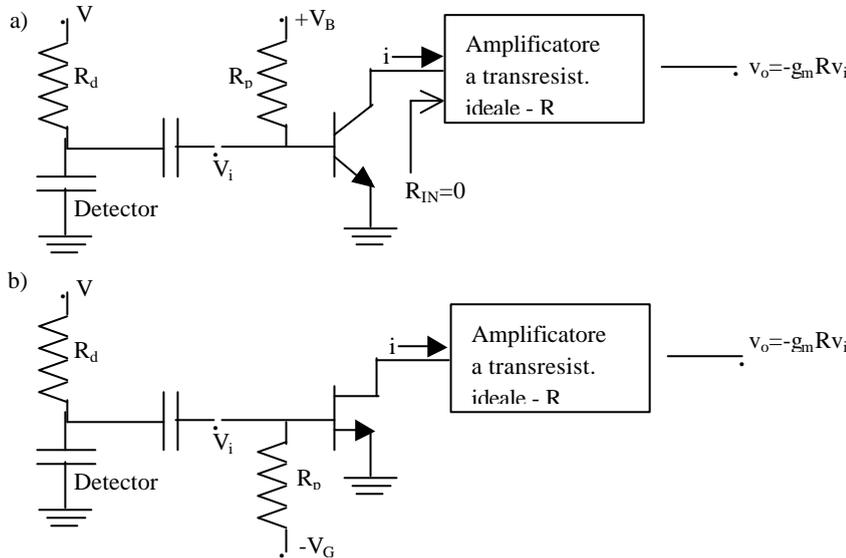


Fig. 9.13

Nel seguito saremo interessati a studiare distintamente il contributo al rumore dovuto al rivelatore e quello dovuto all'amplificatore. Inoltre, poiché siamo interessati a misurare la carica del segnale, oc-

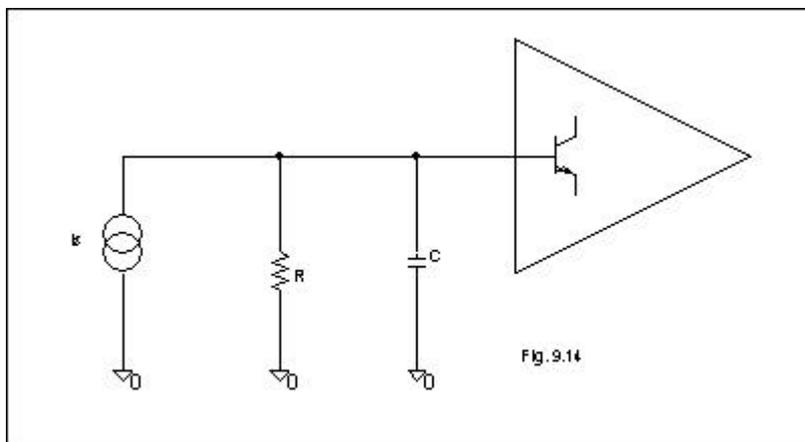
corre tener conto della capacità su cui la corrente del segnale viene integrata.

Per quel che concerne l'amplificatore, l'attenzione è concentrata sull'elemento attivo (che sarà sempre un transistor, o di tipo bipolare o ad effetto di campo) del primo stadio e sulle resistenze di polarizzazione: è infatti evidente che il primo stadio è il più critico, in quanto il noise che esso genera è amplificato dagli stadi successivi il cui rumore, al confronto, può essere trascurato. In altri termini, assumeremo che *il rumore totale all'uscita dell'amplificatore è dovuto al primo transistor ed agli elementi di circuito connessi alla sua entrata.*

La Fig. 9.13 è una rappresentazione schematica del sistema rivelatore + amplificatore, nella quale viene messo in evidenza il primo transistor: il resto della catena di amplificazione è schematizzato come un amplificatore a transresistenza ideale (con resistenza di ingresso $R_{in} = 0$), di guadagno $v_o/i = R$. Questa situazione è approssimata abbastanza bene nella configurazione più usuale di un amplificatore di carica, basata su un cascode. Nei paragrafi successivi assumeremo sempre questa ipotesi, salvo avviso contrario, considerando $R_{in} = 0$.

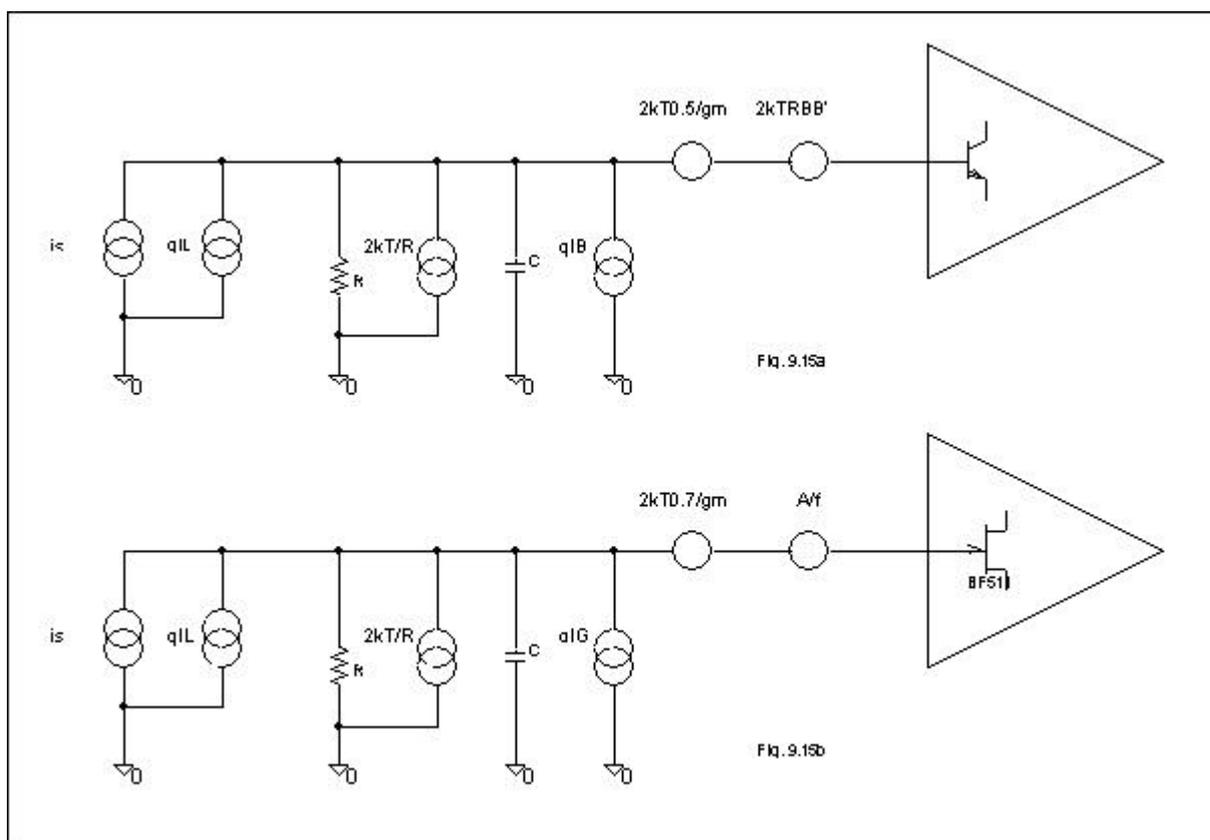
Detta, pertanto, $g_m = -i/v_i$ la transconduttanza del primo transistor, il guadagno in tensione risulta

$$(9.40) \quad v_o/v_i = (v_o/i)(-i/v_i) = -g_m R$$



La **Fig. 9.14** è l'equivalente dinamico della Fig. 9.13, in cui sono messi in evidenza gli elementi rilevanti ai fini del segnale e del rumore. In questa figura, il detector è rappresentato con il generatore i ; R è il parallelo fra R_d e R_p , C è la somma della capacità tra gli elettrodi del rivelatore, della capacità di entrata del transistor e di quella parassita.

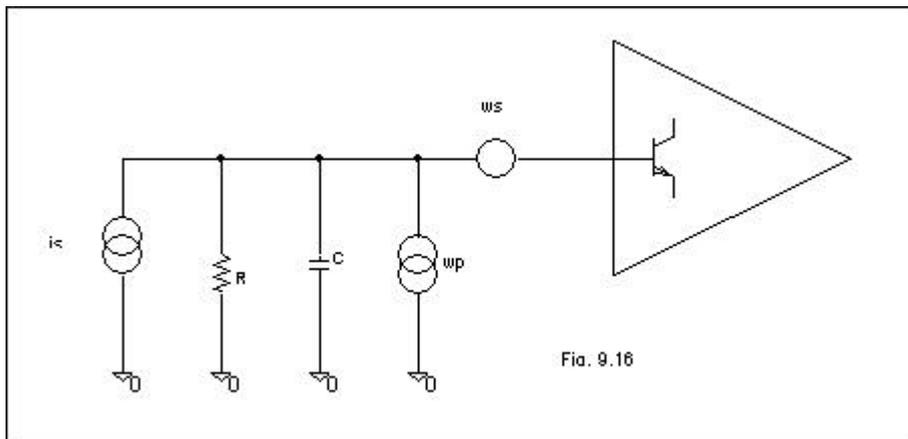
R_d e R_p , C è la somma della capacità tra gli elettrodi del rivelatore, della capacità di entrata del transistor e di quella parassita.



La Fig. 9.15 indica le sorgenti di rumore associate ai singoli componenti. Il generatore di segnale contribuisce con lo shot noise, qI_L , della corrente di leakage (I_L è trascurabile nei rivelatori a gas, ma

non certamente in quelli al silicio ove può essere di centinaia di nanoampere). La resistenza R contribuisce con il rumore termico $2kT/R$. E' evidente l'interesse a fare R la più grande possibile. Il transistor bipolare contribuisce con lo shot noise della corrente di base, qI_B ; con il rumore termico della resistenza R_{BB} della regione di base; con lo shot noise della corrente di collettore, che si può esprimere come kT/g_m (vedi dispense complete del corso di Fisica dei Dispositivi Elettronici). Il contributo del rumore $1/f$ è sempre trascurabile. Il FET contribuisce con lo shot noise della corrente di Gate, qI_G , di norma trascurabile; con il rumore termico della resistenza di canale, esprimibile come $1.4kT/g_m$, (vedi dispense complete); con il rumore $1/f$, quasi sempre trascurabile.

Poiché i contributi al rumore dei singoli componenti risultano statisticamente indipendenti, l'effetto cumulativo è il risultato della loro somma in quadratura. Allora, è conveniente rappresentare con due generatori tale effetto cumulativo, come mostrato in **Fig. 9.16**: un generatore di tensione di densità



w_s (rumore "serie") e uno di corrente di densità w_p (rumore "parallelo").

Una volta introdotti questi due generatori, tutti gli elementi di

circuito vanno considerati non rumorosi.

La tabella 9.1 riassume i contributi di rumore in varie situazioni.

Può che essere utile osservare, prima di procedere, che nulla vieta di pensare che i contributi al rumore $1/f$, dovuti alle imperfezioni dei componenti, possano essere eliminati col progredire della tecnologia. D'altro canto anche il rumore shot potrebbe essere eliminato, in linea di principio, con l'introduzione di componenti ove i portatori di carica non debbano attraversare barriere di potenziale. Il rumore termico, essendo dovuto all'agitazione termica, è ineliminabile, e costituisce il *limite ultimo* per la rivelabilità di un segnale. Pertanto, riferendosi alla Fig. 9.16, in un sistema ideale su de-

scritto l'unico contributo al noise sarebbe quello della resistenza R, incluso nel generatore parallelo. Il generatore serie scomparirebbe.

Come si vede dalla stessa figura, sulla capacità C viene integrata sia l'energia del segnale che quella

Tab. 9.1 - Densità bilaterali delle sorgenti di noise				
Contributo dell'elemento attivo di front-end				
	JFET	BJT	MOSFET	MESFET
$W_s(\omega)$	$2kT(0.7/g_m)$	$2kT(0.5/g_m + R_{BB} \cdot C_d^2 / (C_d^2 + C_i^2))$	$2kT(0.7/g_m) + A/f$	$2kT(0.7/g_m) + A/f$
$W_p(\omega)$	qI_G	qI_B	0	qI_G
Contributo del rivelatore e rete di polarizzazione				
$W_p(\omega)$	$qI_L + 2kT/R$			

del rumore: affinché un segnale manifesti la sua presenza, esso deve avere una densità di potenza (quindi una energia) *unilaterale* superiore a kT . Quindi, la corrente del segnale deve essere integrata su C fino a quando la carica

$$(9.41) \quad Q = \int_0^{t_m} i dt$$

è tale che l'energia immagazzinata $Q^2/2C$ superi $kT = 4 \cdot 10^{-21}$ joule. Questo permetterebbe di calcolare la minima ENC teorica, per un assegnato C. Per es., con $C = 10pF$, si avrebbe

$$Q = ENC = \sqrt{2CkT} = 2.8310^{-16} \text{ coulomb rms} = 1768 \text{ elettroni rms}$$

Segnali di carica inferiore a questo limite sarebbero indistinguibili dal noise.

In pratica, le cose vanno meglio e front-end con ENC minori di quella ora indicata sono comuni. Ciò si spiega osservando che mentre l'energia kT del rumore è il risultato della integrazione di una potenza distribuita uniformemente su uno spettro infinito (bianco), i segnali cui siamo interessati sono in generale a banda relativa stretta, quindi la loro energia è concentrata in un intervallo limitato di fre-

quenze. Pertanto, se si osservasse il segnale attraverso un sistema con banda passante infinita, kT sarebbe in effetti il limite inferiore alla misurabilità. Se, invece, si osserva il fenomeno attraverso un filtro *adattato* allo spettro del segnale, l'energia di quest'ultimo passerà pressoché inalterata, mentre l'energia del rumore sarà ridotta al di sotto di kT . Lo scopo dello shaping è in definitiva proprio questo. La Fig. 9.37 mostra che, con la C dell'esempio, con uno shaping time di ~ 100 nsec ed un front-end a FET si può avere una ENC di 300 elettroni.

