

CAPITOLO 8

ANALISI SPETTRALE DI UN SEGNALE CASUALE STAZIONARIO

8.1- INTRODUZIONE

Si è visto nei capitoli precedenti come un processo random possa essere descritto nel dominio del tempo mediante medie statistiche, e in particolare si è vista l'importanza di una di queste medie, la funzione di correlazione.

Ci si chiede ora se, analogamente al caso deterministico, non sia possibile stabilire un dualismo fra dominio del tempo e dominio delle frequenze anche per segnali random.

A prima vista, questo non sembra possibile in quanto avendo il segnale $x(t, \xi_o)$ energia infinita (per la supposta stazionarietà) esso non ammette trasformata di Fourier. D'altro canto, l'ipotesi di stazionarietà è essenziale, come apparirà chiaro tra poco.

L'ostacolo può essere aggirato in maniera analoga al caso deterministico, come ora si fa vedere.

Sia $x(t) = x(t, \xi_o)$ una realizzazione di un processo random stazionario. Definiamo il segnale troncato

$$(8.1) \quad x_T(t) = \begin{cases} x(t) & -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

che ha energia finita e quindi ammette T.F.

$$(8.2) \quad x_T(t) \Leftrightarrow X_T(\omega)$$

Per il teorema di Parseval (3.31)

$$(8.3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega)|^2 d\omega$$

Come già visto a suo tempo, $|X_T(\omega)|^2$ è la densità spettrale di energia di $x_T(t)$. La potenza media di $x_T(t)$ è

-8.2-

$$(8.4) \quad \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X_T(\mathbf{w})|^2}{T} d\mathbf{w}$$

e la quantità

$$(8.5) \quad S_{xx}^T(\mathbf{w}) = \frac{|X_T(\mathbf{w})|^2}{T}$$

è la densità spettrale di potenza, o semplicemente lo spettro di potenza, di $x_T(t)$.

Se assumiamo che il segnale (non troncato) $x(t)$ abbia potenza finita, cioè

$$(8.6) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T^2(t) dt < \infty$$

e se ammettiamo di poter scambiare l'operazione di integrale con quella di limite, dalla (8.4) segue che esiste il limite

$$(8.7) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(\mathbf{w})|^2}{T} = S_{xx}(\mathbf{w})$$

e lo chiamiamo densità spettrale (o spettro) di potenza del segnale $x(t)$.

Si noti che per calcolare $S_{xx}(\omega)$ occorre conoscere il comportamento passato, presente e futuro del segnale $x(t)$. Pertanto lo spettro di potenza ha significato solo se si possono fare previsioni statistiche sul comportamento del segnale: di qui la necessità dell'ipotesi di stazionarietà, che permette di limitare l'esame del segnale ad un intervallo di tempo T finito, purché convenientemente grande.

La (8.7) è la densità spettrale di una particolare realizzazione ξ del processo $x(t)$, cioè $S_{xx}(\omega, \xi)$; essa è anche la densità del processo se questo è ergodico. Se il processo non è ergodico, la sua densità spettrale può essere definita come media sull'insieme delle realizzazioni

$$(8.8) \quad S_{xx}(\omega) = E\{S_{xx}(\omega, \xi)\}$$

8.2 - IL TEOREMA DI WIENER-KINTCHINE

Consideriamo ancora un processo stazionario al II ordine ergodico: possiamo quindi riferirci ad una singola realizzazione.

La funzione di autocorrelazione del segnale $x(t)$ è

$$C_{xx}(\mathbf{t}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t+\mathbf{t})dt$$

Se consideriamo il segnale troncato $x_T(t)$, definito in (8.1), si ha

$$C_{xx}^T(\mathbf{t}) = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t)x_T(t+\mathbf{t})dt$$

Prendiamo la T.F. di entrambi i membri

$$\begin{aligned} T.F.\{C_{xx}^T(\mathbf{t})\} &= T.F.\left\{\frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t)x_T(t+\mathbf{t})dt\right\} \\ &= T.F.\left\{\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \bullet\right\} \\ &= T.F.\left\{\frac{1}{T} [x_T(t)^* x_T(-t)]\right\} \\ &= \frac{1}{T} [X_T(\mathbf{w}) X_T^*(\mathbf{w})] \end{aligned}$$

e quindi in definitiva

$$(8.9) \quad T.F.\{C_{xx}^T(\mathbf{t})\} = \frac{|X_T(\mathbf{w})|^2}{T} = S_{xx}^T(\mathbf{w})$$

Essendo

-8.4-

$$\lim_{T \rightarrow \infty} C_{xx}^T(\mathbf{t}) = C_{xx}(\mathbf{t})$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} S_{xx}^T(\mathbf{w}) = S_{xx}(\mathbf{w})$$

segue

$$(8.10) \quad \text{T.F.}\{C_{xx}(\tau)\} = S_{xx}(\omega)$$

o anche

$$(8.10a) \quad C_{xx}(\tau) = \text{TF}\{S_{xx}(\omega)\}$$

cioè la densità spettrale di potenza del processo $x(t)$ è la T.F. della funzione di autocorrelazione del processo stesso.

Questo è il teorema di Wiener-Kintchine.

8.3 – ALTRE CONSIDERAZIONI SULLO SPETTRO DI POTENZA

Lo spettro di potenza non dà, ovviamente, una descrizione statistica completa del processo aleatorio nel dominio delle frequenze: infatti, esso è la T.F. solo di un momento del II ordine. Tuttavia, come già detto, per molti scopi pratici è sufficiente la conoscenza della statistica del I e II ordine per caratterizzare un processo. Anzi, spesso ci si limita alla sola funzione di correlazione, o alternativamente alla densità spettrale, che vengono considerati, con i limiti sopra detti, come la “descrizione” nel dominio del tempo e in quello delle frequenze del segnale casuale.

Si osservi che, in base alla (8.9), $S_{xx}(\omega)$ è una funzione reale di ω ; quindi, lo spettro di fase della funzione di correlazione è identicamente nullo. Pertanto, due processi $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ e $x'(t) \Leftrightarrow X'(\omega)$ aventi lo stesso spettro di ampiezza

$$|X(\omega)| = |X'(\omega)|$$

ma diverso spettro di fase

$$\Phi(\omega) \neq \Phi'(\omega)$$

hanno la stessa funzione di correlazione.

È utile, infine, notare dalla (8.10a) che

$$(8.15a) \quad C_{xx}(0) = \langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) df$$

da cui, considerando un intervallo infinitesimo di frequenza

$$d\langle x^2 \rangle = S_{xx}(\omega) df$$

e dividendo per df

$$(8.15b) \quad \frac{d\langle x^2 \rangle}{df} = S_{xx}(\omega)$$

che però non va considerata come una derivata in senso ordinario (infatti, $\langle x^2 \rangle$ è un numero, indipendente da f), ma solo un rapporto fra due quantità. Si osservi, anche, dalla (8.15a), che il valore q.m. (che coincide con la varianza se il processo è a media nulla) è lo spettro di potenza integrato.

