

CAPITOLO 7

LA FUNZIONE DI CORRELAZIONE

7.1 - FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE E DI CORRELAZIONE INCROCIATA

Siano

$$x_1 = x(t_1, \xi) \quad x_2 = x(t_2, \xi)$$

due variabili aleatorie definite sullo stesso processo $x(t, \xi)$. La descrizione della loro statistica congiunta si basa essenzialmente su un momento del II ordine: la funzione di autocorrelazione

$$(7.1) \quad E\{x_1 x_2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = C_{xx}(t_1, t_2)$$

che, nel caso di variabili centrate, è anche nota come covarianza

$$(7.2) \quad E\{(x_1 - \langle x_1 \rangle)(x_2 - \langle x_2 \rangle)\} = \mu$$

E' facile vedere che

$$(7.3) \quad \mu = \langle x_1 x_2 \rangle - \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle$$

Se le due variabili sono statisticamente indipendenti, cioè

$$E\{x_1 x_2\} = E\{x_1\}E\{x_2\}$$

allora è $\mu = 0$ (in generale non è vero il contrario, salvo il caso di variabili gaussiane).

Nel caso si abbia accesso ad una sola realizzazione ξ_k del processo, si può definire l'autocorrelazione temporale

$$(7.4) \quad C_{xx}(t_0, \mathbf{x}_k, \mathbf{t}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(\mathbf{x}_k, t)x(\mathbf{x}_k, t + \mathbf{t})dt$$

essendo t_0 l'istante in cui inizia l'osservazione.

Se il processo $x(t, \xi)$ è stazionario, sull'insieme delle realizzazioni deve accadere che

$$(7.5) \quad C_{xx}(t_1, t_2) = C_{xx}(t_1 + \theta, t_2 + \theta) \quad \theta \text{ arbitr.}$$

Posto allora $\theta = -t_1$, $\tau = t_2 - t_1$ si ha

$$(7.6) \quad = C_{xx}(0, \tau) = C_{xx}(\tau)$$

Su ogni singola realizzazione deve invece accadere che

$$(7.7) \quad C_{xx}(t_0, \xi_k, \tau) = C_{xx}(\xi_k, \tau)$$

Quando un processo è stazionario, la funzione di autocorrelazione è funzione della differenza fra i due istanti di interesse, e non di tali istanti.

Se il processo è ergodico si avrà

$$(7.8) \quad C_{xx}(\xi_k, \tau) = C_{xx}(\tau)$$

cioè operando su una qualunque realizzazione si ottiene lo stesso risultato che operando sull'insieme.

Siano ora x e y due variabili random definite su due processi diversi, rispettivamente negli istanti t_1 e t_2 . La statistica congiunta dei due processi è caratterizzata dalla funzione di correlazione incrociata

$$(7.9) \quad C_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)y(t_2)p(x, y)dx dy$$

Se si ha accesso ad una sola realizzazione ξ_k per ciascun processo

$$(7.10) \quad C_{xy}(t_0, \mathbf{x}_k, \mathbf{t}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(\mathbf{x}_k, t) y(\mathbf{x}_k, t + \mathbf{t}) dt$$

Nel caso che i processi siano congiuntamente stazionari, si avrà sull'insieme

$$(7.11) \quad C_{xy}(t_1, t_2) = C_{xy}(\tau)$$

essendo $\tau = t_2 - t_1$.

Su ciascuna realizzazione si avrà invece

$$(7.12) \quad C_{xy}(t_0, \xi_k, \tau) = C_{xy}(\xi_k, \tau)$$

Se i processi sono anche ergodici

$$(7.13) \quad C_{xy}(\xi_k, \tau) = C_{xy}(\tau)$$

7.2 - SIGNIFICATO FISICO DELLA CORRELAZIONE

Consideriamo due processi random, **Fig. 7.1**, di ciascuno dei quali siano note n realizzazioni; indichiamo la generica con

$$x_k(t) = x(t, \xi_k) \quad y_k(t) = y(t, \xi_k)$$

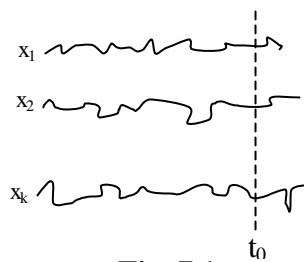


Fig. 7.1

Per fissare le idee, $x_k(t)$ sia la velocità del vento in funzione del tempo, misurata all'altezza k ; $y_k(t)$ sia invece la temperatura in funzione del tempo, misurata alla stessa altezza k . La domanda che ci si pone è se, ad un certo istante t_0 , esiste una "relazione" fra i due processi. Se tale relazione esiste, cioè se le misure fatte sui due processi a t_0 si somigliano, deve esistere un coefficiente a (fattore di scala) che rende le realizzazioni dei due processi "sovrapponibili" al meglio, a t_0 . Pertanto, a potrebbe essere usato per caratterizzare la somiglianza dei due processi, a t_0 .