9.7- UN ESEMPIO DI CALCOLO DEL RUMORE DI UN AMPLIFICATORE

INTEGRATO. EFFETTO DELLA RESISTENZA DELLA SORGENTE.

Consideriamo l'amplificatore di tensione di **fig. 9.16**, di guadagno $A_v = 1 + R_2/R_1$, realizzato con un operazionale.

In **Fig. 9.17** è indicato il modello per il rumore dello stesso amplificatore; sono indicate le densità

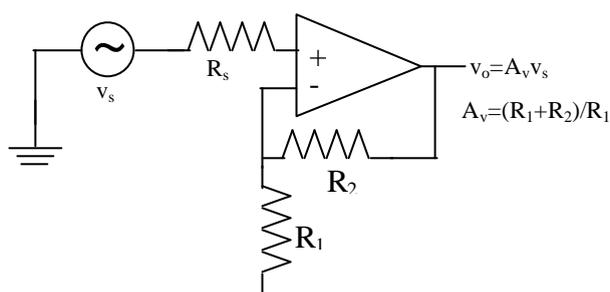


Fig. 9.16

efficaci del rumore termico delle resistenze presenti, quelle del rumore shot (i_{n+} e i_{n-}) delle correnti di base dei due transistor di entrata (specificate separatamente dal costruttore, poiché spesso sono molto differenti), e infine quella (v_n) che (come si vedrà più

avanti) tiene conto dello shot noise delle correnti di collettore dei medesimi transistor e del rumore termico delle loro resistenze spreading di base (di norma, viene specificato un solo valore riferito all'ingresso non invertente, che tiene conto dell'effetto cumulativo dei due transistor che nei circuiti integrati sono praticamente identici e contribuiscono allo stesso modo). Sulle sorgenti di rumore negli elementi attivi, maggiori dettagli verranno dati nei paragrafi seguenti.

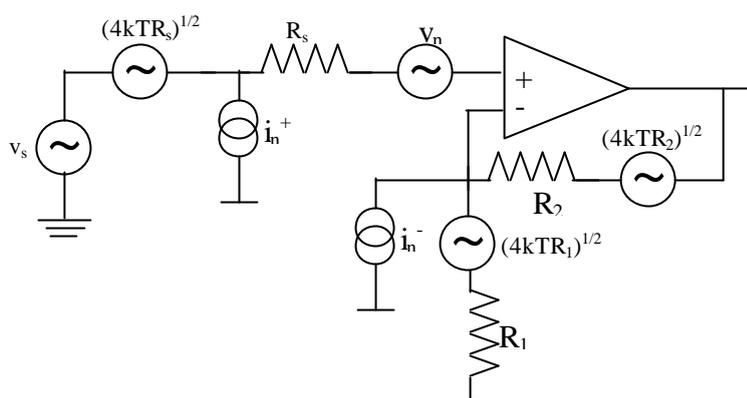


Fig. 9.17

Ricordando che le densità spettrali di sorgenti statisticamente indipendenti si sommano quadraticamente, applicando il principio di sovrapposizione possiamo calcolare la densità spettrale del rumore di uscita (per semplicità, l'operazionale

viene assunto ideale). Si trova facilmente:

$$(9.42) \quad v_{no}^2 = [v_n^2 + (i_{n+}^+ R_s)^2 + 4kTR_s] A_v^2 + (i_{n-}^- R_2)^2 + 4kTR_2 A_v$$

dividendo per A_v^2 , si ha la densità spettrale del rumore equivalente di entrata

$$(9.42a) \quad v_{ni}^2 = v_n^2 + (i_n^+ R_s)^2 + 4kTR_s + (i_n^- R_1 // R_2)^2 + 4kT R_1 // R_2$$

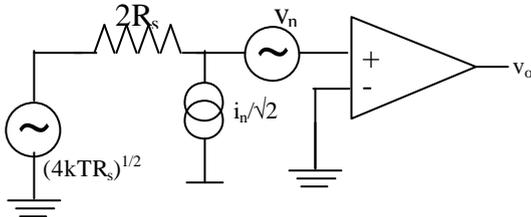
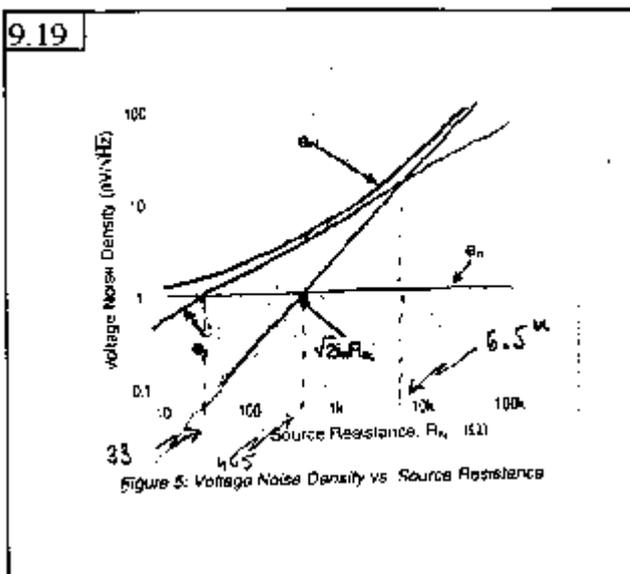


Fig. 9.18

Consideriamo il caso semplice di un amplificatore operazionale in cui le correnti di base siano uguali, per cui si può assumere $i_b^+ = i_b^- = i_n$. Inoltre, è noto che per cancellare l'offset di corrente conviene imporre $R_1 // R_2 = R_s$. Possiamo allora scrivere

$$(9.43) \quad v_{ni}^2 = v_n^2 + (i_n \frac{2R_s}{\sqrt{2}})^2 + 4kT(2R_s) = v_n^2 + v_i^2 + v_t^2$$



Il circuito è ridisegnato in **Fig. 9.18**.

Come esempio, consideriamo l'amplificatore CLC 425 della Comlinear. Dai data sheets si ricava:

$$v_n = 1.05 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$$

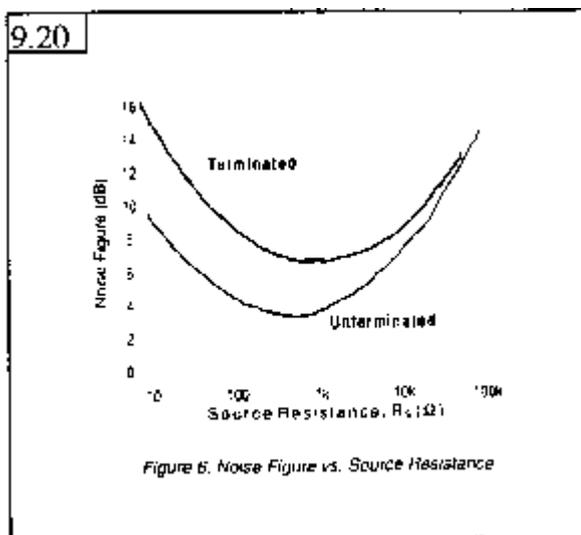
$$i_n = 1.6 \text{ pA}/\sqrt{\text{Hz}} (= i_n^+ = i_n^-)$$

[questi valori dello spot noise sono validi per frequenze maggiori di qualche decina di kHz, in modo da trascurare l'effetto del rumore

1/f].

La **Fig. 9.19** mostra i singoli contributi al rumore presenti nella (9.43) in funzione di R_s ; essa mostra inoltre il rumore totale. Si osservi che il rumore totale dell'amplificatore in esame è dominato dal rumore serie intrinseco dell'operazionale, v_n , per $R_s < 33$ ohm. Per $33 < R_s < 6.5k$ prevale il rumore termico delle resistenze esterne, v_t . Per $R_s > 6.5k$ domina lo shot noise intrinseco dell'operazionale, $\sqrt{2}i_n R_s$. I contributi intrinseci dell'operazionale coincidono per $R_s^* = 465$ ohm.

I valori numerici sono particolari dell'amplificatore in esame, ma l'andamento delle curve è generale. Dagli stessi data sheets si ha che il prodotto banda-guadagno è 1.7 GHz. Se supponiamo che



l'amplificatore sia configurato per un guadagno $A_v=20$, la banda passante sarà $f_b=85$ MHz. Poiché il CLC 425 (come del resto tutti gli operazionali) è costruito con un solo polo dominante, si ha dalla (8.57) che il rumore integrato di entrata è

$$(9.45) \quad \sigma_i = v_{ni} \sqrt{1.57 f_2}$$

Per es., con $R_s=25$ ohm si ha $\sigma_i = 16 \mu V_{eff}$, quindi $\sigma_o = 16 \times 20 = 320 \mu V_{eff}$.

[Se la cancellazione dell'offset non è strettamente necessaria, conviene fare R_1/R_2 il più piccolo possibile, per minimizzare il rumore].

Dalla fig. appare che per $R_s=R_s^*$ l'operazionale aggiunge il minimo contributo ($\sqrt{2i_n R_s + v_n}$) al rumore dovuto alla resistenza di sorgente, $\sqrt{4kT(2R_s^*)}$. In queste condizioni sarà anche minima la figura di rumore dell'amplificatore

$$(9.46) \quad NF = 10 \log \frac{SNR_i}{SNR_o} = \frac{\frac{v_s^2}{4kTR_s}}{\frac{A_v^2 v_{ni}^2}{A_v^2 v_{ni}^2}} = 10 \log \left(\frac{v_n^2 + 2(i_n R_s)^2 + 4kT(2R_s)}{4kTR_s} \right)$$

R_s^* è quindi la resistenza ottima di sorgente, da questo punto di vista. Si noti che minimizzare la NF significa soltanto minimizzare il contributo dell'amplificatore operazionale, non minimizzare il noise totale v_{ni} (sorgente più amplificatore) che ha un minimo per $R_s=0$ e coincide con v_n , come appare dalla fig. 9.19. La **Fig. 9.20** mostra la NF.

9.8 RUMORE DEL RIVELATORE E DELLA RETE DI POLARIZZAZIONE

Come è stato accennato nel par. 9.1, un rivelatore è in generale costituito da un sistema di due elettrodi (due piastre metalliche parallele, nel caso di un rivelatore a ionizzazione; una superficie cilindrica conduttrice ed un filo sottile posto lungo l'asse, nel caso di uno straw tube; due lastre di bachelite, nel caso del rivelatore a piastre resistive, RPC; le due regioni p ed n, nel caso di un rivelatore a silicio;) ai quali è applicata una differenza di potenziale attraverso una resistenza di polarizzazione R_d ,

Fig. 9.13.

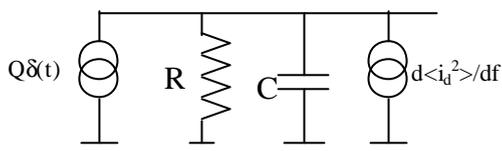


Fig. 9.21

Il contributo al noise dovuto al rivelatore è costituito dallo shot noise della corrente di leakage I_L del rivelatore stesso: tale corrente può essere trascurata nei rivelatori a gas, ma non lo è certo nei rivelatori a se-

miconduttore, a T ambiente, ove può essere anche di centinaia di nA.

A questo rumore va aggiunto quello termico dovuto alla rete di polarizzazione, costituita da $R=R_d/R_i$, come mostrato in Fig. 9.15. Pertanto, si ha in totale, **Fig. 9.21**

$$(9.47) \quad di_{det}^2/df = qI_L + 2kT/R \quad A^2/Hz$$

Questo contributo è inglobato nel generatore $w_p(\omega)$ in Fig. 9.14.

9.9 MECCANISMO DI GUADAGNO E VELOCITÀ DI RISPOSTA DEGLI ELEMENTI ATTIVI

Per una migliore comprensione di come i parametri fisici degli elementi attivi con cui è costruito l'amplificatore influenzano la carica equivalente di rumore dell'amplificatore stesso, conviene descrivere il meccanismo del guadagno di questi componenti facendo uso del concetto di controllo di carica.

Questi componenti (transistor a giunzione bipolare, BJT, o ad effetto di campo, FET) hanno tre terminali, due dei quali (emitter e collettore nel caso del BJT; source e drain nel caso del FET) sono gli estremi di un "canale" attraverso cui scorre una corrente I , mentre il terzo (base del BJT, gate del FET) consente di controllare I_0 agendo su una certa lunghezza L del canale. Nel caso del BJT, assumendo per semplicità che la corrente I che transita dall'emitter al collettore si muova solo per diffusione, è noto che tale corrente dipende dal gradiente di concentrazione della carica minoritaria Q immagazzinata nella base: per un transistor npn si ha

$$(9.48) \quad I(x) = qAD_n dn(x)/dx$$

essendo A la sezione della base. Se trascuriamo per il momento la ricombinazione in base (come noto, questa è una buona approssimazione se la lunghezza di diffusione dei portatori è molto maggiore della larghezza effettiva della base), sarà

$$(9.49) \quad I(x) = I_0 = \text{cost}$$

il gradiente è quindi costante e la carica minoritaria deve avere una distribuzione lineare

$$(9.50) \quad n(x) = n(0)(1-x/L)$$

Allora la (9.48) diventa

$$(9.51) \quad |I_0| = qAD_n n(0)/L$$

La carica minoritaria immagazzinata in base è

$$(9.52) \quad Q = \int_0^L Aqn(x)dx = \frac{1}{2}qAn(0)L$$

Dalle ultime due relazioni si ha

$$(9.53) \quad I_o = 2D_nQ/L^2$$

Pertanto, la corrente I_o è proporzionale alla carica minoritaria immagazzinata in base. La costante di proporzionalità $L^2/2D_n$ ha le dimensioni di un tempo e, essendo Q distribuita nella lunghezza di base L , ha il significato di tempo di attraversamento della base, t_e

$$(9.54) \quad I_o = Q/t_e$$

Variando il gradiente (e ciò si può fare iniettando una carica dQ_i in base attraverso l'elettrodo di controllo, variando di dV_{BE} il suo potenziale) la corrente di uscita dal collettore varierà di dI_o dopo il tempo t_e . Quindi, la lunghezza del canale L coincide con la lunghezza effettiva della base (cioè tenendo conto dell'effetto Early).