Nel seguito, noi saremo interessati alla densità spettrale di segnali elettrici, e in questo caso x è una tensione o una corrente: pertanto, la densità spettrale sarà espressa in V^2/Hz oppure in A^2/Hz .

Talvolta, per non appesantire la simbologia, si usa il simbolo $\langle x^2 \rangle$ o semplicemente \bar{x}^2 sia per indicare il valore q.m. che la densità, a meno che non ci sia rischio di confusione.

Si noti che $S_{xx}(\omega)$, essendo una trasformata di Fourier, distribuisce l'energia del segnale su tutto l'asse delle frequenze, cioè per $-\infty \leq \omega \leq \infty$: per questo viene chiamata densità bilaterale. L'energia di un segnale fisico è distribuita ovviamente sulle sole frequenze ≥ 0 . Allora, poiché $S_{xx}(\omega)$ è una funzione reale e pari, la densità unilaterale, cioè quella fisicamente misurabile, sarà il doppio di quella bilaterale.

Può anche essere utile sapere che gli ingegneri considerano di preferenza la densità efficace, cioè la radice quadrata della densità spettrale di potenza, che sarà espressa in A/\sqrt{Hz} oppure in V/\sqrt{Hz} ; nel caso del rumore, essa viene chiamata 'spot noise'.

8.4 - IL PROCESSO BIANCO

È un processo ideale caratterizzato dall'aver densità spettrale costante, **Fig. 8.1**:

$$(8.16) \quad S_{xx}(\omega) = S_0 = \text{cost.}$$

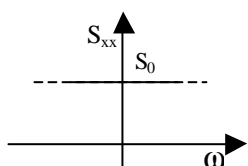


Fig. 8.1

L'utilità di questo processo è dovuta al fatto che con esso si possono modellare molti processi fisici, per es. la generazione del rumore elettrico che viene chiamato rumore bianco. Normalmente si assume che il rumore bianco è:

gaussiano, e ciò è giustificato dal teorema del limite centrale, in quanto il processo di generazione del rumore è dovuto al moto di un gran numero di cariche libere, indipendenti;
ergodico, anche ciò giustificato dall'osservazione sperimentale;
a media nulla.

La funzione di autocorrelazione del processo è, per il teorema di W.K.

$$(8.17) \quad C_{xx}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_0 e^{j\omega t} d\omega = S_0 d(t)$$

mostrata in **Fig. 8.2**.

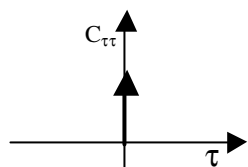


Fig. 8.2

Dalla (8.17) si può quindi dire che due campioni arbitrari di noise bianco sono incorrelati e, per l'ipotesi gaussiana, anche statisticamente indipendenti.

Poiché, sempre dalla (8.17)

$$(8.18) \quad C_{xx}(0) = E\{x^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_0 df = \infty$$

segue che il processo bianco ha potenza infinita: di qui la sua irrealizzabilità fisica.

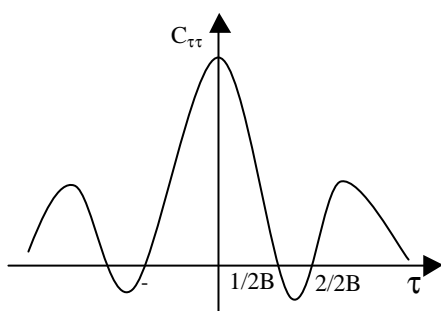


Fig. 8.3

Un rumore bianco a banda limitata $(-B, B)$ (rumore colorato) ha spettro di potenza:

$$(8.19) \quad S_{xx}(\omega) = \begin{cases} S_0 & |\omega| \leq 2\pi B \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

0 altrove

La funzione di autocorrelazione è

$$(8.20) \quad C_{xx}(t) = \frac{1}{2p} \int_{-2pB}^{2pB} S_0 e^{j\omega t} d\omega = 2BS_0 \frac{\text{sen}2pBt}{2pBt}$$

mostrata in **Fig. 8.3**. Si osservi che è

$$C_{xx}(0) = \langle x^2 \rangle = 2BS_0$$

la potenza del noise dipende da 2B.

Il rumore colorato può essere approssimato nella pratica di laboratorio.

8.5 - PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE DI CORRELAZIONE E DELLA DENSITÀ SPETTRALE

Si riportano senza dimostrazione alcune proprietà notevoli. Si considerano segnali reali. Si riassumono dapprima le principali definizioni.

Ricordiamo la definizione di funzione di autocorrelazione

$$C_{xx}(\tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\}$$

e nel caso ergodico

$$(8.21) \quad = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t, \mathbf{x})x(t + \mathbf{t}, \mathbf{x}) dt \quad \mathbf{x} \text{ arbitr.}$$

$$(8.21a) \quad x(t) = \tilde{x}(t) + \langle x \rangle$$

Si può esprimere la variabile aleatoria $x(t)$ come somma della corrispondente variabile centrata $\tilde{x}(t)$ e del valor medio $\langle x \rangle$ (indipendente da t per la supposta stazionarietà):

Allora

$$(8.22) \quad C_{xx}(\mathbf{t}) = E\{\tilde{x}(t) + \langle x \rangle)(\tilde{x}(t + \mathbf{t}) + \langle x \rangle)\}$$

da cui, essendo $E\{\tilde{x}\} = 0$

$$(8.23) \quad = C_{\tilde{x}\tilde{x}}(\mathbf{t}) + \langle x \rangle^2$$

e se i segnali hanno media nulla

$$(8.24) \quad = C_{\tilde{x}\tilde{x}}(\mathbf{t})$$

La densità spettrale di potenza è

$$S_{xx}(\omega) = \text{T.F.}\{C_{xx}(\tau)\}$$

e applicando la T.F. alla (8.23)

-8.10-

$$(8.25) \quad S_{xx}(\mathbf{w}) = S_{\bar{x}\bar{x}}(\mathbf{w}) + 2\mathbf{p} \langle x \rangle^2 \mathbf{d}(\mathbf{w})$$

La correlazione incrociata è definita

$$(8.26) \quad C_{xy}(\mathbf{t}) = E\{x(t)y(t+\mathbf{t})\}$$

e per la ergodicità

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t, \mathbf{x}) y(t + \mathbf{t}, \mathbf{h}) dt \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{h}$$

Come sopra, si può scrivere

$$(8.27) \quad C_{xy}(\mathbf{t}) = C_{\bar{x}\bar{y}}(\mathbf{t}) + \langle x \rangle \langle y \rangle$$

La densità spettrale incrociata risulta

$$(8.28) \quad S_{xy}(\mathbf{w}) = T.F.\{C_{xy}(\mathbf{t})\} = S_{\bar{x}\bar{y}}(\mathbf{w}) + 2\mathbf{p} \langle x \rangle \langle y \rangle \mathbf{d}(\mathbf{w})$$

Proprietà notevoli:

$C_{xx}(\mathbf{t})$ è una funzione pari

$$(8.29) \quad C_{xx}(\tau) = C_{xx}(-\tau)$$

basta quindi misurarne solo la parte per $\tau > 0$. Essendo $C_{xx}(\tau)$ anche reale, poiché $x(t)$ è reale, segue che anche la densità spettrale è reale e pari.