Per definire operativamente a , si potrebbe pensare di confrontare le singole coppie di realizzazioni, considerando lo scarto

-7.4-

$$(7.14) \quad x_k(t_0) - ay_k(t_0) = \varepsilon(a, t_0)$$

e cercare il coefficiente a che minimizza $|\varepsilon|$. Tale coefficiente è ovviamente

$$a(t_0) = \frac{x_k(t_0)}{y_k(t_0)}$$

ma è poco significativo, poiché esso cambia verosimilmente da coppia a coppia di realizzazioni, e quindi non caratterizza il processo all'istante t_0 .

Si può allora cercare se una relazione fra i due processi, a t_0 , esiste "in media", considerando lo scarto medio

$$(7.15) \quad \frac{1}{n} \sum_k [x_k(t_0) - ay_k(t_0)] = \mathbf{e}'(a, t_0)$$

e cercare il coefficiente a che minimizza $|\mathbf{e}'|$. Tale coefficiente è ora

$$a = \frac{\frac{1}{n} \sum_k x_k(t_0)}{\frac{1}{n} \sum_k y_k(t_0)}$$

ma anch'esso è poco significativo: le singole coppie $x_k(t_0)$, $y_k(t_0)$ possono essere molto differenti tra loro pur essendo eguali le medie; inoltre, le due medie possono essere nulle, ed a indeterminato.

Questo inconveniente può essere evitato considerando la energia degli scarti, cioè

$$(7.16) \quad \frac{1}{n} \sum_k [x_k(t_0) - ay_k(t_0)]^2 = \mathbf{e}''(a, t_0)$$

Minimizzando rispetto ad a , si ottiene

$$a = \frac{\sum_k x_k y_k}{\sum_k y_k^2}$$

Utilizzando tale valore di a , la (7.16) diventa

$$\mathbf{e}_{\min}''(t_0) = \frac{1}{n} \sum_k^n x_k^2(t_0) \left[1 - \frac{\left[\frac{1}{n} \sum_k x_k y_k \right]^2}{\frac{1}{n} \sum_k x_k^2 \bullet \frac{1}{n} \sum_k y_k^2} \right] \quad (7.17)$$

Posto

$$\mathbf{r} = \frac{\frac{1}{n} \sum_k x_k y_k}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_k x_k^2 \bullet \frac{1}{n} \sum_k y_k^2}} \quad (7.18)$$

si può anche scrivere

$$\mathbf{e}_{\min}''(t_0) = \frac{1}{n} \sum_k^n x_k^2(t_0) (1 - \mathbf{r}^2) \quad (7.19)$$

Se n è molto grande, si può anche scrivere

$$\mathbf{r} = \frac{E\{x(t_0)y(t_0)\}}{\sqrt{E\{x^2(t_0)\} \bullet E\{y^2(t_0)\}}} = \frac{\langle xy \rangle}{\sqrt{\langle x^2 \rangle \bullet \langle y^2 \rangle}} \quad (7.20)$$

Dalla disuguaglianza di Shwartz discende che

$$\rho \leq 1 \quad (7.21)$$

La (7.19) si può ora scrivere

$$\varepsilon_{\min}'' = \langle x^2 \rangle (1 - \rho^2) \quad (7.22)$$

L'errore di somiglianza fra i due processi a t_0 è quindi caratterizzato da ρ , che si chiama coefficiente di correlazione normalizzato. La quantità

$$\rho^* = \langle x(t_0)y(t_0) \rangle \quad (7.23)$$

si chiama coefficiente di correlazione (non normalizzato).

Se $\rho = 1$, si ha $\varepsilon'' = 0$ e si dice che i due processi sono totalmente "correlati" a t_0 .

Se $\rho = 0$, l'errore di somiglianza è massimo e si dice che i due processi sono del tutto "incorrelati" a

t_0 .

Il passo verso la funzione di correlazione è breve: se si ricerca la somiglianza fra $x(t_0)$ e $y(t_0 + \tau)$ il coefficiente di correlazione ρ^* non è più un numero, ma una funzione di τ , cioè la funzione di correlazione incrociata $C_{xy}(t_0, \tau)$.