Nel caso del FET, la corrente che scorre dal source al drain dipende dalla ampiezza della depletion layer, e quindi in definitiva dalla carica Q (fissa) "immagazzinata" nella d.l. stessa. Anche in questo caso, variando la d.l. (e ciò si può fare variando di dV_{GS} il potenziale di gate il che ha l'effetto di variare di dQ_i la carica nella depletion layer) la corrente di uscita dal drain varierà di dI_o dopo il tempo t_e necessario alle cariche per attraversare il canale. Quindi, la regione di controllo coincide con la lunghezza del canale sottostante il gate.

In definitiva, in entrambi i casi possiamo dire che se il potenziale dell'elettrodo di controllo viene variato di dV (e sarà dV_{BE} per un transistor bipolare, dV_{GS} per un FET), questo ha l'effetto di iniettare nella regione di controllo una carica

$$(9.55) \quad dQ_i = C_i dV$$

essendo C_i la capacità dell'elettrodo di controllo rispetto al canale.

In corrispondenza, la corrente di uscita varierà di

$$(9.56) \quad dI_o = dQ_i/t_e$$

essendo t_e il tempo di transito nella regione di controllo.

Si può quindi dire che *una variazione dQ_i della carica di entrata provoca una variazione dI_o della corrente di uscita, con un tempo di risposta t_e* : questo è il concetto di controllo di carica.

L'amplificazione del componente può essere espressa con la sua sensibilità alla carica

$$(9.57) \quad dI_o/dQ_i = 1/t_e$$

o anche

$$(9.58) \quad dI_o/dQ_i = dI_o/(C_i dV_i) = g_m/C_i$$

essendo g_m la transconduttanza del componente.

L'amplificazione può anche essere espressa mediante il guadagno in carica. Se il segnale di corrente dI_o (assunto per semplicità uno scalino) viene integrato per t_m secondi (essendo t_m l'istante in cui si decide di fare la misura) la carica di uscita sarà

$$(9.59) \quad dQ_o = t_m dI_o$$

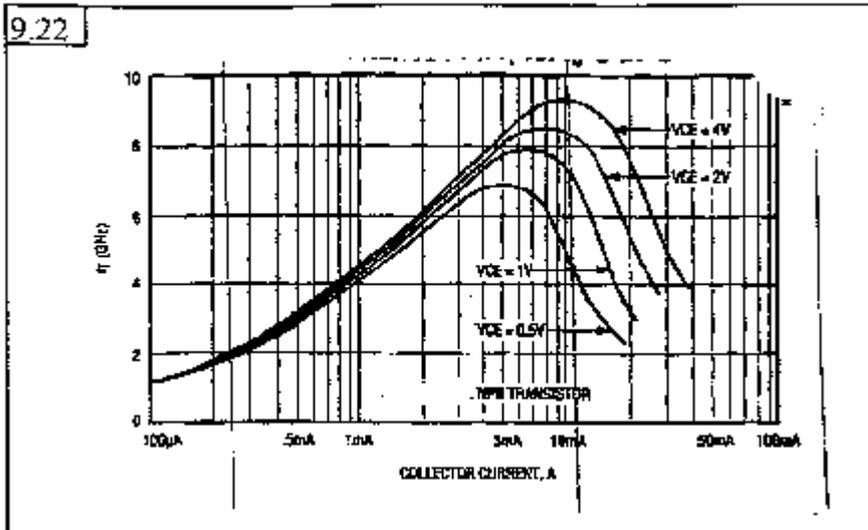
ed il guadagno in carica sarà pertanto

$$(9.60) \quad dQ_o/dQ_i = t_m/t_e$$

Appare chiaro il ruolo che gioca la velocità di risposta del componente, t_e : se si vogliono ottenere grandi guadagni occorrono componenti molto veloci.

Si osservi che il guadagno ottenibile è limitato dal tempo t_m a disposizione per la misura, il quale dipende dal rate degli eventi nell'esperimento. All'acceleratore LHC in fase di allestimento al CERN,

t_m è 25 nsec. Per avere un'idea della velocità con cui questo numero va diminuendo, basta dire che all'attuale acceleratore LEP il t_m è 1 μ sec. È presumibile che nei futuri acceleratori esso sarà ancora più piccolo. Pertanto, per ottenere grandi guadagni la tecnologia futura dovrà produrre componenti attivi sempre più veloci.



Nella descrizione finora fatta il transistor, visto dall'elettrodo di controllo, è caratterizzato da una costante di tempo t_c data dal parallelo di una conduttanza g_m ed una capacità C_i , come mostrato dalla (9.57) e (9.58). La pulsazione di

pulsazione di taglio è

$$(9.61) \quad \omega_T = 1/t_c = g_m/C_i$$

La frequenza $f_T = \omega_T/2\pi$ è nota come prodotto banda-guadagno unitario in quanto, nel caso del transistor bipolare, rappresenta anche la frequenza a cui il guadagno di corrente h_{fe} diventa 1. Esso è uno dei parametri più importanti di un transistor per alta frequenza ed è reperibile sui cataloghi. La Fig. 9.22 è un esempio tipico, che si riferisce al transistor bipolare 2N5943.

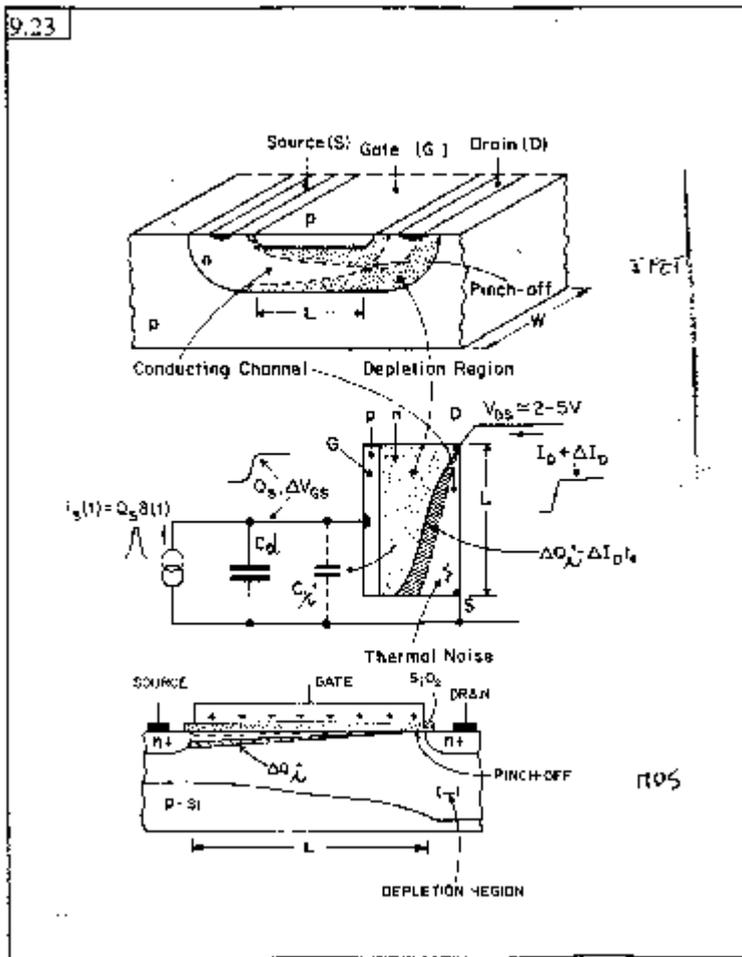
Si tenga presente, infine, che la costante di tempo di un componente reale è $\tau_c > t_c$, in quanto alla sua capacità di controllo occorre aggiungere le capacità parassite. La f_T dei transistor più veloci oggi in commercio varia dai ~ 10 Ghz dei transistor bipolari, JFET e MOSFET fino ai 30-40 GHZ dei MESFET.

Da quanto detto finora, si deduce che per realizzare un alto SNR, occorre usare componenti attivi che abbiano un grande guadagno in carica e che generino poco noise. Nei paragrafi seguenti t_c e g_m ,

che determinano il guadagno dei componenti attivi, verranno espressi in termini di parametri fisici. Verranno anche evidenziate le sorgenti di rumore nei componenti stessi, in modo tale da consentire il calcolo di ENC.

9.10 IL TRANSISTOR AD EFFETTO DI CAMPO

Il principio di funzionamento di un transistor ad effetto di campo a giunzione (JFET) e di uno a gate isolato (MOSFET, o più brevemente MOS), è schematicamente rammentato in **Fig. 9.23**. È anche



indicata la variazione di carica ΔQ_i nel canale, provocata da una variazione $\Delta V_{GS} = Q_s / (C_d + C_i)$ sul gate. Un transistor MESFET è simile come struttura al JFET ma la giunzione sul gate è di tipo metallo-semiconduttore. La sezione del canale di conduzione nel JFET, e quindi la corrente tra S e D, è controllata dalla depletion layer, d.l., che si estende dal gate nel canale stesso. Il profilo della d.l. è influenzato dalla caduta di potenziale lungo il canale, provocata dalla corrente che scorre tra source e drain. Al

crescere del potenziale di drain V_{DS} , per una fissata tensione V_{GS} , si raggiunge lo strozzamento (pinch-off) del canale, e da quel punto in poi la corrente nel canale resta sostanzialmente costante, indipendente da V_{DS} . In queste condizioni il componente si comporta in maniera lineare ed il controllo della corrente di canale, mediante il potenziale di gate, avviene nella regione, di lunghezza L , compresa fra il source ed il punto di pinch-off, variando la profondità della d.l. e quindi variando di ΔQ_i la carica spaziale nella d.l. stessa.

In un MOSFET il meccanismo è simile. In un MOS di tipo enhancement, il canale di conduzione viene creato mediante "inversione" del tipo di drogaggio nello strato sottostante l'ossido SiO_2 . Se, co-

me in figura, il cristallo è inizialmente di tipo p, viene indotto uno strato di elettroni sotto l'ossido, e questi elettroni creano un canale di conduzione fra source e drain (entrambi drogati n+). La tensione V_{GS} necessaria per iniziare l'inversione è la "tensione di soglia", V_T . Analogamente a quanto avviene nel FET, la caduta di potenziale lungo il canale dovuta alla corrente I_{DS} fa sì che la V_{GS} (e quindi la sezione dello strato di inversione) non sia uniforme lungo il canale, dando luogo al fenomeno del pinch-off.

Le relazioni approssimate che esprimono le quantità di nostro interesse in funzione dei parametri fisici del MOS sono le seguenti [19]:

$$(9.62) \quad I_{DS} = (1/2)\mu(C_i/L^2)V_T^2(V_{GS}/V_T-1)^2 = I_{DSS}(V_{GS}/V_T-1)^2$$

$$(9.63) \quad g_m = \mu(C_i/L^2)V_T(V_{GS}/V_T-1) = g_{mo}(V_{GS}/V_T-1)$$

$$(9.64) \quad g_m/C_i = 1/t_e = (\mu/L^2)V_T(V_{GS}/V_T-1)$$

Da quest'ultima si ha anche:

$$(9.65) \quad t_e = L^2/(\mu(V_{GS}-V_T))$$

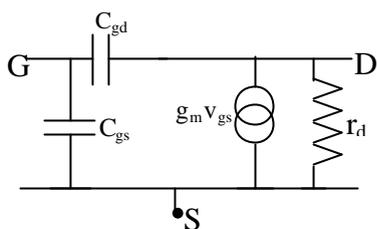


Fig. 9.24

In esse, μ è la mobilità dei portatori di carica, C_i la capacità di controllo fra gate e canale (pari, come apparirà fra poco, a $C_{GS}+C_{GD}$), L la lunghezza del canale ove avviene il controllo di carica.

Come appare dalla 9.65, per avere componenti veloci occorre che il canale sia corto, che la mobilità dei portatori sia grande (pertanto i componenti a canale n, ove i portatori sono elettroni, sono più veloci di quelli a canale p, ove i portatori sono lacune), e che le tensioni di soglia siano piccole.

Le stesse relazioni valgono per il JFET, sostituendo $(V_{GS}-V_T)$ con (V_p-V_{GS}) , essendo V_p la tensione di pinch-off (differenza di potenziale V_{GD} appena si raggiunge il pinch-off). Tipicamente, V_T per un

MOS è ≥ 1 V, V_p per un JFET è nel range 1-3 V, $V_{GS} - V_T = V_p - V_{GS}$ è nel range 1-5 V.

Riferendoci a componenti discreti, il tempo di transito t_e può essere stimato se si tiene conto che i processi di fabbricazione a tutt'oggi ben affermati (che producono quindi componenti facilmente reperibili in commercio) realizzano MOS con $L=3$ micron, e JFET con $L=7$ micron (nel caso di componenti integrati, esistono processi con L inferiore al micron). La mobilità degli elettroni nel JFET è dell'ordine di $1.3 \cdot 10^3 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ sec}^{-1}$; circa la metà nel MOS. Assumendo inoltre $(V_{GS} - V_T) = (V_p - V_{GS}) = 2$ V, si ha $t_e \cong 0.2$ nsec, $f_T \cong 0.8$ GHz.

Il modello per piccoli segnali del FET e del MOS è in **Fig. 9.24**.

Le sorgenti di rumore bianco in un FET sono sostanzialmente due. Un primo contributo è dato dal *rumore termico della resistenza del canale* (che non va confusa con r_D , che è una resistenza dinamica), il cui effetto può essere convenientemente rappresentato da un generatore di corrente, il cui

contributo si aggiunge alla I_{DS} . Una analisi teorica [1] del fenomeno permette di esprimere la densità (unilaterale) di tale noise in funzione della transconduttanza g_m :

$$(9.66) \quad w_D = di_D^2/df = 2kT a_n g_m \quad \text{A}^2/\text{Hz}$$

ove il coefficiente a_n risulta essere $2/3$ (~ 0.7).