$C_{xx}(\mathbf{t})$ è massima per $\mathbf{t} = 0$

$$(8.30) \quad |C_{xx}(\tau)| \leq C_{xx}(0)$$

Si noti che

$$(8.31) \quad C_{xx}(0) = E\{x^2(t)\}$$

cioè il valore all'origine della funzione di autocorrelazione è il valore quadratico medio del segnale; se la variabile è centrata, questo valore è anche la varianza.

Per variabili centrate

$$(8.32) \quad \lim_{\mathbf{t} \rightarrow \infty} C_{\bar{x}\bar{x}}(\mathbf{t}) = 0$$

Se la variabile non è centrata, $C_{xx}(\tau) \rightarrow \langle x \rangle^2$.

Per la funzione di correlazione incrociata valgono le seguenti proprietà:

$$(8.33) \quad C_{xy}(\tau) = C_{yx}(-\tau)$$

$C_{xy}(\tau)$ non ha in generale proprietà di parità

$C_{xy}(\tau)$ non è in generale massima in $\tau=0$.

$$C_{xy}(\tau) \rightarrow 0 \text{ per } \tau \rightarrow \infty.$$

$$|C_{xy}(\tau)| \leq \frac{1}{2}[C_{xx}(0) + C_{yy}(0)]$$

$C_{xy}(0)$ non ha particolare significato fisico.

Poiché $C_{xy}(\tau)$ è una funzione reale qualunque, $S_{xy}(\omega)$ è una funzione qualunque di ω .

Consideriamo il caso che il segnale di cui si calcola la funzione di autocorrelazione sia periodico;

la definizione è allora

$$(8.34) \quad C_{xx}(\mathbf{t}) = \frac{1}{nT} \int_{-\frac{nT}{2}}^{\frac{nT}{2}} x(t)x(t+\mathbf{t})dt$$

infatti, la periodicità rende inutile il limite, ma n deve essere intero. Per il teorema di W.K.

$$T.F.\{C_{xx}(\mathbf{t})\} = S_{xx}(\mathbf{w}) = \frac{|X(\mathbf{w})|^2}{nT}$$

$C_{xx}(\mathbf{t})$ contiene tutte e sole le armoniche di $x(t)$: pertanto, osservando la $C_{xx}(\tau)$ si può rivelare la presenza di una componente periodica di $x(t)$. Vedremo nel seguito l'utilità di questa osservazione.

Consideriamo infine il caso di due segnali che siano esprimibili come

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_n(t)$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \dots + y_m(t)$$

Si ha subito

$$(8.35) \quad C_{xy}(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m C_{x_i y_j}(\mathbf{t})$$

Per la linearità della T.F.

$$(8.36) \quad S_{xy}(\mathbf{w}) = T.F.\{C_{xy}(\mathbf{t})\} = \sum_i \sum_j S_{x_i y_j}(\mathbf{w})$$

-8.12-

Nel caso che sia $y(t) = x(t)$ (e quindi $n=m$)

$$(8.37) \quad C_{xx}(\mathbf{t}) = \sum_i \sum_j C_{x_i x_j}(\mathbf{t})$$

Nella sommatoria compaiono sia le autocorrelazioni ($i=j$) che le correlazioni incrociate. Se e solo se le x_k sono fra loro indipendenti (e centrate) si ha

$$(8.38) \quad C_{x_i x_j}(\mathbf{t}) = 0 \quad i \neq j$$

e quindi

$$(8.39) \quad C_{xx}(\mathbf{t}) = \sum_k C_{x_k x_k}(\mathbf{t})$$

e anche

$$(8.40) \quad S_{xx}(\mathbf{w}) = \sum_k S_{x_k x_k}(\mathbf{w})$$

8-6 - RISPOSTA DI UN SISTEMA LINEARE AD UN SEGNALE ALEATORIO

Le considerazioni che si fanno in questo e nel paragrafo successivo sono di grande interesse per la fisica, in quanto i sistemi con i quali si processano i segnali deboli provenienti dai rivelatori di radiazione sono anche eccitati dal rumore che accompagna tali segnali.

Consideriamo un sistema $h(t)$ lineare time-invariant eccitato da un segnale aleatorio $x(t)$, realizzazione di un processo stazionario. Essendo il sistema t.i., anche il processo di uscita $y(t)$ sarà stazionario.

Ricaviamo alcune relazioni notevoli di cui faremo largo uso.

Calcoliamo la media del processo di uscita.

$$E\{y(t)\} = E\{x(t) * h(t)\} = E\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t-a) h(a) da \right\}$$

Per il teorema di Fubini, ed essendo $h(t)$ deterministico

$$= \int_{-\infty}^{\infty} E\{x(t-a)\} h(a) da$$

Essendo il processo di entrata stazionario

$$= \int_{-\infty}^{\infty} E\{x(t)\}h(\mathbf{a})d\mathbf{a}$$

e quindi infine

$$(8.41) \quad E\{y(t)\} = E\{x(t)\} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt = E\{x(t)\}H(0)$$

Pertanto, *la risposta media del sistema $h(t)$ è il prodotto della eccitazione media per l'area della risposta impulsiva.*

Si noti che la risposta è a media nulla se tale è l'eccitazione, oppure se è nulla l'area netta della risposta impulsiva (risposta bipolare).

Calcoliamo ora la funzione di autocorrelazione di uscita $C_{yy}(\tau)$

$$\begin{aligned} C_{yy}(\mathbf{t}) &= E\{y(t)y(t+\mathbf{t})\} = E\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\mathbf{a})h(t-\mathbf{a})d\mathbf{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\mathbf{b})h(t+\mathbf{t}-\mathbf{b})d\mathbf{b} \right\} \\ &= E\left\{ \iint x(\mathbf{a})x(\mathbf{b})h(t-\mathbf{a})h(t+\mathbf{t}-\mathbf{b})d\mathbf{a}d\mathbf{b} \right\} \end{aligned}$$

Per il teorema di Fubini

$$\begin{aligned} &= \iint E\{x(\mathbf{a})x(\mathbf{b})h(t-\mathbf{a})h(t+\mathbf{t}-\mathbf{b})d\mathbf{a}d\mathbf{b}\} \\ &= \iint [C_{xx}(\mathbf{a}-\mathbf{b})h(t-\mathbf{a})]h(t+\mathbf{t}-\mathbf{b})d\mathbf{b} \end{aligned}$$