Se le variabili casuali sono definite sullo stesso processo, si giunge al concetto di funzione di autocorrelazione che descrive quindi come il processo all'istante t è legato al comportamento dello stesso processo a $t+\tau$: la funzione di autocorrelazione caratterizza la memoria del processo.

7.3 - APPLICAZIONI DELL'ANALISI STATISTICA NELL'IMAGE PROCESSING

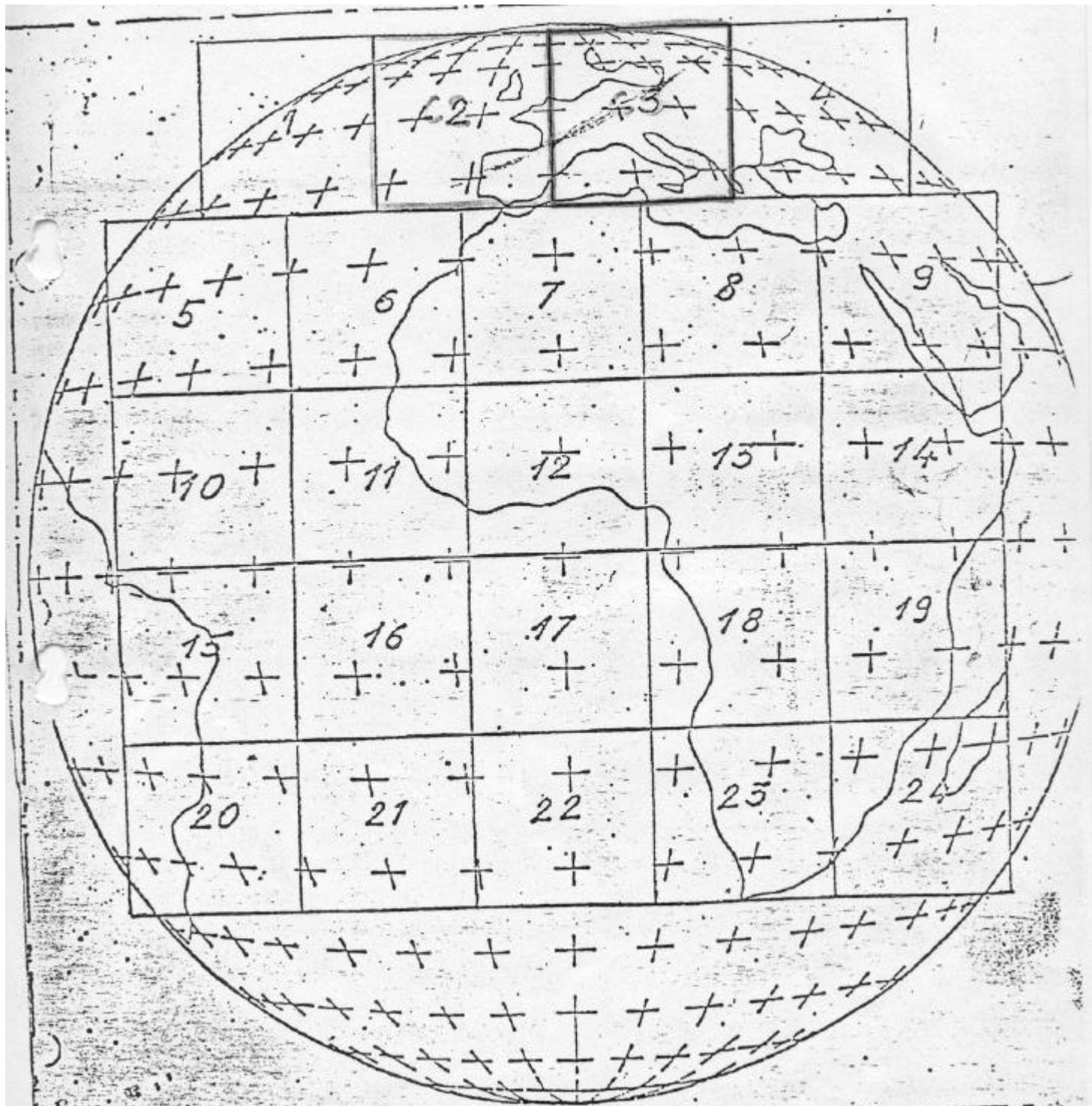
Consideriamo il problema della registrazione e immagazzinamento delle immagini trasmesse da un satellite meteorologico (allo scopo, per es., di costruire e testare modelli matematici per le previsioni del tempo). La **fig. 7.2** mostra la terra vista dal satellite Meteosat.