Un secondo contributo è dato dallo *shot noise della corrente I_G* che scorre nel terminale di gate, la cui densità è

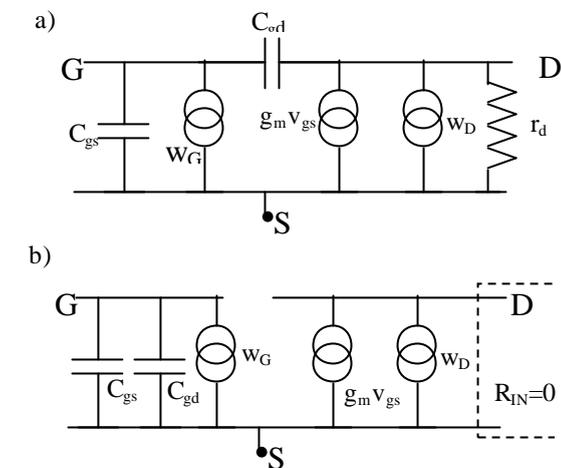


Fig. 9.25

noise della corrente I_G che scorre nel terminale di gate, la cui densità è

$$(9.67) \quad w_G = di_G^2/df = qI_G \quad \text{A}^2/\text{Hz}$$

Si noti che I_G è < 1 nA in un JFET, molto minore (anche 10^{-15} A) in un MOS e molto maggiore (~ 1 mA) in un MESFET. Si noti anche che la corrente I_{DS} non è soggetta a shot noise, in quanto i portatori non attraversano giunzioni nell'andare dal source al drain.

Il modello per piccoli segnali, integrato con questi due generatori di rumore è in **Fig. 9.25a**. Se si assume che gli stadi successivi di amplificazione siano assimilabili ad un amplificatore a transresistenza ideale ($R_{IN} = 0$), Fig. 9.13, la resistenza dinamica r_D può essere omessa e C_{GD} si ritrova in parallelo a C_{GS} , **Fig. 9.25b**, per cui $C_i = C_{GS} + C_{GD}$. [Comunque, è bene ricordare che questo non è più vero se $R_{IN} \neq 0$].

Ai fini del calcolo del rumore equivalente di entrata, conviene trasformare il generatore di rumore di uscita in un generatore equivalente di entrata. Questo può essere fatto agevolmente con la procedura che segue.

Per analogia col generatore dipendente $g_m v_{GS}$, la corrente di rumore di uscita, di valore istantaneo i_D , può essere scritta nella forma

$$(9.68) \quad i_D = g_m v_{G'G}$$

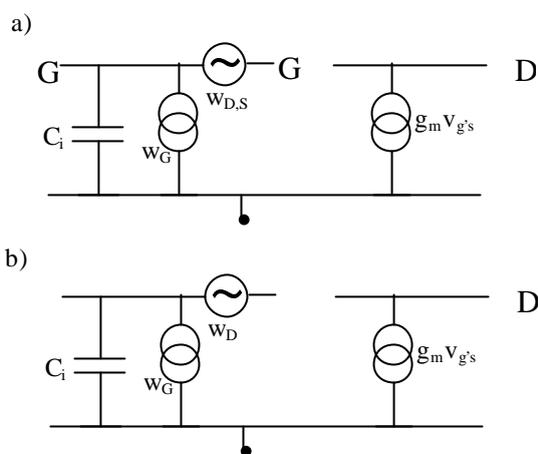


Fig. 9.26

facendola così dipendere da un opportuno generatore di tensione in serie al gate, di valore istantaneo $v_{G'G}$. Allora possiamo disegnare un unico generatore di corrente di uscita, di valore $g_m(v_{G'G} + v_{GS}) = g_m v_{G'S}$, **Fig. 9.26a**. Il valore q.m. della tensione di rumore di entrata sarà, dalla (9.68)

$$(9.69) \quad \langle v_{G'G}^2 \rangle = \langle i_D^2 \rangle / g_m^2 \quad V^2$$

e la densità

$$(9.70) \quad w_{D,S} = dv_{G'G}^2/df = (di_D^2/df)(1/g_m^2) = 2kT a_n / g_m \quad V^2/Hz$$

Pertanto, il noise di uscita è equivalente al rumore termico di una resistenza in serie al gate, $R_s = a_n/g_m$.

Il modello per piccoli segnali si modifica come in Fig. 9.26a. Per minimizzare il contributo del rumore

serie occorre scegliere FET con grande transconduttanza. Dalle (9.62)-(9.64), assumendo $V_p - V_{GS} = 0.7V_p$ si ha

$$(9.71) \quad g_m \sim 3I_{DS}/V_p$$

Un buon componente ha tipicamente $g_m \approx 10 \text{ mA/Volt}$ a $I_{DS} = 10 \text{ mA}$.

Va infine considerato il contributo del *rumore 1/f* che, come descritto ampiamente in precedenza, è sensibile specie nei dispositivi MOS. Essendo la sua origine all'interfaccia fra gate e canale, esso può essere modellato come un generatore di tensione che modula casualmente la sezione del canale stesso. L'effetto di questo noise, di densità

$$(9.72) \quad w_f = dv_f^2/df = A/|f| \quad \text{V}^2/\text{Hz}$$

è rappresentato da un generatore in serie al terminale di controllo. Nei MOS la costante A è esprimibile come

$$(9.72a) \quad A = \frac{K_f}{C_{ox}^2 WL}$$

ove:

- K_f è il cosiddetto parametro di fonderia, cioè un coefficiente il cui valore dipende dal processo usato dalla fabbrica del circuito integrato ("fonderia"). Per es., nel processo CMOS della Orbit, è $K_f = 5 \cdot 10^{-27} \text{ pCoul}^2/\mu\text{m}^2$;
- C_{ox} è la capacità per unità di area del componente. Nel processo già citato, essa è $1.53 \text{ pF}/\mu\text{m}^2$;
- W, L sono rispettivamente larghezza e lunghezza del canale.

Il generatore di rumore 1/f va inglobato nel generatore di rumore serie, la cui densità diventa

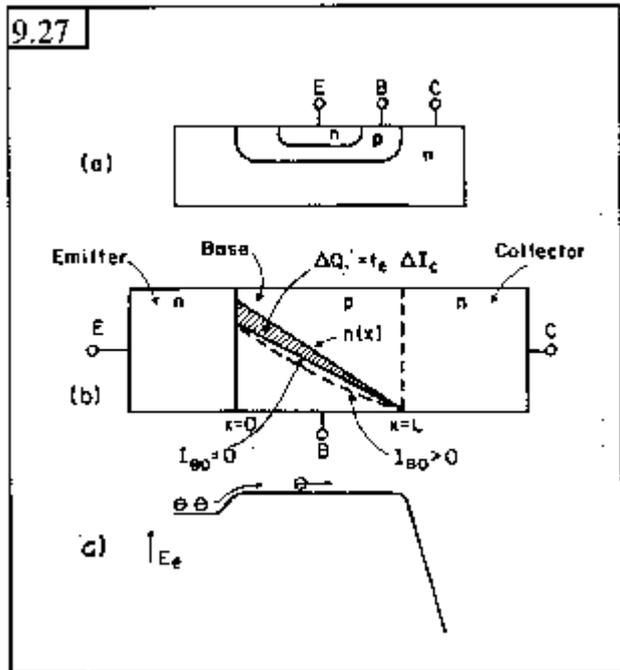
$$(9.73) \quad w_s = w_{d,s} + w_f$$

mostrato in Fig. 9.26b.

Il modello circuitale di Fig. 9.26b è immediatamente riconducibile a quello di Fig. 9.15, con $C_i = C_{GS} + C_{GD}$.

9.11 IL TRANSISTOR BIPOLARE

Il principio del controllo di carica in un transistor bipolare npn è illustrato in **Fig. 9.27**. Gli elettroni sono iniettati dall'emitter nella base; in questa, diffondono fino alla giunzione di collettore ove sono raccolti, grazie al campo sulla giunzione stessa.



Dalle (9.53) e (9.54) si ha

$$(9.74) \quad t_e = W^2/2D_n$$

essendo W la larghezza effettiva della base.

La costante di diffusione è data dalla relazione di Einstein

$$(9.75) \quad D_n = \mu kT/q$$

Per ottenere transistor veloci (e quindi grande guadagno in carica, vedi 9.60) occorre che la base sia stretta e che i portatori abbiano grande mobilità: pertanto i transistor

npn (ove i portatori minoritari in base sono elettroni) sono più veloci dei pnp, essendo la mobilità degli elettroni circa doppia di quella delle lacune, nel silicio. Essendo a T_{amb} . $D_n=30 \text{ cm}^2\text{sec}^{-1}$, con $W=1$ micron si ha $t_e=0.16 \text{ nsec}$.

Nei transistor veloci, W è qualche decimo di micron. Inoltre, nei transistor moderni, la concentrazione del drogaggio in base è graduale e ciò fa nascere un campo elettrico interno alla base che favorisce il transito dei portatori minoritari, il cui moto nella base non è regolato soltanto dalla diffusione, eq. (9.48); di conseguenza, la (9.74) non è più valida e il tempo di transito è parecchio più breve di quanto essa prevede. Componenti veloci con base a drogaggio graduale hanno tempi di risposta t_e nel range 20-50 psec, corrispondente ad una f_T dell'ordine di 5-10 GHz.

Il modello (di Giacoletto) per piccoli segnali di un transistor bipolare è in **Fig. 9.28**. Le resistenze

(dinamiche, quindi non rumorose) $r_{b'c}$ e r_{ce} hanno valore elevato e possono essere omesse.

Per modificare di dI_c la corrente di collettore, è necessario un cambiamento dQ_i nella concentrazione degli elettroni immagazzinati nella base, come indicato in Fig. 9.28: dQ_i deve essere fornito attraverso il terminale di base, dal segnale e per questo occorre variare di dV_{BE} il potenziale sulla giunzione emitter-base cosicché

$$(9.76) \quad dQ_i = C_i dV_{BE} = dI_c t_e$$

essendo C_i la capacità dell'elettrodo di controllo (la base): ricordando che lo stadio successivo ha $R_{IN}=0$, si ha $C_i=C_e+C_{ob}$, ove C_e è la capacità di diffusione della giunzione emitter-base, e C_{ob} la capacità di transizione della giunzione base-collettore. La capacità C_i può essere calcolata con la (9.61), poiché f_T è un parametro noto dal costruttore.

Finora si è fatta l'ipotesi che sia assente la ricombinazione di portatori in base: in questa situazione

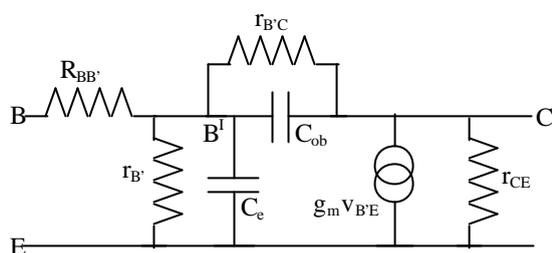


Fig. 9.28

ideale, l'unica carica che dovrebbe transitare attraverso il terminale di base è quella del segnale dQ_i , necessaria per variare la corrente di collettore di dI_c . Quindi, in assenza di ricombinazione, una volta fornita la carica dQ_i , la dI_c permanerebbe

per un tempo indefinito, fino ad una successiva iniezione di dQ ! In realtà così non è: parte delle cariche minoritarie che attraversano la base scompare per ricombinazione, e per mantenere l'equilibrio occorre continuamente rifornire attraverso il terminale di base la carica che scompare. Questa costituisce la corrente di base I_B , che appare quindi come una misura della "imperfezione" del componente: un transistor ideale avrebbe $I_B=0$. Questa corrente è generalmente dell'ordine dei microampere, ed il rapporto $I_C/I_B=h_{FE}$ è noto come guadagno di corrente statico.

Due contributi al rumore in un transistor bipolare sono dovuti allo *shot noise della corrente di base* I_B e di quella di collettore I_C , poiché i rispettivi portatori attraversano la barriera sulla giunzione di emitter. La densità del generatore di noise dovuto a I_B è

$$(9.77) \quad w_B = di_B^2/df = qI_B \quad A^2/Hz$$

che inietta rumore all'ingresso del componente. La densità del generatore di noise dovuto a I_C è

$$(9.78) \quad w_C = di_C^2/df = qI_C = kTg_m \quad A^2/Hz$$

essendo

$$(9.79) \quad g_m = qI_C/kT = I_C/V_T$$

la transconduttanza. In analogia alla (9.66), la (9.78) può anche essere scritta

$$(9.80) \quad w_C = 2kT a_n g_m \quad A^2/Hz$$

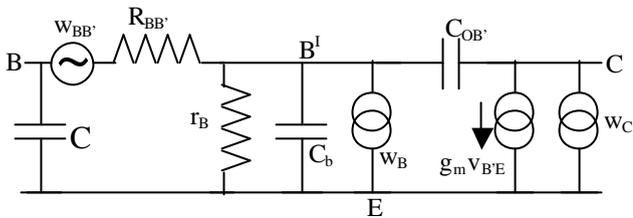


Fig. 9.29

con $a_n=0.5$. Questo contributo inietta rumore nel circuito di uscita del componente. Si noti che il rumore parallelo (9.77) di un BJT è di gran lunga maggiore di quello analogo (9.67) di un FET.

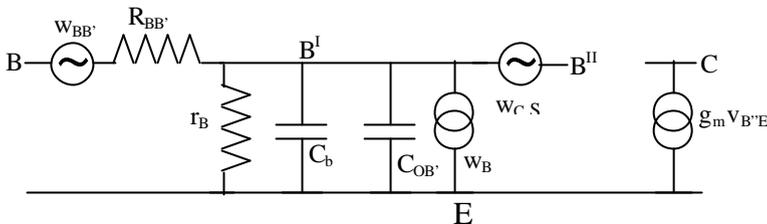


Fig. 9.30

Un altro contributo è dovuto al *rumore termico della resistenza ohmica della regione di base, $R_{BB'}$* , che nei componenti discreti è al più di qualche

decina di ohm, ma in realizzazioni monolitiche può essere di centinaia di ohm. La densità del generatore è

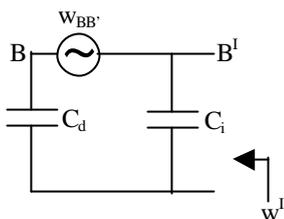


Fig. 9.31

$$(9.81) \quad w_{BB'} = dv_{BB'}^2/df = 2kTR_{BB'} \quad V^2/Hz$$

La **Fig. 9.29** mostra il circuito equivalente comprendente questi generatori di rumore.