Poniamo nella [] $\alpha-\beta=\gamma$, $d\alpha=d\gamma$, essendo β costante nella parentesi

$$\begin{aligned} &= \iint [C_{xx}(\mathbf{g})h(t-\mathbf{b}-\mathbf{g})]h(t+\mathbf{t}-\mathbf{b})d\mathbf{b} \\ &= \iint [C_{xx}(t-\mathbf{b}) * h(t-\mathbf{b})]h(t+\mathbf{t}-\mathbf{b})d\mathbf{b} \end{aligned}$$

Poniamo $t-\beta=-\theta$, $d\beta=d\theta$, osservando che t è costante

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} [C_{xx}(-\mathbf{q}) * h(-\mathbf{q})]h(\mathbf{t}-\mathbf{q})d\mathbf{q} \\ &= C_{xx}(\tau) * h(-\tau) * h(\tau) \end{aligned}$$

oppure anche

-8.14-

$$(8.41a) \quad C_{yy}(\tau) = C_{xx}(\tau) * [h(-\tau) * h(\tau)]$$

e quindi infine

$$(8.42) \quad C_{yy}(\mathbf{t}) = C_{xx}(\mathbf{t}) * C_{hh}(\mathbf{t})$$

Pertanto, l'autocorrelazione del processo di uscita è la convoluzione tra l'autocorrelazione del processo di entrata e l'autocorrelazione della risposta impulsiva.

Applicando la T.F. alla (8.41a) si ha anche

$$S_{yy}(\mathbf{w}) = S_{xx}(\mathbf{w})H(\mathbf{w})H^*(\mathbf{w})$$

e quindi

$$(8.43) \quad S_{yy}(\mathbf{w}) = S_{xx}(\mathbf{w})/|H(\mathbf{w})|^2$$

che lega la densità spettrale del processo di uscita del sistema a quella di entrata, tramite la risposta in frequenza del sistema stesso.

Calcoliamo infine la correlazione incrociata fra il segnale di uscita $y(t)$ e quello di entrata $x(t)$:

$$\begin{aligned} C_{yx}(\mathbf{t}) &= E\{y(t)x(t+\mathbf{t})\} = E\{x(t+\mathbf{t}) \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\mathbf{a})h(\mathbf{a})d\mathbf{a}\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E\{x(t+\mathbf{t})x(t-\mathbf{a})\}h(\mathbf{a})d\mathbf{a} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} C_{xx}(\mathbf{t}-\mathbf{a})h(\mathbf{a})d\mathbf{a} \end{aligned}$$

e quindi infine

$$(8.44) \quad C_{yx}(\tau) = C_{xx}(\tau) * h(\tau)$$

8.7 - TRENO CASUALE DI IMPULSI. TEOREMA DI CARSON.

Consideriamo ora il caso che il sistema lineare t.i. $h(t)$ sia eccitato da un processo impulsivo di Poisson (vedi par. 6.7):

$$(8.45) \quad x(t) = \sum_k a_k \delta(t-t_k)$$

costituito da un treno di delta generate ad istanti casuali t_k , ciascuna indipendentemente dalle altre. Sia N il numero delle delta in $(-T/2, T/2)$. Gli istanti t_k sono distribuiti secondo la statistica di Poisson, e sia λ il rate medio. a_k è l'area (di valore casuale, positivo o negativo, e indipendente da k) della delta che nasce all'istante t_k . Per semplicità, assumiamo $\bar{a}=0$. La funzione $h(t)$ è supposta reale e causale, e di breve durata.



Fig. 8.4

Il processo $y(t)$ di uscita è

$$(8.46) \quad y(t) = \sum_k a_k h(t-t_k)$$

mostrato in **fig. 8.4**.

La densità spettrale del processo di uscita può essere calcolata con la (8.43), dopo aver calcolato la densità

spettrale del processo impulsivo di entrata $x(t)$. Se ci riferiamo ad una sola realizzazione, $x(t, \xi)$, la sua T.F. è

$$X(\mathbf{w}, \mathbf{x}) = \sum_k a_k e^{-j\mathbf{w}t_k}$$

La densità spettrale di questa realizzazione è, per la (8.7)

$$S_{xx}(\mathbf{w}, \mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X(\mathbf{w}, \mathbf{x})|^2}{T}$$

e quindi

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [X(\mathbf{w}) X^*(\mathbf{w})] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [\sum_{k,l} a_k a_l e^{-j\mathbf{w}(t_k - t_l)}]$$

La densità spettrale del processo è

$$S_{xx}(\mathbf{w}) = E\{S_{xx}(\mathbf{w}, \mathbf{x})\} = E\left\{\lim_{T \rightarrow \infty} [\dots]\right\}$$

Assumendo di poter scambiare l'operatore E con \lim , e separando nella sommatoria i termini con $k=l$, si ha

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left\{ \sum_1^N a_k^2 + \sum_{k \neq l} a_k a_l e^{-j\mathbf{w}(t_k - t_l)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \sum_k E\{a_k^2\} + \frac{1}{T} \sum_{k \neq l} E\{\dots\} \right] \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{N}{T} \overline{a^2} \right] + \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \sum_{k \neq l} E\{a_k\} E\{a_l\} E\{e^{-j\omega(t_k - t_l)}\} \right] \\
 &= \lambda \overline{a^2}
 \end{aligned}$$

poiché la media di a è zero.

Il processo impulsivo di Poisson è quindi un processo bianco. In altri termini, un processo bianco (rumore bianco) di assegnata densità di potenza può essere modellato con un processo impulsivo di Poisson in accordo con la (8.46a). Si noti che questo fatto è indipendente dalla particolare distribuzione (gaussiana, uniforme,...) dell'area delle delta. Ci sono, naturalmente, altri processi che hanno densità spettrale costante, sono cioè bianchi; ma vedremo nel prossimo capitolo che il processo di Poisson è particolarmente adatto a rappresentare i processi fisici che nei componenti elettronici generano rumore bianco.

Allora, utilizzando la (8.43), si ha la densità spettrale del processo di uscita:

$$(8.47) \quad S_{yy}(\omega) = \lambda \overline{a^2} |H(\omega)|^2$$

che è il *teorema di Carson*. Esso ci fornisce lo spettro di potenza di un processo poissoniano di rate medio λ e di funzione di forma $h(t)$.

L'interesse del teorema di Carson è dovuto alla seguente osservazione che deriva dalla (8.47): *se all'uscita di un apparato di misura $h(t)$ noi osserviamo un rumore di densità $S_{yy}(\omega)$, tale rumore può essere pensato come dovuto alla sovrapposizione di impulsi, di forma opportuna $h(t) \hat{U} H(\omega)$, distribuiti secondo la statistica di Poisson con rate medio λ opportuno, tali da rendere vera l'eguaglianza (8.47).*

Consideriamo ora alcuni casi che ci interessano particolarmente, ed assumiamo per semplicità $|a|=1$.