In genere, il sensore del satellite (una telecamera) esamina la scena in una sequenza di righe ("raster") e trasmette riga per riga un segnale analogico, la cui ampiezza è istante per istante proporzionale alla luminosità locale della scena stessa.

E' impensabile memorizzare il segnale in questa forma: si preferisce campionarlo e digitizzare ogni campione (cioè esprimere la sua ampiezza con un numero) e registrare la sequenza dei numeri.

In sostanza, una immagine è rappresentata mediante una matrice di elementi discreti di immagine ("pels"), avente R righe e C colonne. Tipicamente, per il satellite meteorologico Meteosat è $R = C = 800$ pels (infatti, la banda del segnale della telecamera è limitata a 1600 Hz (per questioni di rumore); la frequenza di Nyquist è 3200 Hz; poiché una riga di immagine dura 1/4 sec., ci saranno 800 punti per riga. Si limita la scena a 800 righe per simmetria).

Il tono di grigio di ogni pel è risolto, tipicamente, in 256 livelli (dal bianco al nero); ogni livello è



identificabile con un numero binario ("codice") di lunghezza costante $l = 8$ bit (codice binario naturale). Per comodità, diciamo che il livello di grigio è il "simbolo" associato al pel: nel nostro caso ci sono 256 simboli possibili, ciascuno identificato da una parola binaria di 8 bit (byte).

Il numero di bit contenuti in una immagine è quindi

$$N = RCI = 800 \times 800 \times 8 = 5 \cdot 10^6 \text{ bit/immagine}$$

Poiché il satellite trasmette una media di 50 immagini al giorno, occorre memorizzare

$$N' = 50N = 2.5 \cdot 10^8 \text{ bit/giorno}$$

Per una buona statistica, occorre accumulare una gran quantità di immagini: il costo della memoria ed il tempo di accesso ad essa diventano rapidamente proibitivi.

Una soluzione per rendere tale inconveniente più accettabile consiste nel cercare una diversa rappresentazione digitale dell'immagine, che richieda un numero inferiore di bit/immagine. Questo problema è noto agli informatici come "data compression". Un approccio si basa sulla misura della frequenza relativa p del simbolo s ($i=0,1,\dots,n-1$) associato al pel P_{jk} ($j=0,1,\dots,R-1$; $k=0,1,\dots,C-1$) per identificarlo (nel caso precedente, il livello di grigio del pel), e nel codificare il simbolo con una parola binaria la cui lunghezza l non è costante (8 bit nel caso precedente), ma tale che i simboli più frequenti siano codificati con le parole più brevi.

Detta p la frequenza relativa di s , la lunghezza media delle parole del nuovo codice sarà, ricordando la (6.11)

$$(7.24) \quad \bar{l} = \sum_0^{n-1} p_i l_i$$

Allora, il numero medio di bit necessario per codificare una immagine sarà

$$\bar{N} = R \cdot C \cdot \bar{l}$$

ed è ragionevole sperare che sia $\bar{N} < N$.

Se una misura preliminare permette di conoscere la (densità di) probabilità degli s , esistono algoritmi (per es. quello di Huffman) per scegliere le l in maniera ottima, cioè in modo che \bar{l} sia minimo; allora anche \bar{N} sarà minimo.

Per chiarire le idee, consideriamo il caso che sia $n = 6$ e

$$\begin{array}{lll} p_0 = 0.4 & p_1 = 0.3 & p_2 = 0.1 \\ p_3 = 0.1 & p_4 = 0.06 & p_5 = 0.04 \end{array}$$

Se si usa una codifica binaria naturale (non statistica) occorrono $l = 3$ bit/simbolo (e quindi per pel).

Un esempio di tale codice è il seguente:

$$\begin{array}{lll} s_0 = 000 & s_1 = 001 & s_2 = 010 \\ s_3 = 011 & s_4 = 100 & s_5 = 101 \end{array}$$

Un esempio di codice di Huffman è

$$\begin{array}{lll} s_0 = 1 & s_1 = 00 & s_2 = 011 \\ s_3 = 0100 & s_4 = 01010 & s_5 = 01011 \end{array}$$

la cui lunghezza media è

$$\bar{l} = 0.4 \cdot 1 + 0.3 \cdot 2 + 0.1 \cdot 3 + 0.1 \cdot 4 + 0.06 \cdot 5 + 0.04 \cdot 5 = 2.2 \text{ bit / pel}$$

ottenendo una compressione del 27%.

Tornando alle immagini da satellite, se si sceglie come simbolo del pel il suo livello di grigio, una statistica su un gran numero di immagini dimostra che i 256 livelli di grigio (dal bianco al nero) sono praticamente equiprobabili: secondo quanto detto sopra, pertanto, ognuno dei 256 simboli dovrebbe essere identificato con una parola di eguale lunghezza. Cioè nessun codice statistico può dare una compressione migliore di quella del binario naturale (8 bit/simbolo).