Analogamente a quanto fatto per il FET, è conveniente riflettere in entrata l'effetto del generatore w_c : si ottiene

$$(9.82) \quad w_{C,S} = d\langle v_B^2 \rangle / df = 2kT a_n / g_m \quad V^2/Hz$$

Il circuito equivalente modificato è in **Fig. 9.30**, ove si è assunto che gli stadi successivi siano assimilabili ad un amplificatore a transresistenza ideale ($R_{in}=0$). Anche in questo caso, il noise di uscita è equivalente al noise termico di una resistenza $R_s = a_n / g_m$ in serie alla base.

Come per il FET, anche il BJT deve avere una grande g_m per ridurre il rumore serie. Se si confronta la (9.79) con la (9.71), si comprende che col BJT la situazione è più favorevole, a parità di corrente: infatti, mentre nel FET è $V_p=1-3$ V, nel BJT è $V_T=25$ mV a 300 K.

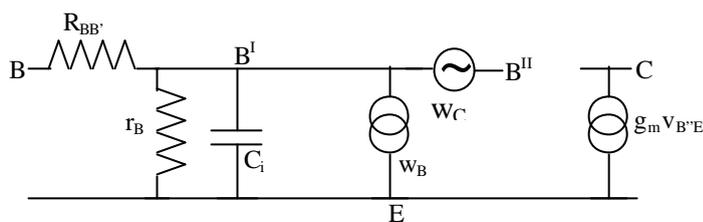


Fig. 9.32

Per poterci ricondurre al modello di Fig. 9.15, conviene accorpare i due generatori $w_{BB'}$ e $w_{C,S}$ in uno unico in serie al terminale di base.

Per far questo, inseriamo nella figura il modello del rivelatore, di capacità C_d , e consideriamo il contributo del solo generatore $w_{BB'}$ e troviamo l'equivalente di Thevenin della rete risultante, **Fig. 9.31**: in questa figura, C_d è la capacità del rivelatore. Per semplicità si è assunto $R_{BB'}=0$.

Si ha

$$(9.83) \quad w' = \frac{w_{BB'}}{(Z_D + Z_i)^2} Z_i^2 \approx w_{BB'} \frac{C_d^2}{(C_d + C_i)^2}$$

Allora, il circuito di Fig. 9.30 si può ridisegnare come in **Fig. 9.32** ove

$$(9.84) \quad w_S = w_{C,S} + w'$$

Il circuito in questa forma è direttamente riconducibile a quello di Fig. 9.15.

9.12 CALCOLO DI ENC

Questo calcolo deve tener conto del contributo delle singole sorgenti di rumore presenti nell'apparato di misura e descritte nei paragrafi precedenti. Si è già detto che queste sorgenti sono statisticamente indipendenti fra loro, per cui il loro contributo si somma quadraticamente. La fig. 9.15 riassume in due generatori l'effetto di tutte le sorgenti di noise esaminate finora: la densità spettrale del generatore parallelo, w_p , sarà data dalla somma delle densità di tutti i contributi parallelo, e analogamente per quello serie, w_s .

La **Tab. 9.1** riassume i contributi al rumore (densità bilaterali) dovuti al rivelatore, alla rete di polarizzazione e all'elemento attivo di front-end.

Si noti che al generatore parallelo contribuiscono solo sorgenti di noise bianco (termico o shot), mentre al generatore serie contribuiscono sia sorgenti bianche che di tipo 1/f. Per il momento, consideriamo solo il rumore bianco. Del rumore 1/f si parla nel paragrafo seguente.

Considerando la definizione (9.16) di ENC

$$ENC^2 = \sigma_o^2/h^2(t_m)$$

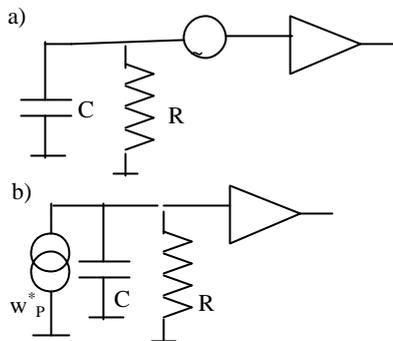


Fig. 9.33

Possiamo intanto notare che, nei casi di nostro interesse, $h(t)$ è una sensibilità alla carica, espressa in volt/coulomb. Se vogliamo che ENC sia espresso in coulomb, occorre che σ_o^2 sia espresso in volt². Nei paragrafi 9.3 e 9.4 abbiamo mostrato che il rumore shot e quello termico sono modellabili con un processo impulsivo di Poisson: possiamo quindi usare il teorema di Campbell della

varianza (8.54) per calcolare la tensione q.m. di uscita σ_o^2 , in V². Ricordiamo che questo teorema esprime la varianza della risposta come prodotto della densità spettrale bilaterale dell'eccitazione per l'integrale di $h^2(t)$ e, per quanto ora detto, l'integrale di $h^2(t)$ ha dimensioni [V²Q⁻² t]: occorre allora esprimere la densità spettrale del rumore in A²/Hz, per ottenere σ_o^2 nelle giuste dimensioni (V²).

Considerando il contributo del rumore parallelo (vedi 9.26), la (9.16) si scriverà

$$(9.85) \quad ENC_p^2 = w_p \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{h(t)}{h(t_m)} \right]^2 dt \quad \text{coulomb}^2$$

Per quel che riguarda il rumore serie, di densità w_s espressa in V^2/Hz , occorre trasformarlo in un generatore di corrente parallelo con il teorema di Norton, per quanto detto. Poiché vale il principio di sovrapposizione, la Fig. 9.15 è stata ridisegnata in **fig. 9.33a** con il solo generatore serie. Facciamo il modello di Norton della rete all'ingresso di $h(t)$. Detta $v\delta(t) \Leftrightarrow V$ una delta di tensione del rumore serie e la sua trasformata di Laplace, la corrente di corto circuito sarà $I(s) = sVC + V/R$. Ritornando nel dominio del tempo, $i(t) = v\delta'(t)C + v\delta(t)/R$. Il generatore di corrente equivalente consta quindi di due contributi, entrambi poissoniani: uno costituito dal un processo impulsivo di densità spettrale di potenza

$$(9.86) \quad \frac{di^2}{df} = \frac{1}{R^2} \frac{dv^2}{df} = \frac{w_s}{R^2}$$

l'altro costituito da un processo di doppietti di Dirac, avente densità

$$(9.87) \quad \frac{di^2}{df} = C^2 \frac{dv^2}{df} = C^2 w_s$$

La ENC dovuta al primo contributo è, per il teorema di Campbell

$$(9.88) \quad ENC_{1s}^2 = \frac{w_s}{R^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{h(t)}{h(t_m)} \right]^2 dt \quad \text{coulomb}^2$$

La ENC dovuta al secondo contributo è, per il il teorema di Campbell espresso nella (8.54a),

$$(9.89) \quad ENC_{2s}^2 = C^2 w_s \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{h'(t)}{h(t_m)} \right]^2 dt \quad \text{coulomb}^2$$

Si può dimostrare [Radeka] che questi due contributi sono statisticamente indipendenti.

Il contributo totale del rumore serie è pertanto

$$(9.90) \quad ENC_s^2 = C^2 w_s \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{h'(t)}{h(t_m)} \right]^2 dt + \frac{1}{\tau_{IN}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{h(t)}{h(t_m)} \right]^2 dt \right]$$

essendo $\tau_{IN} = RC$ la costante di tempo di entrata.

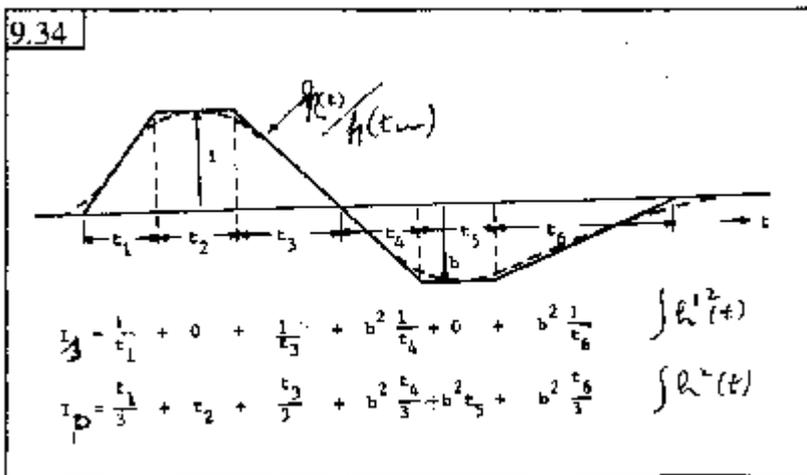
Infine, l'ENC totale del rumore bianco può essere espresso come

$$(9.91) \quad ENC^2 = C^2 w_s \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{h'(t)}{h(t_m)} \right]^2 dt + \left(\frac{1}{\tau_{IN}^2} + \frac{1}{\tau_c^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{h(t)}{h(t_m)} \right]^2 dt \right]$$

ove

$$(9.92) \quad \tau_c = C \sqrt{\frac{w_s}{w_p}}$$

è la costante di tempo del rumore.



Per quel che riguarda il calcolo degli integrali nella (9.91), occorre anzitutto ricordare che il segnale di corrente del generatore è generalmente approssimabile con una delta, per cui la forma del segnale di tensione osservato all'uscita

dell'apparato di misura (amplificatore + shaper) è la stessa di $h(t)$.

Inoltre, il calcolo dell'integrale è di molto semplificato se la funzione normalizzata $h(t)/h(t_m)$ viene approssimata con segmenti di retta, come mostrato nell'esempio di **Fig. 9.34**, ove si considera il caso generale di una risposta bipolare. In figura sono riportati i valori dei due integrali del rumore sui singoli segmenti dell'approssimazione.

È facile convincersi che l'approssimazione di Fig. 9.34 modifica poco il risultato: infatti, come appare

dalla (9.91), il valore di ENC è sensibile all'area di $h(t)$ più che alla sua forma. [Una causa di errore più importante nel calcolo di ENC è per es. la conoscenza approssimata dei parametri fisici del transistor e del rivelatore, specie a causa della presenza di componenti parassite, difficilmente misurabili].

Può essere utile definire la *resistenza equivalente del rumore bianco serie*, R_s , cioè una resistenza tale che

$$(9.93) \quad 2kTR_s = w_s$$

e la *resistenza equivalente del rumore bianco parallelo*, R_p

$$(9.94) \quad 2kT/R_p = w_p$$

Come esempio, consideriamo un apparato di misura $h(t)$ che usa e un front-end a BJT; si ha dalla Tab. 9.1

$$(9.95) \quad w_s = 2kT \left(\frac{0.5}{g_m} + R_{BB'} \frac{C_d^2}{(C_d + C_i)^2} \right) \quad \text{V}^2/\text{Hz}$$

$$(9.96) \quad w_p = qI_B + qI_L + \frac{2kT}{R} \quad \text{A}^2/\text{Hz}$$

Gli integrali del rumore vengono calcolati con la Fig. 9.34. Dalla (9.91), con le relazioni (9.95) e (9.96), si calcola ENC. Un esempio numerico viene dato più avanti.

9.13 ULTERIORI CONSIDERAZIONI SU ENC

Conviene esprimere in altre forme la carica equivalente di rumore, per mettere in evidenza l'influenza dei parametri fisici degli elementi attivi. Limitiamo ancora la nostra attenzione al solo rumore bianco.

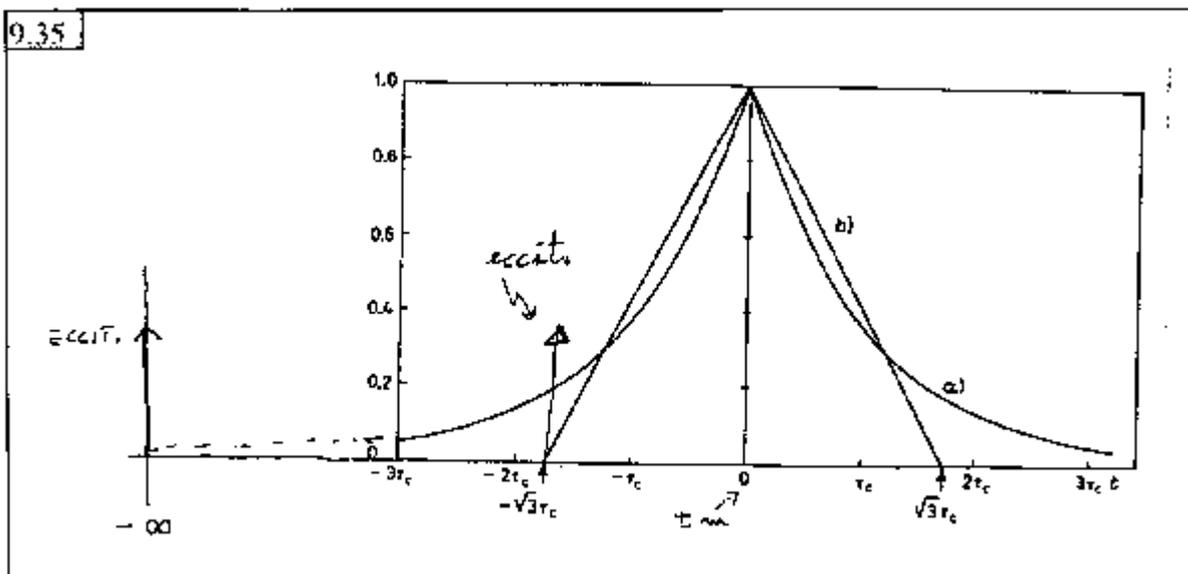
La prima domanda che sorge spontanea è quale $h(t)$ minimizza la ENC. Questo problema (che potrebbe essere risolto direttamente dalla (9.91) col calcolo variazionale) verrà affrontato nel capitolo seguente. Nel caso del rumore bianco, il risultato sarà, per una eccitazione applicata a $t = -\infty$

$$(9.97) \quad h_{opt}(t) = \exp(-|t|/\tau_c)$$

che è una funzione a cuspidi, mostrata in **Fig. 9.35**.