Supponiamo che all'uscita di un apparato noi osserviamo un rumore idealmente bianco, $S_{yy}(\omega)=S_0$:

cerchiamo la forma degli eventi $h(t)$ che, sovrapponendosi, danno luogo a tale processo. Dalla (8.47) si ha:

$$(8.48) \quad S_o = \lambda |H(\omega)|^2$$

Sulla base delle proprietà di parità della TF, si può vedere che tra tutte le possibili $H(\omega)$ che soddisfano la (8.48) solo

$$(8.49) \quad H(\mathbf{w}) = \pm \sqrt{\frac{S_o}{\mathbf{I}}} = H^*(\mathbf{w})$$

ha per trasformata una $h(t)$ reale

$$(8.49a) \quad h(t) = \pm \sqrt{\frac{S_o}{\mathbf{I}}} \mathbf{d}(t)$$

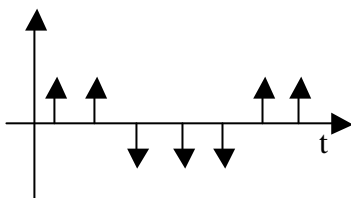


Fig. 8.5

Pertanto, il rumore bianco può essere pensato come costituito dalla sovrapposizione di delta di area unitaria, casualmente + oppure -, distribuite secondo Poisson con rate medio \mathbf{I} eguale alla densità spettrale S_o del rumore stesso, **Fig. 8.5**. Tale rumore è

quindi il risultato di un processo impulsivo di Poisson osservato tramite un sistema $h(t)$ avente banda passante infinita, vedi cap. 4.

Consideriamo ora il caso che il rumore osservato sia a media nulla e abbia densità spettrale

$$(8.50) \quad S_{yy}(\omega) = k|\omega|^\alpha$$

Si ha dalla (8.47)

$$(8.51) \quad k|\mathbf{w}|^\alpha = \mathbf{I} / |H(\mathbf{w})|^2$$

Anche in questo caso, si può vedere che solo la soluzione

$$(8.51a) \quad H(\mathbf{w}) = (j\mathbf{w})^{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{k}{\mathbf{I}}} = -H^*(\mathbf{w})$$

dà luogo ad una $h(t)$ reale. I casi che interessano sono $\alpha=2$ e $\alpha=-1$. Se $\alpha=2$, si ha(8.51b)

$$h(t) = \sqrt{\frac{k}{I}} \mathbf{d}'(t)$$

Allora, il rumore avente la densità spettrale $k\omega^2$ può essere pensato come dovuto alla sovrapposizione di doppietti di Dirac di area unitaria, distribuiti secondo Poisson con rate medio $I=k$, come mostrato in **Fig. 8.6a**. Tale rumore è il risultato di un processo impulsivo di Poisson osservato attraverso un sistema $h(t)$ che è un puro derivatore.

Se $\alpha=-1$, si ha (vedi tav. 3.1)

$$(8.52) \quad h(t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{t}} \sqrt{\frac{k}{\lambda}}$$

mostrata in **Fig. 8.6b**. $\Gamma(\cdot)$ e' la funzione gamma.

Il rumore di densità spettrale $k/|\omega|$ e' noto come *rumore 1/f*. Questo rumore, quindi, è il risultato di un processo impulsivo di Poisson osservato attraverso un sistema $h(t) = t^{-1/2}$.

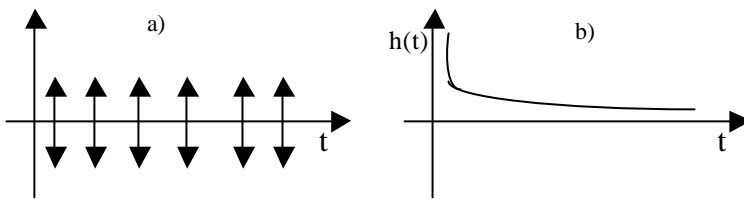


Fig. 8.6

Dal teorema di Carson e dagli esempi esaminati sembra di poter trarre le seguenti conclusioni: il rumore in natura, *come processo fondamentale*, e' un processo

impulsivo di Poisson con densità spettrale costante. Il rumore che noi osserviamo con il nostro apparato di misura $h(t)$ ha una densità che *dipende dall'apparato stesso*; cioè noi osserviamo sempre la convoluzione del processo fondamentale con la risposta impulsiva dell'apparato. Se usassimo un apparato con banda passante infinita, $h(t) = \delta(t)$, osserveremmo un rumore rigorosamente bianco. Se invece usassimo un apparato con risposta impulsiva (8.51b), (cioè un derivatore ideale), osserveremmo un rumore di densità $k\omega^2$. Se infine il nostro apparato fosse del tipo (8.52), osserveremmo un rumore $1/f$: quest'ultimo rumore *non e' quindi di natura fondamentale*.

Nel caso del rumore bianco, ci sono evidenze della attendibilità di quanto ora affermato. Si e' infatti

più volte detto che per es. la tensione di rumore osservata ai capi di una resistenza R e' dovuta alla agitazione termica degli elettroni all'interno del materiale; il contributo di ogni elettrone fra due urti e' ben assimilabile ad una delta. La limitata banda passante dei nostri sistemi di misura fa si' che noi osserviamo sempre un rumore bianco *a banda limitata* (o rumore colorato).

Non c'è a tutt'oggi una evidenza altrettanto chiara nel caso del rumore $1/f$: non si riesce infatti a immaginare un meccanismo, o sistema, che generi impulsi $h(t) = t^{1/2}$. Nel caso dei componenti elettronici, c'è una chiara evidenza sperimentale che la densità del rumore $1/f$ è legata ai limiti della tecnologia costruttiva dei componenti (per es. si è osservato che il perfezionamento della tecnologia costruttiva dei transistor MOS negli ultimi 20 anni ha portato ad una netta riduzione del rumore $1/f$ in questi componenti; vedi il successivo capitolo); ma non si riesce ad associare questi limiti con la risposta impulsiva (8.52).

In ogni caso, queste considerazioni sottolineano la grande importanza del teorema di Carson.

8.8 - I TEOREMI DI CAMPBELL

Nel paragrafo precedente si è introdotto il teorema di Carson, il quale permette di modellare il rumore all'uscita di un apparato di misura $h(t)$ con la sovrapposizione di opportune funzioni $h(t) \Leftrightarrow H(\omega)$, distribuite secondo la statistica di Poisson con opportuno rate medio λ . A livello fondamentale, il rumore sembra essere sempre un processo impulsivo di Poisson di rate λ .

La densità spettrale del rumore di uscita è data dalla (8.47). Vogliamo ora ricavare altre proprietà statistiche del rumore stesso.

Il valor medio può essere immediatamente ottenuto dalla (8.41) e dalla (6.38):

$$(8.53) \quad \bar{y} = I \bar{a} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt$$

che è noto come *teorema di Campbell della media*. Nei casi di nostro interesse, è $\bar{y} = 0$.