Per andare avanti, si può cercare un altro simbolo da associare al pel, sperando di ottenere una densità di probabilità non uniforme per i nuovi simboli.

Un metodo si basa sulla forte correlazione che esiste oggettivamente fra il livello di grigio di un pel, G_o , e quello dei pels che lo circondano: pertanto, se è noto il livello di grigio di k pels nell'intorno di G_o (per semplicità, si identifica il pel con lo stesso simbolo del suo livello di grigio), sulla base di questa conoscenza è possibile predire con una certa approssimazione quale è il livello di grigio di G_o .

Se indichiamo con G_o il tono di grigio vero e con \hat{G}_o quello predetto, l'errore di predizione sarà

$$(7.25) \quad D_o = G_o - \hat{G}_o$$

Se la legge di predizione è ragionevole, si faranno spesso errori piccoli e raramente errori grandi. Si può allora associare a ciascun pel un simbolo costituito dall'errore di predizione del suo tono di grigio, commesso dal "predictor": questi simboli vanno memorizzati, come rappresentazione dell'immagine. Noto D_0 (memorizzato) e noto \hat{G}_0 (fornito dal predictor), dalla (7.25) si può comunque risalire a G_0 .

Se la densità di probabilità degli errori risulta non uniforme, la loro codifica statistica risulterà più vantaggiosa rispetto a quella dei livelli di grigio, poiché si otterrà una $\bar{l} < 8$ bit.

Il problema è ora ricondotto a trovare una legge di predizione statisticamente ottima, nel senso che renda minimo l'errore quadratico medio di predizione:

$$(7.26) \quad E\{D_0^2\} = E\{(G_0 - \hat{G}_0)^2\} = \sigma_p^2$$

La soluzione è semplice nel caso si cerchi un predictor lineare

$$(7.27) \quad \hat{G}_0 = A_1 G_1 + A_2 G_2 + \dots + A_k G_k + A_{k+1}$$

ove A_i sono delle costanti e G_1, G_2, \dots, G_k è la sequenza dei pels sui quali è basata la predizione, scelti secondo una opportuna configurazione ("stato di predizione"). Per esempio, uno stato di predizione può essere costituito dai due pels che precedono G_0 sulla stessa riga e dai tre pels sovrastanti della riga precedente.

Si tratta di cercare le A_i che minimizzano σ_p^2 . Sostituendo la (7.27) nella (7.26), derivando e uguagliando a zero

$$(7.28) \quad \frac{\partial}{\partial A_i} E\{(G_0 - (A_1 G_1 + \dots + A_k G_k + A_{k+1}))^2\} = 0$$

si hanno $k+1$ equazioni da cui ricavare le A_i :

$$E\{G_0\} = A_1 E\{G_1\} + \dots + A_k E\{G_k\} + A_{k+1}$$
$$E\{G_0 G_1\} = A_1 E\{G_1^2\} + \dots + A_k E\{G_k G_1\} + A_{k+1} E\{G_1\}$$

(7.29)

$$E\{G_0 G_k\} = A_1 E\{G_1 G_k\} + \dots + A_k E\{G_k^2\} + A_{k+1} E\{G_k\}$$

[Si osservi che le medesime equazioni possono essere ricavate applicando il principio di ortogonalità illustrato nel paragrafo 2.2

$$E\{[G_0 - \hat{G}_0]G_i\} = 0$$

osservando che i dati sono (vedi la (7.27))

$$G_1, G_2, \dots, G_k, 1]$$

Per risolvere il sistema, occorre conoscere le statistiche del I e del II ordine dello stato di predizione. A questo scopo, pensiamo la sequenza dei pels di uno stato di predizione come una realizzazione di un processo random, costruito con tutti i possibili stati di predizione costituiti da k pels della configurazione scelta (su tutte le possibili immagini trasmesse dal satellite...). Allora, G_i ($i=1,2,\dots,k$) è una variabile casuale definita sul processo. Con una analisi preliminare si possono conoscere i momenti del I e II ordine

$$E\{G_i\} \text{ medie di insieme}$$

$$E\{G_i G_j\} \text{ funzioni di correlazione}$$

Usando i valori ottimi delle A_i così trovati, si trova

$$(7.30) \quad \mathbf{s}_{pmin}^2 = E\{G_0^2\} - A_{k+1} E\{G_0\} - \sum_1^k A_n E\{G_0 G_n\}$$

Per esemplificare, consideriamo il caso $k = 1$ e supponiamo il processo stazionario al II ordine.