Si vedrà anche che il valore minimo di ENC risulta essere

$$(9.98) \quad ENC_{opt}^2 = 4kTR_s C^2 / t_c$$



Si osservi subito che un sistema con risposta ottima non è fisicamente realizzabile: infatti, fra l'eccitazione (impulso di carica da misurare) e il momento della misura t_m (quando la risposta raggiunge il picco) intercorre un tempo infinito. Si può vedere, tuttavia, che per es. l'approssimazione triangolare di $h(t)$ mostrata nella stessa figura comporterebbe un incremento di ENC solo del 7%.

È interessante studiare il comportamento del rumore bianco serie e di quello parallelo in funzione del

momento della misura t_m , che coincide con il picco della risposta. Se consideriamo uno shaping triangolare (isoscele), dalla (9.85) e tenendo conto della Fig. 9.34 si ha per il rumore parallelo

$$(9.99) \quad ENC_p^2 = \frac{2}{3} w_p t_m \quad \text{Coulomb}^2$$

Quindi, il rumore parallelo cresce con t_m .

Analogamente, per il rumore bianco serie si ha con la (9.90) (assumendo per semplicità $\tau_{IN} = \infty$)

$$(9.100) \quad ENC_s^2 = 2w_s \frac{C^2}{t_m} \quad \text{Coulomb}^2$$

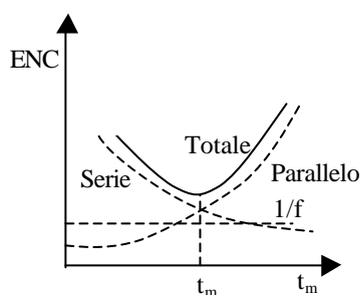


Fig. 9.36

cioè il rumore serie è una funzione decrescente di t_m .

Consideriamo ora il contributo dato a ENC dal rumore $1/f$. Dalla (9.37) si vede che l'integrale dello spettro (e quindi la varianza) di tale noise tra f e f_h (frequenze di taglio dello shaper) va come $\ln f_h/f$. Ora, ci si può convincere che f_h e f_l sono entrambe $\propto 1/t_m$:

infatti, se si vuole aumentare t_m , (cioè si vogliono considerare frequenze più basse), occorre diminuire f . Se si vuole diminuire t_m (cioè si vogliono considerare frequenze più alte), occorre aumentare f_h . Segue che la carica equivalente di rumore $1/f$ è indipendente dal tempo t_m di shaping del filtro.

Nel paragrafo seguente si fa vedere che una espressione approssimata della ENC del rumore $1/f$, che va bene per un filtro semigaussiano, che è il più comunemente usato, è

Nel paragrafo seguente si fa vedere che una espressione approssimata della ENC del rumore $1/f$, che va bene per un filtro semigaussiano, che è il più comunemente usato, è

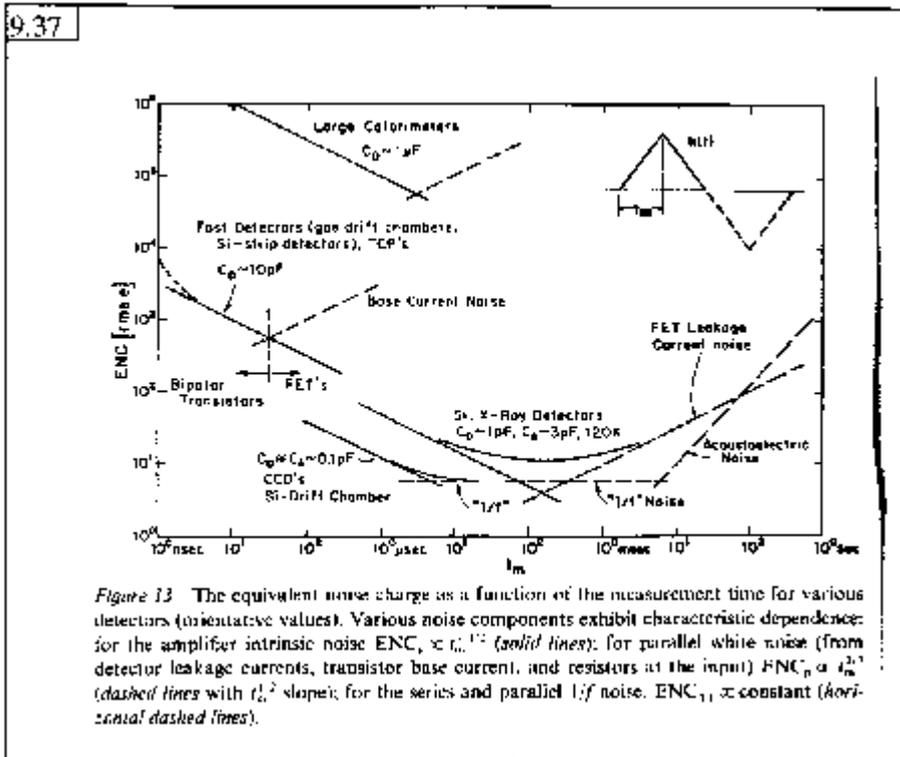
$$(9.101) \quad ENC_f^2 \approx 3.3AC^2$$

essendo A la costante del rumore $1/f$, vedi (9.72a).

La Fig. 9.36 mostra gli andamenti delle tre componenti e l'ENC totale: appare chiaro che l'ENC totale ha un minimo per un particolare valore di t_m (quando $ENC_s = ENC_p$). Per es., nello shaping triangolare si ha dalla Fig. 9.35 (oppure eguagliando (9.99) e (9.100))

$$(9.102) \quad t_{m,opt} = \sqrt{3\tau_c}$$

La Fig. 9.37 mostra ENC in funzione di t_m per varie classi di rivelatori.



Si noti che il perfezionamento della tecnologia costruttiva dei componenti e dei rivelatori (minore L , minore I_G o I_B ,...) ha l'effetto di diminuire il rumore parallelo, che è essenzialmente dovuto a queste "imperfezioni". Il rumore serie è invece essenzial-

mente di natura intrinseca e non è legato ai limiti della tecnologia. Dalla Fig. 9.36 appare che, col diminuire del noise parallelo, il $t_{m,opt}$ tende a spostarsi verso valori sempre più grandi, spesso non utilizzabili in condizioni di alto rate di eventi. In queste condizioni è giocoforza lavorare con t_m minore del valore ottimo: allora, il rumore è prevalentemente di tipo serie e in questo caso si può vedere che la $h_{opt}(t)$ è proprio una funzione triangolare (vedi cap. 10).

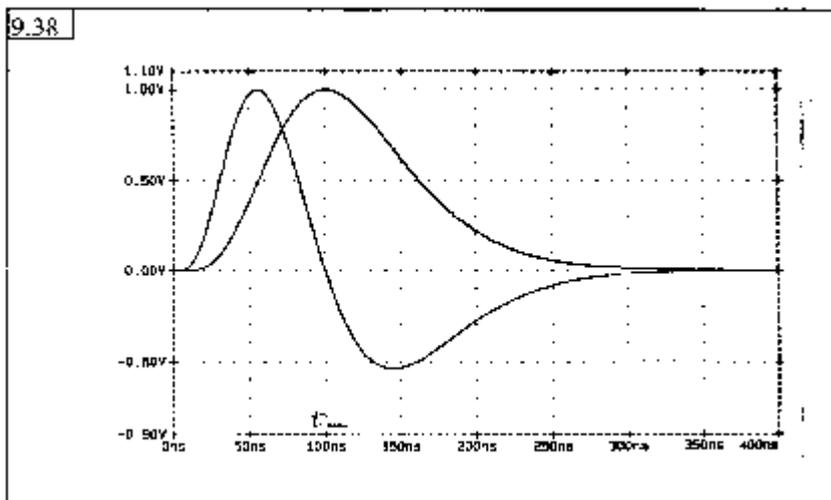
Il rumore serie merita quindi particolare attenzione. Dalle (9.100) e (9.93), ricordando che $C=C_d+C_i$, $R_s=a_n/g_m$, $t_e=C_i/g_m$ si ha

$$(9.103) \quad ENC_s^2 = 4kT a_n C_d \left(\left(\frac{C_d}{C_i} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{C_i}{C_d} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \frac{t_e}{t_m}$$

Il termine in parentesi è il *fattore di disadattamento capacitivo* tra rivelatore e amplificatore: è faci-

le vedere che ENC_s è minimo quando $C_d=C_i$ (capacità adattate), ottenendo

$$(9.104) \quad ENC_{s,opt}^2 = 16 kT a_n C_d \frac{t_e}{t_m}$$



Per es., per un FET ($a_n=2/3$) con $g_m=10$ mA/V, $C_d=10$ pF, $t_m=100$ nsec si avrebbe $ENC_{s,opt}=600$ elettroni rms. È utile ricordare che quando C_d (capacità del “generatore”) è uguale a C_i (capacità del “carico”), si è in condizioni di massimo

trasferimento di energia dal generatore al carico: cioè il segnale che viene iniettato nell’amplificatore sarà massimo. Pertanto, con l’adattamento capacitivo si massimizza il segnale e si minimizza il rumore serie (quello parallelo non è influenzato dal mismatch).

È interessante interpretare il rumore serie dal punto di vista del teorema dell’equipartizione dell’energia. In condizioni di matching capacitivo, $C_d = C_i$, l’energia del rumore serie immagazzinata in $C=C_d+C_i$ (quindi, il minimo segnale rivelabile) è, dalla (9.104)

$$(9.105) \quad \frac{Q^2}{2C} = \frac{ENC_{s,opt}^2}{2C} = 4 kT a_n \frac{t_e}{t_m}$$

Tipicamente, t_m è 10^2-10^4 volte t_e . Si è visto in precedenza che, per il teorema dell’equipartizione dell’energia, l’energia del rumore termico immagazzinata in C è $kT/2$, molto maggiore della (9.105)! La giustificazione è nel fatto che l’energia del rumore termico $kT/2$ si riferisce a *tutto* lo spettro delle frequenze, mentre quella del rumore serie (9.105) considera *solo il contributo nella banda passante dello shaper*, che è ottimizzata proprio per ridurre il noise, cosicché il rumore che appare

all'uscita dello shaper è molto minore di $kT/2$.

Ricordiamo infine che la differenza tra le ENC dei vari shapers è in genere limitata (si veda quanto detto a proposito della forma ideale a cuspid e quella triangolare, Fig. 9.35). Questo torna comodo,

TABLE 9.2

Shaping	Noise weighting function	Equivalent noise charge r.m.s. coulomb	$\tau_{M,opt}$	$\frac{ENC_{opt}}{(4a_w b_w)^{1/2} (C_D + C_i)^{1/2}}$
ideal infinite cusp		$(4a_w b_w)^{1/2} (C_D + C_i)^{1/2}$	∞	1
truncated cusp		$\frac{(4a_w b_w)^{1/2} (C_D + C_i)^{1/2}}{(1 - \exp[-2(\tau_M/\tau_c)])^2}$	∞	1
triangular		$\left[2a_w (C_D + C_i)^{1/2} \frac{1}{\tau_M} + \frac{b_w}{3} \tau_M \right]^{1/2}$	$\sqrt{3} \left(\frac{a_w}{b_w} \right)^{1/2} (C_D + C_i) \tau_c$ $\sqrt{3} \tau_c$	1.07
trapezoidal		$\left[2a_w (C_D + C_i)^{1/2} \frac{1}{\tau_M} + b_w \left(\frac{2}{3} \tau_M + \tau_M \right) \right]^{1/2}$	$\sqrt{3} \left(\frac{a_w}{b_w} \right)^{1/2} (C_D + C_i) \tau_c$ $\sqrt{3} \tau_c$	$1.07 \left[1 + 0.43 \frac{\tau_M}{\tau_c} \right]^{1/2}$
EC-CR $R_i C_i = R_s C_s = \tau_c$		$\frac{a_w}{2} \left[a_w (C_D + C_i)^{1/2} \frac{1}{\tau_M} + b_w \tau_M \right]^{1/2}$	$\left(\frac{a_w}{b_w} \right)^{1/2} (C_D + C_i) \tau_c$	1.36
piecewise parabolic		$\left[\frac{8}{3} a_w (C_D + C_i)^{1/2} \frac{1}{\tau_M} + \frac{14}{15} b_w \tau_M \right]^{1/2}$	$2 \sqrt{\frac{3}{7}} \left(\frac{a_w}{b_w} \right)^{1/2} (C_D + C_i) \tau_c$	1.25
sinusoidal lobe		$\left[\frac{\pi^2}{4} a_w (C_D + C_i)^{1/2} \frac{1}{\tau_M} + b_w \tau_M \right]^{1/2}$	$\frac{\pi}{2} \left(\frac{a_w}{b_w} \right)^{1/2} (C_D + C_i) \tau_c$	1.25

in quanto permette di soddisfare altri criteri. Per es. si può vedere che la forma triangolare, oltre a difficoltà realizzative, si presta poco a misure accurate di ampiezza, specie se il segnale primario non può essere modellato con una delta, cioè se la carica viene rilasciata in un tempo non trascurabile rispetto a t_m (errore balistico). Una forma che attenua questo problema ed è facilmente realizzabile è

quella semigaussiana, ottenibile facendo passare il segnale in una rete RC differenziatrice e in n reti RC integratrici. Essa dà prestazioni praticamente eguali a quella triangolare (stessa FWHM) per il rumore serie, mentre ha una ENC per il rumore parallelo solo il 6% maggiore. Nel paragrafo seguente si fa l'analisi di uno shaper semigaussiano.

La **Fig. 9.38** mostra una tipica forma semigaussiana normalizzata, ottenuta con una differenziazione e 5 integrazioni con costanti di tempo eguali. È anche mostrata quella ottenuta con 4 integrazioni e 2 differenziazioni: questa è utile quando si effettuano misure di timing, cioè quando si vuole localizzare sull'asse dei tempi il picco dell'impulso. Si veda il capitolo 13. (Si noti che, quando il tempo di misura t_m è breve, per realizzare le integrazioni è sufficiente utilizzare le capacità delle giunzioni dei transistor).

La **Tab. 9.2** mostra le caratteristiche di alcuni shapers, paragonate a quelle della cuspid.