Per calcolare la varianza del rumore di uscita, calcoliamo dapprima la funzione di autocorrelazione, applicando il teorema di Wiener-Kintchine alla (8.47). Poiché

$$|H(\mathbf{w})|^2 = H(\mathbf{w})H^*(\mathbf{w}) \Leftrightarrow h(t) * h(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{a})h(t + \mathbf{a})d\mathbf{a}$$

si ha

$$C_{yy}(\tau) = \lambda \overline{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\tau + \alpha)d\alpha$$

Il valore q.m. dell'uscita è

$$C_{yy}(0) = \langle y^2 \rangle = \lambda \overline{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)dt$$

ed infine, essendo il processo a media nulla, la varianza è

$$(8.54) \quad \sigma_y^2 = \lambda \overline{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)dt$$

ove $\lambda \langle a^2 \rangle$ è la densità spettrale del processo di entrata. Quest'ultimo è il *teorema di Campbell della varianza*.

Possiamo quindi concludere enunciando come segue i due teoremi di Campbell: se un sistema lineare t.i. $h(t)$ risponde ad una eccitazione $a\delta(t)$ con $ah(t)$, allora la risposta media del sistema ad una sequenza poissoniana di delta sarà data dal prodotto dell'area della risposta impulsiva, dell'area media delle delta e del loro rate medio; la varianza della risposta sarà data dal prodotto dell'integrale di $h^2(t)$ per la densità spettrale del processo di entrata.

Conviene estendere il secondo teorema di Campbell al caso in cui il processo di entrata sia una sequenza poissoniana di doppietti di Dirac: in questo caso, basta ricordare che la risposta del sistema $h(t)$ ad una eccitazione $a\delta'(t)$ sarà $ah'(t)$ e la (8.54) si scriverà

$$(8.54a) \quad \sigma_y^2 = \lambda \overline{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} h'^2(t)dt$$

I teoremi di Campbell saranno estesamente usati nel capitolo seguente.

Si ricordi, infine, che se il sistema $h(t)$ è causale gli integrali (8.53) e (8.54) vanno estesi da 0 a ∞ .

8.9 - MISURA DELLA DENSITÀ SPETTRALE

Per misurare la densità di potenza spettrale S_{xx} di una sorgente occorre, in linea di principio, un filtro di banda passante nota B^* , centrata intorno alla

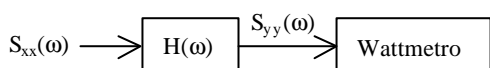


Fig. 8.7

frequenza ν_o di interesse, ed un wattmetro, **Fig. 8.7**. Se $H(\omega)$ è la risposta in frequenza del filtro, la densità di

potenza di uscita dal filtro sarà per la (8.43)

$$S_{yy}(\omega) = S_{xx}(\omega) |H(\omega)|^2$$

Se per fissare le idee supponiamo che lo spettro da misurare sia bianco, S_o , la potenza totale misurata dal wattmetro sarà

$$(8.55) \quad P_F = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega = S_o \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega$$

e la densità di potenza sarà quindi $S_{yy} = P_F/B^*$.

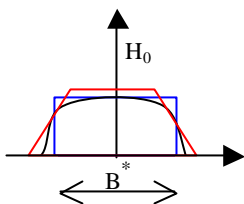


Fig. 8.8

Si noti, tuttavia, che la potenza misurata risulta funzione della forma del filtro (cioè della sua ripidità), anche a parità di banda passante, come mostrato in **Fig. 8.8**.

L'inconveniente viene superato definendo la *banda passante B equivalente* del filtro reale, la quale è la banda di un filtro ideale (avente lo stesso guadagno in banda del filtro reale, H_o) che lascia passare la stessa potenza del filtro reale:

$$P_F = S_o \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} H_o^2 d\omega = S_o H_o^2 B$$

da cui infine, per confronto con la precedente

$$(8.56) \quad B = \frac{1}{H_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega$$

La densità di potenza sarà allora $S_{yy}=P_F/B$.

Accade spesso di avere a che fare con sistemi la cui risposta a bassa frequenza sia limitata a $f_1=0$ e quella ad alta frequenza sia determinata da un singolo polo dominante a frequenza f_2 ; in questo caso, si può vedere che la banda passante equivalente per il rumore è, dalla (8.56)

$$(8.57) \quad B = 1.57f_2$$

Quando non si dispone della adeguata strumentazione, si può comunque fare una misura, sia pure di prima approssimazione, della densità spettrale del rumore, supponendo che questo sia essenzialmente bianco. La Fig. 9.2a mostra il rilievo oscillografico del rumore all'uscita di un amplificatore, con a fianco la distribuzione, gaussiana, dell'ampiezza del rumore stesso. È noto che i valori di una variabile distribuita gaussianamente sono contenuti al 99% entro $\pm 3\sigma$ intorno al valor medio. Dalla figura appare evidente che non è molto difficile stimare l'intervallo di 6σ del rumore: basta trascurare i picchi di rumore che si presentano raramente. Ottenuta la σ , e quindi σ^2 , questa è anche la tensione q.m. del rumore, $\langle v^2 \rangle$, essendo esso a media nulla. Nota la banda passante (f_2-f_1) dell'amplificatore, la densità spettrale sarà approssimativamente

$$\langle v^2 \rangle / (f_2 - f_1) \text{ volt}^2/\text{Hz}$$

o anche in $\text{volt}/\sqrt{\text{Hz}}$, estraendo la radice quadrata. Anche se si tratta di una stima grossolana, può servire ad avere rapidamente gli ordini di grandezza.

8.10 - ANALISI SPETTRALE DEL SEGNALE TELEGRAFICO

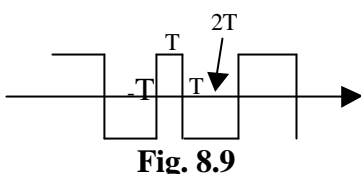


Fig. 8.9

Questo segnale è un treno di onde quadre il cui andamento è mostrato in **Fig. 8.9**.

Possiamo considerare questo segnale come una successione di impulsi rettangolari di durata T , con periodo T , la cui ampiezza a

assume a caso il valore $+1$ oppure -1 , indipendentemente dai valori precedenti e con eguale

probabilità. Con l'origine dei tempi fissata come in Fig. 8.6, detta a_k l'ampiezza all'istante $t_k = kT$, il segnale telegrafico può essere scritto come

$$x(t) = \sum_k a_k \prod_{\frac{T}{2}} (t - kT)$$

e possiamo pensarlo come una realizzazione di un processo random che supponiamo stazionario al II ordine. Calcoliamo direttamente lo spettro di potenza del segnale. Si ha, dalla (3.39)

$$\prod_{\frac{T}{2}} (t - kT) \Leftrightarrow T \frac{\text{sen} \omega \frac{T}{2}}{\omega \frac{T}{2}} e^{-j\omega kT}$$

Consideriamo il segnale troncato

$$x_N(t) = \sum_{-N}^N a_k \prod_{\frac{T}{2}} (t - kT) \Leftrightarrow T \frac{\text{sen} \omega \frac{T}{2}}{\omega \frac{T}{2}} \sum_{-N}^N a_k e^{-j\omega kT}$$