Dalla (7.27)

$$(7.31) \quad \hat{G}_0 = A_1 G_1 + A_2$$

e dalle (7.29), con $E\{G_0\} = E\{G_1\} = \langle G \rangle$, e con $E\{G_0^2\} = E\{G_1^2\} = \langle G^2 \rangle$

-7.12-

$$\begin{aligned} \langle G \rangle &= A_1 \langle G \rangle + A_2 \\ (7.32) \quad E\{G_0 G_1\} &= A_1 \langle G^2 \rangle + A_2 \langle G \rangle \end{aligned}$$

Dalla prima

$$A_2 = \langle G \rangle (1 - A_1)$$

Dalla seconda

$$A_1 = \frac{E\{G_0 G_1\} - \langle G \rangle^2}{\langle G^2 \rangle - \langle G \rangle^2}$$

che si può anche scrivere

$$= \frac{E\{(G_0 - \langle G \rangle)(G_1 - \langle G \rangle)\}}{\sqrt{E\{(G_0 - \langle G \rangle)^2\}E\{(G_1 - \langle G \rangle)^2\}}}$$

Ricordando la (7.20), questo è il coefficiente di correlazione normalizzato, ρ , delle variabili centrate, il quale assume valori compresi fra 0 e 1.

Pertanto

$$A_1 = \rho \quad A_2 = \langle G \rangle (1 - \rho)$$

e la (7.31) si può scrivere

$$(7.33) \quad \hat{G}_0 = (1 - \rho) \langle G \rangle + \rho G_1$$

Il pel G_1 è comunemente quello che precede G_0 sulla riga.

L'interpretazione della (7.33) è abbastanza significativa: se $\rho \neq 0$, cioè se esiste una forte correlazione locale sull'immagine tra due pels adiacenti, la (7.33) diventa

$$(7.34) \quad \hat{G}_0 \sim G_1$$

cioè la stima migliore del livello di grigio di G_0 consiste nel prendere tale livello eguale a quello del pel precedente.

Se invece è $\rho \sim 0$, cioè se i pels sono praticamente incorrelati, la (7.33) diventa

$$(7.35) \quad \hat{G}_o \sim \langle G \rangle$$

cioè la stima migliore del livello di grigio di G_o consiste nel prendere tale livello eguale al livello di grigio medio dell'immagine.

Del processo in esame (cioè le immagini trasmesse dal satellite meteorologico) è stata stimata la funzione di correlazione, che e', in forma normalizzata

$$(7.36) \quad E\{G_i G_j\} = C(r,c) = e^{-\sqrt{\alpha_r r^2 + \alpha_c c^2}}$$

ove r e c sono le distanze, in numeri di riga e di colonna, fra i due elementi; α_r e α_c sono due coefficienti determinati sperimentalmente

$$\alpha_r = 16.7 \cdot 10^{-4} \quad \alpha_c = 9.28 \cdot 10^{-4}$$

Si ha allora,

$$E\{G_o G_1\} = C(0,1) = 0.97$$

per cui la (7.33) diventa

$$(7.37) \quad \hat{G}_o = 0.03\langle G \rangle + 0.97G_1$$

che è il predictor lineare ottimo (unidimensionale) per la classe di immagini la cui statistica è

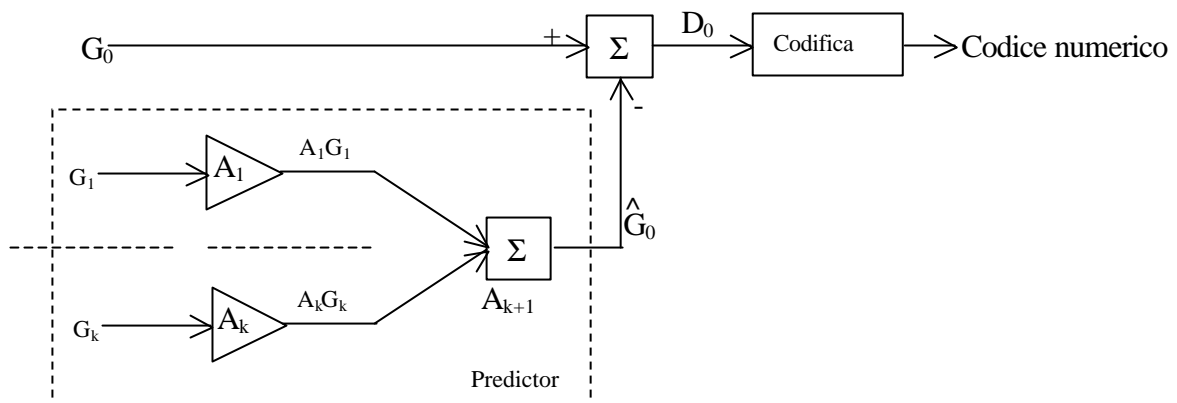


Fig. 7.3

modellata dalla (7.36).