9.14 LO SHAPER SEMIGAUSSIANO

La **Fig. 9.39** mostra schematicamente un front-end costituito da un amplificatore di carica $h_1(t)$ e da

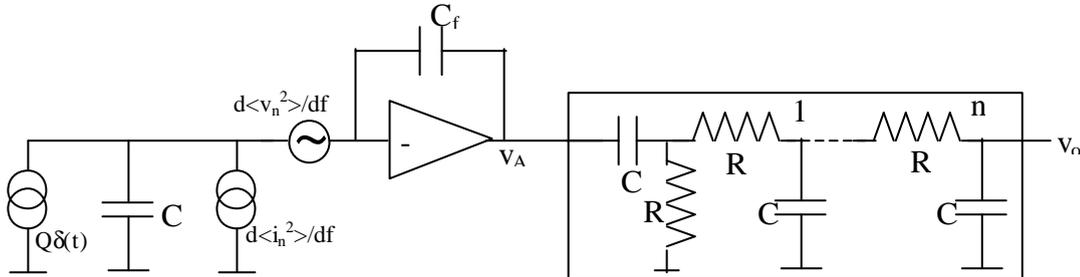


Fig. 9.39

una rete di shaping $h_2(t)$ costituita da un differenziatore e da n integratori, tutti aventi la stessa costante di tempo τ_o (si potrebbe vedere che questa è la condizione perché ENC sia minima).

Assumiamo che l'elemento attivo di ingresso sia un MOS, che l'amplificatore base sia ideale ($A \sim \infty$) e che i poli dello shaper siano non interagenti.

Dalla Tab. 9.1, considerando densità unilaterali, si ha

$$(9.106) \quad \frac{di_n^2}{df} = 2qI_L + \frac{4kT}{R} \quad A^2/Hz$$

essendo I_L la corrente di leakage del rivelatore e R la resistenza complessiva delle reti di polarizzazione. Si trascura il contributo di I_G . Inoltre:

$$(9.107) \quad \frac{dv_n^2}{df} = \frac{8}{3} kT \frac{1}{g_m} + \frac{A}{f} \quad V^2/Hz$$

ove A è data dalla (9.72a).

Dalla Fig. 9.39, usando il principio di sovrapposizione, si può calcolare la densità del rumore ed il segnale all'uscita dell'amplificatore. Per il rumore si ha:

$$(9.108) \quad \frac{dv_{An}^2}{df} = \left[\frac{C}{C_f} \right]^2 \frac{dv_n^2}{df} + \left[\frac{1}{sC_f} \right]^2 \frac{di_n^2}{df} \quad \text{V}^2/\text{Hz}$$

[questo risultato si ottiene dalla (8.43) osservando che, essendo $A \sim \infty$, per il generatore di rumore serie è $H_1(s) = -Z_{Cf}/Z_C = -C/C_f$; per quello parallelo è invece $H_1(s) = -1/sC_f$].

Il segnale di uscita dall'amplificatore, dovuto ad una delta di carica $Q=1$ elettrone è:

$$(9.109) \quad v_A(s) = -1/sC_f \text{ volt/elettrone}$$

La funzione di trasferimento dello shaper è

$$(9.110) \quad H_2(s) = \frac{s\tau_o}{1+s\tau_o} \left[\frac{G_o}{1+s\tau_o} \right]^n$$

essendo G_o il guadagno in dc di ciascun integratore (che può essere realizzato anche con un filtro attivo).

La densità del rumore di uscita dallo shaper è, dalla (8.43)

$$(9.111) \quad \frac{dv_{on}^2}{df} = \frac{dv_{An}^2}{df} |H_2(\omega)|^2 \quad \text{V}^2/\text{Hz}$$

ed il rumore integrato di uscita è

$$(9.112) \quad v_{on}^2 = s_o^2 = \int_0^\infty \frac{dv_{An}^2}{df} |H(\omega)|^2 df \quad \text{V}^2$$

(si noti che, con il teorema di Parseval, questo risultato è identico al teorema di Campbell). Il segnale all'uscita dello shaper è

$$(9.113) \quad V_o(s) = H_2(s)/sC_f \quad \text{Volt/elettrone}$$

La sua trasformata inversa dà

$$(9.114) \quad v_o(t) = \frac{G_o^n n^n}{n! C_f} \left(\frac{t}{t_m} \right)^n e^{-\frac{t}{t_m}} \quad \text{V/elettrone}$$

ove $t_m = n\tau_o$. La tensione di uscita $v_o(t)$ ha una forma semigaussiana (da cui il nome del filtro) e si può vedere (derivando rispetto a t la (9.114) ed eguagliando a 0) che il valore max viene raggiunto a t_m , e vale

$$(9.115) \quad v_{o,max} = v_o(t_m) = \frac{G_o^n n^n}{n! C_f} e^{-n} \quad \text{V/elettrone}$$

t_m viene chiamato peaking time del filtro e coincide col momento della misura.

ENC^2 , in elettroni², è dato dal rapporto di (9.112) col quadrato di (9.115):

$$(9.116) \quad ENC^2 = \frac{v_{on}^2}{v_{o,max}^2} = \frac{v_{on,p}^2 + v_{on,s}^2 + v_{on,f}^2}{v_{o,max}^2} \quad \text{elettroni}^2$$

avendo separato i contributi del rumore bianco parallelo, del rumore bianco serie e del rumore 1/f. Si può scrivere:

(9.117)

$$ENC^2 = \frac{\int_0^\infty (2qI_L + \frac{4kT}{R}) \frac{1}{\omega^2 C^2} |H_2(\omega)|^2 d\omega}{v_{o,max}^2} + \frac{\int_0^\infty \frac{8kT}{3g_m} \left(\frac{C}{C_f} \right)^2 |H_2(\omega)|^2 d\omega}{v_{o,max}^2} + \frac{\int_0^\infty \frac{A}{f} \left(\frac{C}{C_f} \right)^2 |H_2(\omega)|^2 d\omega}{v_{o,max}^2}$$

Il calcolo dell'integrale al numeratore e quindi del rapporto dà, nei tre casi:

- Rumore bianco parallelo

$$(9.118) \quad v_{on,p}^2 = (2qI_L + \frac{4kT}{R}) \frac{G_o^{2n} t_m \mathbf{b}(\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})}{4pnC_f^2}$$

$$(9.119) \quad ENC_p^2 = \left(2qI_L + \frac{4kT}{R} \right) \frac{t_m \mathbf{b}\left(\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) n!^2 e^{2n}}{2\mathbf{p} \quad 2nn^{2n}}$$

ove $\beta(\cdot)$ è la funzione beta di Eulero:

$$\beta(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt$$

- Rumore bianco serie

$$(9.120) \quad v_{on,s}^2 = \frac{8}{3} kT \frac{1}{g_m} \left(\frac{C}{C_f} \right)^2 \frac{n G_o^{2n} \mathbf{b}\left(\frac{3}{2}, n - \frac{1}{2}\right)}{4\mathbf{p}_m}$$

$$(9.121) \quad ENC_s^2 = \frac{8}{3} kT \frac{1}{g_m} C^2 \frac{n^2 \mathbf{b}\left(\frac{3}{2}, n - \frac{1}{2}\right) n!^2 e^{2n}}{2\mathbf{p}_m \quad 2nn^{2n}}$$

- Rumore 1/f

$$(9.122) \quad v_{on,f}^2 = A \left(\frac{C}{C_f} \right)^2 \frac{G_o^{2n}}{2n}$$

$$(9.123) \quad ENC_f^2 = AC^2 \frac{n!^2 e^{2n}}{2n n^{2n}}$$

L'ENC totale è

$$(9.124) \quad ENC_{tot} = \sqrt{ENC_s^2 + ENC_p^2 + ENC_f^2} \quad \text{elettroni rms}$$

La **Tab. 9.3** mostra i valori di interesse per vari n.

Come già sottolineato nel paragrafo precedente, si osserva che:

- l'ENC parallelo è una funzione crescente del tempo di misura t_m ; dipende debolmente da n. In pratica, scegliere $n > 2$ non dà grande vantaggio.

- L'ENC serie è una funzione decrescente di t_m ; cresce con la capacità totale di entrata e decresce all'aumentare della transconduttanza del transistor di entrata; è praticamente indipendente da n .
- L'ENC del rumore $1/f$ è indipendente da t_m ; dipende fortemente dai parametri del processo, trami-

Tab. 9.3

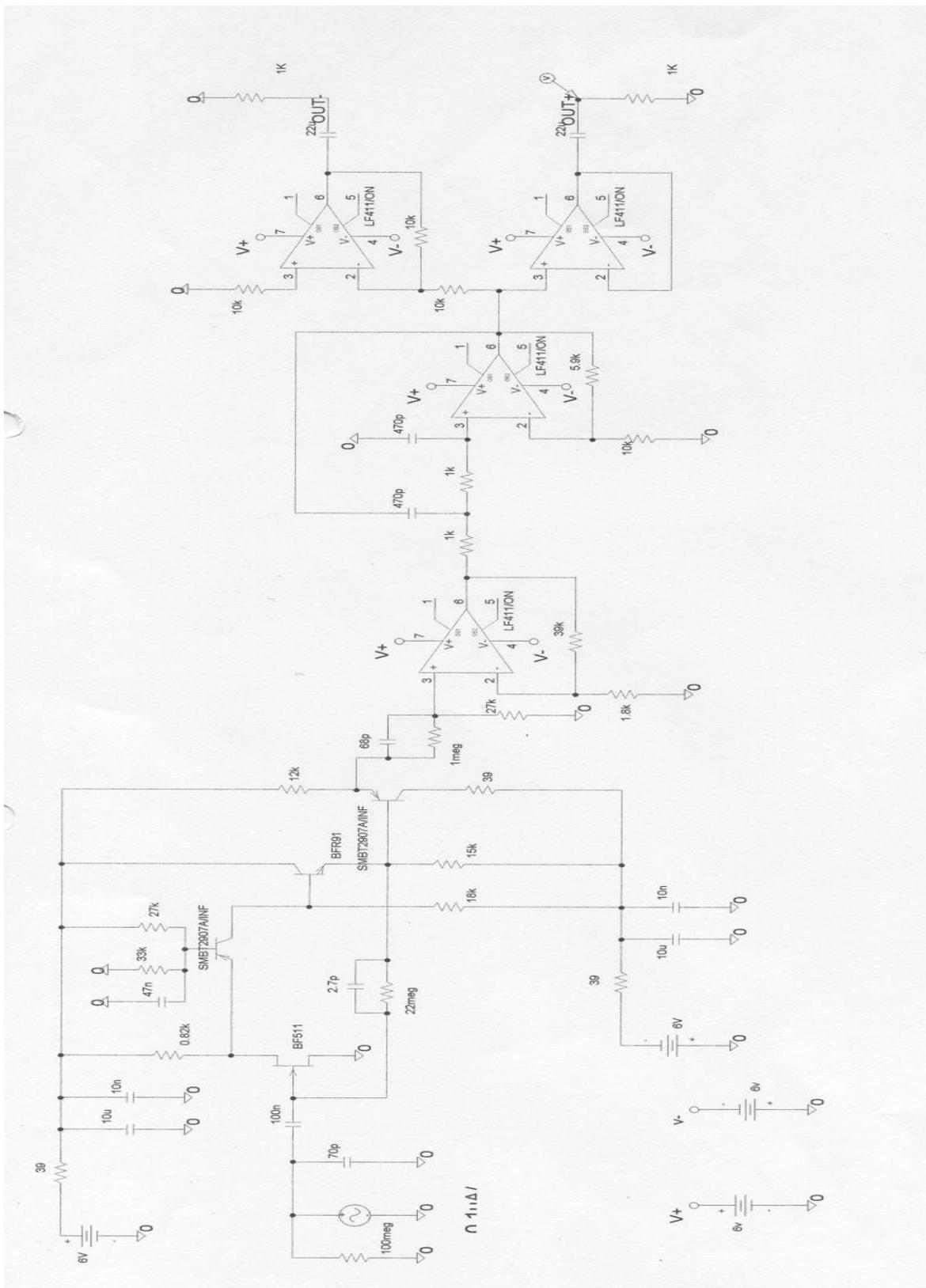
n	1	2	3	4	5	6	7
$B\left(\frac{3}{2}, n - \frac{1}{2}\right)$	1.57	0.39	0.20	0.12	0.086	0.063	0.051
$B\left(\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right)$	1.57	1.17	0.98	0.86	0.77	0.71	0.66
$\frac{n! 2^{2n}}{n^{2n}}$	7.39	13.64	19.92	26.20	32.48	38.76	45.04
$\frac{1}{2n} - \frac{\eta^{1/2} e^{-2n}}{n^{2n}}$	3.7	3.41	3.32	3.28	3.25	3.23	3.22

te A. Poiché K_f e C_{ox} sono fissati una volta scelto il processo, l'ottimizzazione del progetto ai fini del rumore $1/f$ consiste nello scegliere opportunamente le dimensioni geometriche W, L del transistor. Dalla Tab. 9.3 si vede che una espressione approssimata, per $n > 1$, è:

$$(9.125) \quad ENC_f^2 \sim 3.3AC^2$$

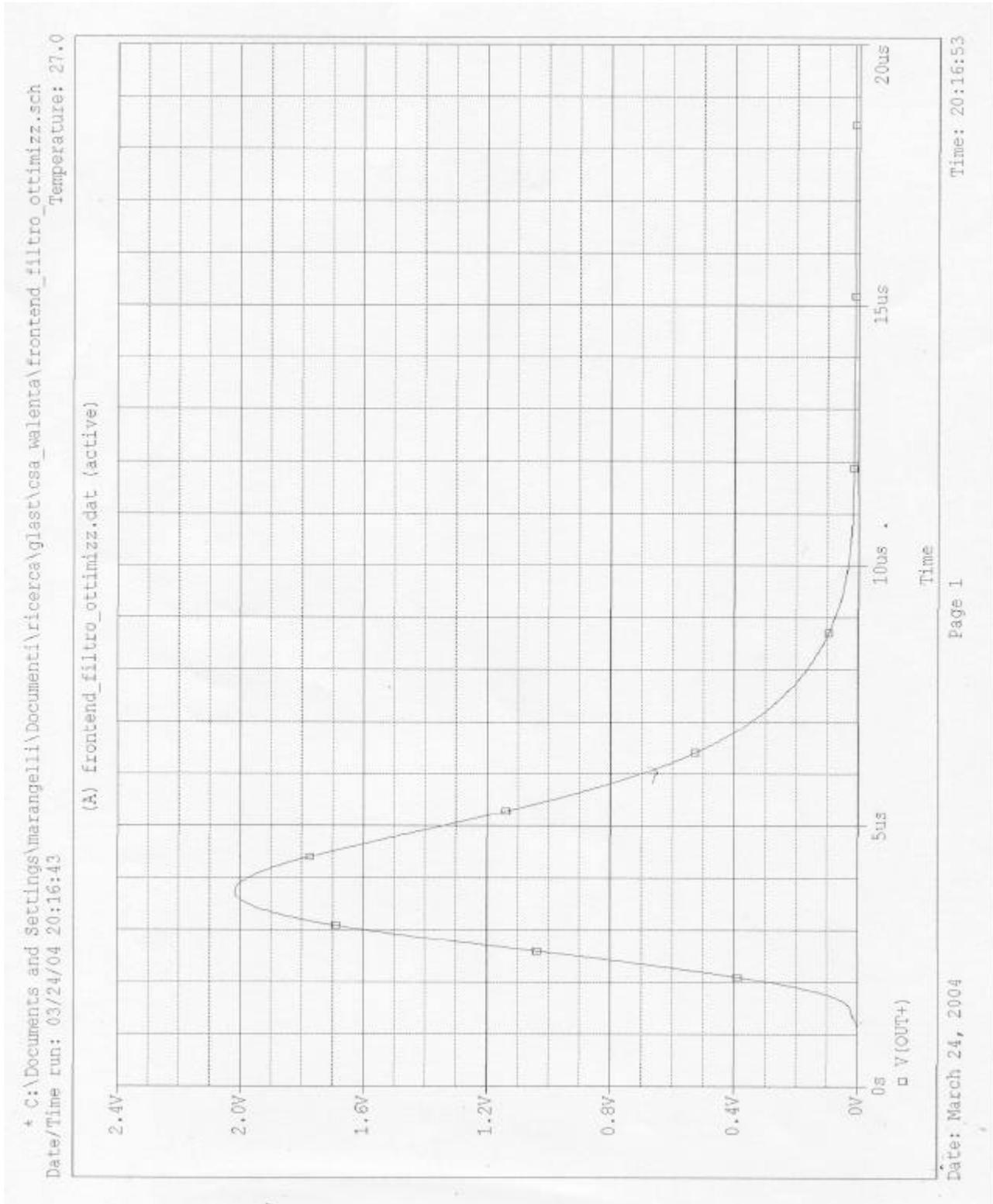
9.15 UN ESEMPIO DI CALCOLO DI ENC

La Fig. 9.40 mostra lo schema del front-end usato con un rivelatore a fotodiodo, polarizzato inver-

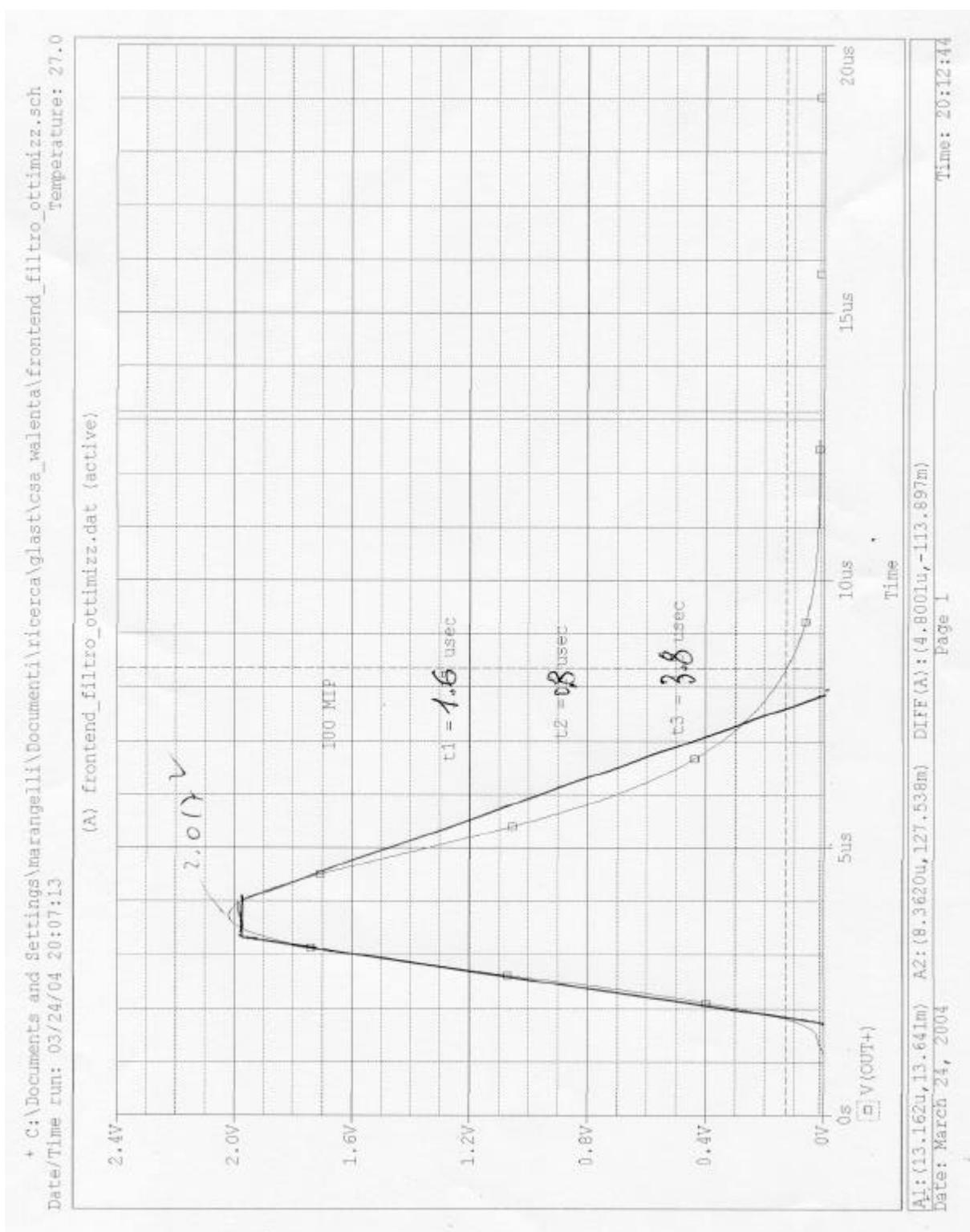


samente tramite una $R=100$ Meg. La Cd del fotodiode, quotata da costruttore, è 70 pF.

La Fig. 9.41a mostra la risposta ad una delta di 100 MIP (240000 elettroni).



La Fig. 9.41b mostra l'approssimazione lineare a tratti della risposta.



I dati su cui basare il calcolo di ENC sono i seguenti:

- 1) la capacità di ingresso del FET, quotata dal costruttore, è 5 pF; aggiungendo i 2.7 pF di feedback e 2.3 pF parassiti, si ha una capacità totale $C = 80$ pF.
- 2) La corrente di drain del FET è 2.1 mA; dalle caratteristiche fornite dal costruttore, si ha $g_m = 4$ mA/V = $4 \cdot 10^{-3}$ A/V
- 3) La R totale è 100 MEG // 22 MEG = 18 MEG
- 4) $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ joule/°K; $T = 300$ °K

Si ha, allora:

- 5) $w_s = 1.4kT/g_m = 1.45 \cdot 10^{-18}$ V²/Hz
- 6) $w_p = 2kT/R = 4.6 \cdot 10^{-28}$ A²/Hz
- 7) il primo integrale del rumore dà $I_1 = 1/t_1 + 0 + 1/t_3 = 0.89 \cdot 10^6$ sec⁻¹
- 8) il secondo integrale del rumore dà $I_2 = t_1/3 + t_2 + t_3/3 = 2.6 \cdot 10^{-6}$ sec
- 9) $\tau_{IN} = RC = 1.44$ msec
- 10) $\tau_c = 4.5$ usec $\ll \tau_{IN}$
- 11) dalla (9.91), assumendo τ_{IN} infinito, si ha

$$\begin{aligned} ENC^2 &= C^2 w_s I_1 + w_p I_2 = 6.4 \cdot 10^{-21} \cdot 1.45 \cdot 10^{-18} \cdot 0.89 \cdot 10^6 + 4.6 \cdot 10^{-28} \cdot 2.6 \cdot 10^{-6} \text{ coul}^2 \\ &= 9.46 \cdot 10^{-33} \text{ coulomb}^2 \end{aligned}$$

12) in elettroni²

$$= 9.46 \cdot 10^{-33} / 2.56 \cdot 10^{-38} \text{ elettroni}^2 = 3.7 \cdot 10^5 \text{ elettroni}^2$$

13) in elettroni

$$ENC = 608 \text{ elettroni rms}$$

Il simulatore dà $ENC = 650$ elettroni rms.

Le misure in laboratorio danno ~450 elettroni, probabilmente a causa di una più elevata transconduttanza della partita di FET utilizzata.

9.16 MISURA SPERIMENTALE DI ENC

Un metodo per misurare ENC è illustrato nella **Fig. 9.42**.

Un generatore di impulsi G, di ampiezza calibrata v_i e frequenza f_i , inietta nel preamplificatore (la cui

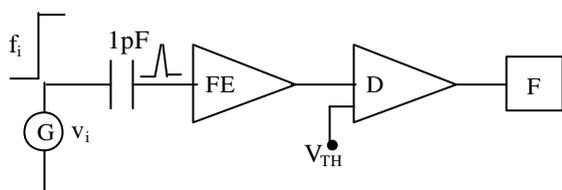


Fig. 9.42

Z_i è assunta $=0$) la carica $q_i=C_T v_i$. Se C_T è molto piccola (tipicamente 1 pF), l'eccitazione è sostanzialmente una delta. Se assumiamo il rumore gaussiano, la distribuzione di ampiezza degli impulsi all'uscita del preamplificatore sarà come in **Fig.**

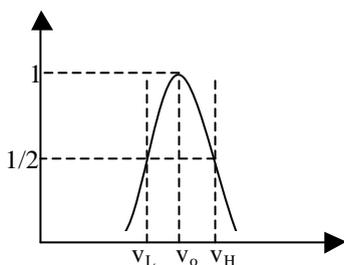


Fig. 9.43

9.43. Il preamplificatore è seguito da un discriminatore di ampiezza D, assunto non rumoroso. Se la soglia del discriminatore viene variata fino ad eguagliare l'ampiezza v_o del segnale di uscita dal PA, la probabilità che tale segnale superi la soglia sarà del 50% (area della gaussiana da V_{th} a ∞). Pertanto, in queste condizioni, il frequenzimetro F posto all'uscita del discriminatore registrerà impulsi con una

frequenza di conteggio $f_o=f_i/2$. In queste condizioni, il rapporto V_{th}/q_i dà la sensibilità alla carica del PA.

Se ora ricordiamo che $FWHM = 2.35\sigma$ segue che, spostando la soglia del discriminatore a

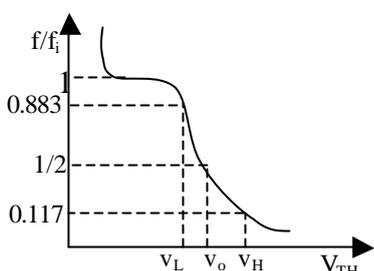


Fig. 9.44

$V_H=v_o+FWHM/2$, la frequenza di uscita diventerà $f_o=0.117f_i$, essendo 0.117 l'area della gaussiana (normalizzata) tra V_H e ∞ . Analogamente, ponendo la soglia a $V_L = v_o - FWHM/2$, si avrà $f_o = 0.883f_i$. La **Fig. 9.44** mostra una tipica maniera di rappresentare le misure. Si noti che se $V_{TH} \rightarrow 0$ allora $f_o \rightarrow \infty$ poiché il di-

scriminatore viene triggerato dal rumore. Con questo metodo, cioè con misure di frequenza, è possibile determinare i valori di V_H e V_L . Essendo poi

$$V_H - V_L = 2.35\sigma_o$$

si può ricavare σ_o , cioè la standard deviation della tensione di rumore di uscita del preamplificatore.

La s.d. della carica di entrata, e quindi ENC, si ottiene dividendo per la sensibilità alla carica, cioè

$$ENC = \frac{\sigma_o}{V_{TH}/q_i} = \frac{C_T v_i}{V_{TH}} \frac{V_H - V_L}{2.35}$$

Si noti, tuttavia, che per es. nel CLC425 si ha tipicamente $\sigma_o = 320 \mu V_{\text{eff}}$ per cui $V_H - V_L$ è dell'ordine di 1 mV! Per effettuare la misura, occorrerebbe un discriminatore la cui soglia possa essere variata con la precisione della decina di μV ; ma questo è al di là delle possibilità di un discriminatore commerciale. Il problema può essere risolto inserendo, tra il preamplificatore ed il discriminatore, un amplificatore di tensione a larga banda il quale, trovandosi a valle del p.a. non altera le caratteristiche del noise. Per es. con l'amplificatore Lecroy 612AM, che ha un guadagno di 40 ed una BW di 140 Mhz, si avrebbe $V_H - V_L \sim 40$ mV. Con un discriminatore Lecroy623B è possibile regolare agevolmente la soglia con precisione di ~ 1 mV: si possono pertanto rilevare circa 40 punti in Fig. 9.44, più che sufficienti per una buona misura.

BIBLIOGRAFIA

- [1] C. Motchenbacher, F. Fitchen, Low-noise electronic design. J. Wiley, 1973.
- [2] M.J. Buckingham, Noise in electronic devices and systems. J. Wiley, 1983.
- [3] V. Radeka, Low-noise techniques in detectors. In 'Annual Rev. of Nucl. Partic. Science, 1988, pag. 217-277.
- [4] E. Gatti, P. Manfredi, Processing the signals from solid-state detectors in elementary-particle physics. La Rivista del Nuovo Cimento, vol. 9, 1986.
- [5] S.M. Sze, Physics of semiconductor devices. J. Wiley, 1981.