Lo spettro di potenza del processo sarà, in base alle (8.7) e (8.8):

$$\begin{aligned} S_{xx}(\omega) &= E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T} T^2 \frac{\text{sen}^2 \frac{T}{2}}{\left(\omega \frac{T}{2}\right)^2} \left| \sum_{-N}^N a_k e^{-j\omega kT} \right|^2 \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\dots E \left\{ \left| \sum_{-N}^N a_k (\cos \omega kT - \text{sen} \omega kT) \right|^2 \right\} \right] \\ (8.58) \quad &= \lim_{N \rightarrow \infty} [\dots E \{ (\sum_k a_k \cos \omega kT)^2 + (\sum_k a_k \text{sen} \omega kT)^2 \}] \end{aligned}$$

Sviluppando i quadrati, compaiono i termini

$$a_k^2 \cos^2 [\cdot]; a_k^2 \text{sen}^2 [\cdot]; a_k a_i \cos k\omega T \cos i\omega T; a_k a_i \text{sen} k\omega T \text{sen} i\omega T$$

Per la linearità dell'operatore E

$$E\{\sum_k [\cdot]\} = \sum_k E\{[\cdot]\}$$

In particolare

$$E\{a_k a_i \cos[\cdot] \cos[\cdot]\} = \cos[\cdot] \cos[\cdot] E\{a_k a_i\}$$

Per la supposta indipendenza di a_k da a_i

$$= \cos[\cdot] \cos[\cdot] E\{a_k\} E\{a_i\}$$

e poiché a_k e a_i hanno media nulla

$$= 0$$

Analogamente per i termini contenenti il seno. Allora, riprendendo i calcoli dalla (8.58)

$$\begin{aligned} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\dots \left(\sum_k E\{a_k^2 \cos^2 \mathbf{w}kT\} + \sum_k E\{a_k^2 \sin^2 \mathbf{w}kT\} \right) \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\dots \left[\sum_k^N \cos^2 \mathbf{w}kT + \sum_k^N \sin^2 \mathbf{w}kT \right] \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(2N+1)T} T^2 \frac{\sin^2 \mathbf{w} \frac{T}{2}}{\left(\mathbf{w} \frac{T}{2}\right)^2} [2N+1] \right] \end{aligned}$$

cioè, infine, dopo le semplificazioni

$$(8.59) \quad S_{xx}(\mathbf{w}) = T \frac{\sin^2 \mathbf{w} \frac{T}{2}}{\left(\mathbf{w} \frac{T}{2}\right)^2}$$

La funzione di autocorrelazione del processo risulta essere

$$(8.60) \quad C_{xx}(\mathbf{t}) = T.F.\{S_{xx}(\mathbf{w})\} = \begin{cases} 1 - \frac{|\mathbf{t}|}{T} & |\mathbf{t}| < T \\ 0 & |\mathbf{t}| > T \end{cases}$$

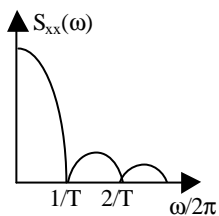


Fig. 8.10

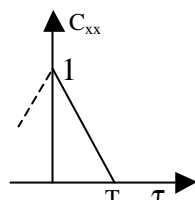


Fig. 8.11

Le due funzioni sono rappresentate in **Fig. 8.10** e **8.11**.

Si noti il significato della funzione di correlazione per questo processo:

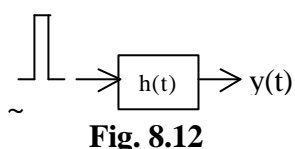
per $|\tau| < T$: è più probabile che $x(t)$ e $x(t+\tau)$ abbiano ampiezze dello stesso segno che non di segno contrario;

per $|\tau| > T$: la probabilità che le ampiezze ai due istanti generici t_1 e $t_1+\tau$ siano dello stesso segno è uguale a quella che siano di segno opposto.

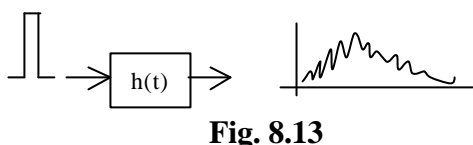
8.11 - APPLICAZIONE DELL'ANALISI STATISTICA ALLO STUDIO DEI SISTEMI LINEARI

Consideriamo il problema della misura della risposta impulsiva $h(t)$ di un sistema lineare t.i..

Il metodo di misura diretto, derivante dalla stessa definizione di $h(t)$, è illustrato in **Fig. 8.12**.

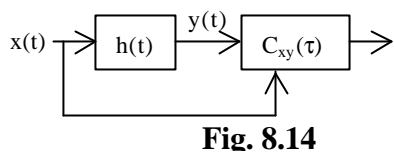


Come già ricordato nel Capitolo 3, $x(t)$ deve avere ampiezza finita, A , per questioni di dinamica del sistema, e durata piccola, θ , perché approssimi una δ . Pertanto, l'energia dell'eccitazione, $E \propto A\theta$, è piccola e di conseguenza la risposta sarà "rumorosa" e la precisione bassa, **Fig. 8.13**.



In molte applicazioni, questo metodo dà risultati sufficienti. In altri casi può essere richiesta una maggiore precisione. A questo scopo, consideriamo lo stesso sistema eccitato da un segnale $x(t)$ che sia una realizzazione di un processo

aleatorio stazionario al II ordine, ergodico. Nel paragrafo 8.5 abbiamo visto che la funzione di correlazione incrociata fra la risposta e l'eccitazione è data dalla (8.44)



$$C_{yx}(\tau) = C_{xx}(\tau) * h(\tau)$$

Se il processo di entrata ha funzione di autocorrelazione

$\delta(\tau)$
cioè se il processo $x(t)$ è bianco, si ha

$$(8.61) \quad C_{yx}(\tau) = \delta(\tau) * h(\tau) = h(\tau)$$

Questo fatto suggerisce un nuovo

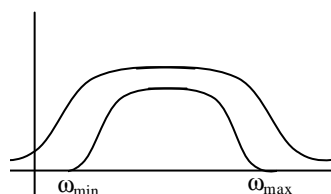


Fig. 8.15

$$C_{xx}(\tau) =$$

$$= \delta(\tau) * h(\tau) = h(\tau)$$

metodo di misura di

$h(t)$, illustrato in **Fig. 8.14**.

Con questo metodo, la precisione della misura cresce con T e può essere molto grande, poiché l'errore di stima di $C_{yx}(\tau)$ diminuisce all'aumentare di T . Il metodo su esposto, tuttavia, appare fisicamente irrealizzabile, poiché tale è il rumore bianco (il sistema che genera il processo bianco di entrata, $S_{bb}(\omega) = k$, dovrebbe avere banda passante infinita). Ma questo ostacolo può essere facilmente aggirato se si osserva che tutti i sistemi fisici sono *passa-basso* cioè hanno una frequenza di taglio superiore finita; inoltre è sempre possibile definire una ω_{max} al di là della quale $H(\omega) \approx 0$. Pertanto, è sufficiente che $S_{bb}(\omega)$ sia costante entro la banda significativa del sistema in esame. In altri termini, basta il rumore colorato, **Fig. 8.15**. Ripassando nel dominio del tempo, questo equivale a dire che è sufficiente che il segnale di test abbia una $C_{bb}(\tau)$ stretta rispetto ad $h(t)$, **Fig. 8.16**.