Nella codifica a predizione delle immagini in esame, si trova che un modello analitico abbastanza buono per la densità di probabilità dell'errore di predizione D è il seguente

$$(7.38) \quad p(D) = \frac{\sqrt{2}}{2s_p} e^{-\frac{\sqrt{2}}{s_p}|D|}$$

che è nota come funzione di densità di probabilità di Laplace. Con la (7.38) e la procedura di Huffman è possibile determinare un codice statistico ottimo.

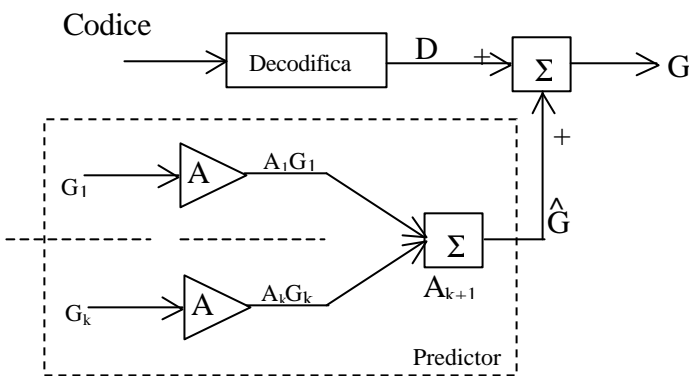


Fig. 7.4

La **Fig. 7.3** mostra lo schema di principio di un codificatore a predizione, che implementa la (7.27) e la (7.25).

La **Fig. 7.4** mostra il corrispondente decodificatore che ricostruisce il vero livello di grigio del pel.

7.4 - APPLICAZIONE DELL'ANALISI STATISTICA ALL'EDITORIA ELETTRONICA

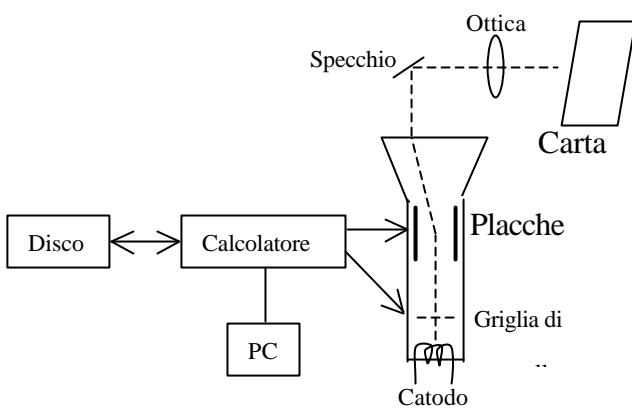


Fig. 7.5

La **Fig. 7.5** mostra lo schema a blocchi (molto semplificato) di una "typesetter", la quale è una macchina elettro-ottica che viene oggi usata nelle tipografie per il lavoro di stampa. Prima di descriverne il principio di funzionamento, è necessario fornire qualche informazione preliminare sulla

particolare terminologia usata dai tipografi.

In tipografia, l'unità di misura di lunghezza si chiama "*pica*" e corrisponde a 4.2.... mm. Il suo sottomultiplo è il "*punto*", eguale a 1/12 di pica, cioè circa 0.35 mm. La risoluzione accettata nella definizione di un carattere è 1/10 di punto (brevemente, 1 dp) pari circa 0.035 mm. L'altezza di un carattere si chiama "*corpo*", ed i corpi usati vanno tipicamente da 5 a 96 punti.

Lo stile con cui è disegnato un set di caratteri si chiama "*fonte*" (es. Courier, Bodoni, Roman, Helvetica,...). Una tipografia usa tipicamente almeno 50 fonti. Ciascuna fonte contiene tipicamente 128 caratteri (maiuscole, minuscole, simboli,...).

Vediamo ora come può essere costruita una descrizione digitale di un carattere. Immaginiamo ogni carattere inscritto in un quadrato di lato eguale al corpo del carattere stesso; immaginiamo poi questo quadrato suddiviso in quadratini (pels) di lato 1 dp. Ciascun pel risulterà ovviamente bianco (e identifichiamolo col simbolo binario 0), oppure nero (1), essendo questi gli unici livelli di grigio presenti nei caratteri a stampa. Questa matrice di 1 e 0 (bitmap) e' la descrizione digitale del carattere. Le bitmap sono memorizzate in un disco magnetico, mostrato in Fig. 7.5.