La stessa figura 8.16 suggerisce anche un'altra considerazione: poiché $h(t)$ per un sistema fisico è

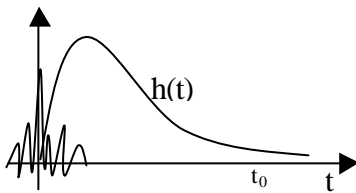


Fig. 8.16

generalmente a supporto limitato t_0 , la misura non è inficiata se il segnale di test ha una autocorrelazione periodica, schematizzata in **Fig. 8.17**, di periodo $T_s > t_0$. In tal caso, all'uscita del correlatore si avrà

$$(8.62) \quad h_1(\tau) = h(\tau) * \sum_k \delta(\tau - kT_s)$$

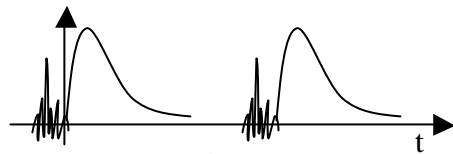


Fig. 8.17

ed $h(\tau)$ può essere ritrovata osservando l'uscita solo per $\Delta t < T_s$.

Ora il segnale di test $x(t)$ non è più random, ma periodico: tuttavia, ai fini dell'analisi del sistema lineare che qui stiamo esaminando, esso si comporta come se fosse random. Per questo lo si chiama segnale *pseudo-random*.

Un segnale pseudo-random avente le caratteristiche desiderate può essere ottenuto partendo dal

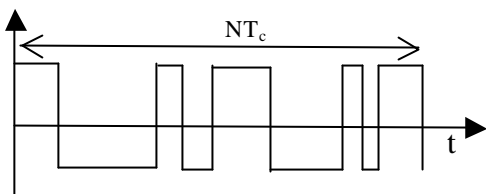


Fig. 8.18

segnale telegrafico considerato nel paragrafo precedente. Si è

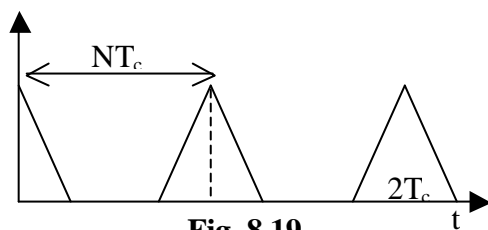


Fig. 8.19

visto che, detta T la durata dell'impulso rettangolare elementare, tale segnale ha per funzione di autocorrelazione un triangolo di larghezza $2T$. Pertanto, se si tronca la sequenza di impulsi rettangolari a $T_s = NT$ e la si ripete, si otterrà un segnale, **Fig. 8.18**, la cui funzione di autocorrelazione è mostrata in **Fig. 8.19**.

Un tale segnale può essere facilmente generato con uno shift register a n stadi (cosicché sarà $N = 2^n - 1$: infatti, gli stati possibili dello shift register sono 2^n , ma fra questi esiste la relazione 8.63), con frequenza di clock ν (sicché sarà $1/\nu = T$), opportunamente reazionato. Agendo su ν , si control-

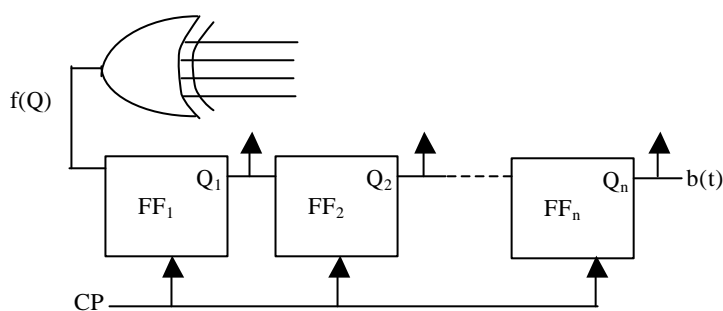


Fig. 8.20

la la larghezza di $C_{bb}(\tau)$; agendo su n , si controlla $T_s = NT$.

Lo schema del generatore è mostrato in **Fig. 8.20**.

La funzione $f(Q)$, che decide i punti di controreazione da

collegare all'OR esclusivo, è data da un polinomio del tipo

$$(8.63) \quad f(Q) = a_0 \oplus a_1 Q_1 \oplus$$

$$a_2 Q_2 \oplus \dots \oplus a_n Q_n$$

ove $a_i \in (0,1)$ e \oplus è il simbolo dell'operatore OR esclusivo.

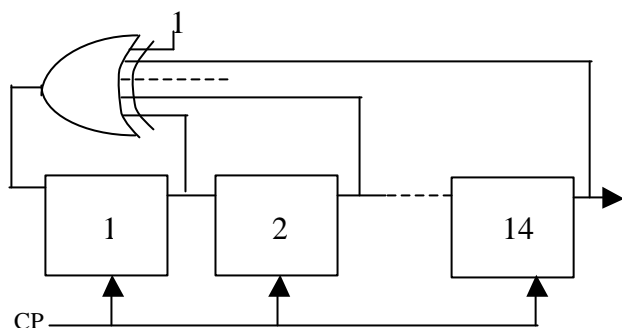


Fig. 8.21

I valori dei coefficienti a_i , alcuni dei quali

sono tabulati in codice octal nella **Tav. 8.1**, sono determinati secondo algoritmi che qui non approfondiamo.

Consideriamo ora un esempio di generatore di sequenza pseudo-random con $n = 14$. Il codice dei coefficienti è 42103 octal, cioè in binario:

cod. octal	4	2	1	0	3
------------	---	---	---	---	---

cod. binario	1 0 0	0 1 0	0 0 1	0 0 0	0 1 1
coefficienti	a_{14}	a_{10}	a_6		a_1 a_0

La funzione di reazione è pertanto

$$f(Q) = Q_{14} \oplus Q_{10} \oplus Q_6 \oplus Q_1 \oplus 1$$

Lo schema dello shift register reazionato è mostrato in **Fig. 8.21**. Esso genera una sequenza casuale di $2^{14} - 1 = 16383$ impulsi, che poi si ripete periodicamente.

Tav. 8.1 Coefficienti di $f(Q)$

n	codice octal	n	codice octal
3	13	9	1021
4	23	10	2011
5	45	11	4005
6	103	12	10123
7	211	13	20033
8	435	14	42103

Bibliografia

J. Max, Méthodes et techniques de traitement du signal. Masson 1981

G. Cooper, C. McGillem, Methods of signal and system analysis. Holt, Rinehart, Winston

A. Papoulis, Probabilità, variabili aleatorie e processi stocastici. Boringhieri

B. Marangelli, Dispense di Fisica dei Dispositivi Elettronici.