Descriviamo ora il principio di funzionamento di una typesetter.

L'elemento scrivente è lo spot luminoso che viene generato dal fascetto di elettroni in un tubo a raggi catodici. L'immagine di questo spot viene focalizzata sul piano della carta sensibile. Lo spostamento dello spot avviene deflettendo opportunamente il fascetto di elettroni nel tubo. Il dattilografo batte il testo da stampare sulla tastiera di un pC; quindi il file viene inviato al calcolatore che gestisce la typesetter. Per ciascun carattere, il calcolatore cerca sul disco la bitmap corrispondente e, mentre deflette il fascio elettronico nel tubo, tiene il fascio stesso spento in corrispondenza dei pels bianchi (0 nella bitmap) e acceso in corrispondenza dei pels neri (1 nella bitmap). L'accensione e lo spegnimento viene controllata tramite una griglia del tubo stesso. [Una tecnologia più moderna usa un laser, anziché un tubo a raggi catodici; la deflessione del fascio laser avviene ruotando uno specchio].

Quando una pagina e' completata, la carta sensibile viene sviluppata con un normale processo fotografico, e dalla fotografia ottenuta si ricava la matrice che viene usata dalla rotativa per la stampa vera e propria.

In linea di principio, si può pensare di digitalizzare tutti i caratteri di tutte le fonti e di tutti i corpi, e poi immagazzinare le bitmap su un disco magnetico. Per questo, occorrerebbe una capacità di disco di centinaia di Gbit, come è facile verificare. Questo oggi non è un problema, perché i dischi sono estremamente compatti e relativamente poco costosi (era invece un problema insormontabile una ventina di anni fa, quando nacque la tecnologia delle typesetters: un disco da 200 Mbit occupava un volume di circa 60X60X20 cm e pesava più di 20 kg!). Il reale problema è il tempo di accesso al disco, che è di parecchie decine di msec. (il tempo di accesso è il tempo che le testine di lettura del disco impiegano per trovare la descrizione del carattere sulla superficie del disco), ed il tempo necessario per leggere la bitmap. Questo rallenterebbe in maniera intollerabile il lavoro di fotocomposizione (una pagina di quotidiano moderno ha tipicamente 10 caratteri/cm² e una superficie a stampa di circa 1000 cm²; avendo il quotidiano circa 40 pagine, questo corrisponde a circa 400.000 caratteri. Con un tempo di accesso di 50 msec occorrerebbero circa 5 ore).

La dimensionalità del problema viene inizialmente ridotta col seguente criterio: anziché memorizzare la descrizione digitale di tutti i corpi, si memorizza solo quella di alcuni di essi (corpi master); gli altri corpi vengono ricavati dal master di dimensioni più vicine con una operazione di ingrandimento o riduzione. Questa operazione viene fatta con mezzi elettronici e risulta di gran lunga più veloce della ricerca del carattere su disco. I master scelti sono quattro: 7, 14, 28, 56 punti.

In base a quanto detto in precedenza, la quantità di bit da memorizzare, per es. per il master di 7 punti, e':

$$70 \times 70 \text{ bit/caratt.} \times 128 \text{ caratt/fonte} \times 50 \text{ fonti} = 31.36 \text{ Mbit}$$

In totale, occorre una memoria di circa 2.65 Gbit ed occorre cercare su disco al più 25600 caratteri (in realtà sono molto meno: difficilmente nella stampa di un giornale o di un libro si usano più di una

decina di fonti). Resta comunque il problema del tempo di lettura della bitmap (per es. il master di 7 punti è descritto da 4900 bit).

Il problema è stato risolto in maniera analoga a quella descritta nel caso delle immagini del Meteosat. Consideriamo un master, per es. di 7 punti. La sua bitmap può essere considerata una realizzazione di un processo casuale *del quale sono note tutte le realizzazioni* (sono infatti note tutte le bitmap dei master di 7 punti di tutte le fonti). Del processo sono quindi note con esattezza tutte le statistiche (si possono cioè misurare esattamente tutte le densità di probabilità che occorrono). Su questo processo si può allora definire un predictor ottimo, cercando per tentativi una configurazione di pels su cui basare la predizione, che sia costituita da un numero ragionevolmente piccolo di pels e dia nel contempo una elevata compressione. La **Fig. 7.6** mostra, tratteggiati, i pels che formano la maschera

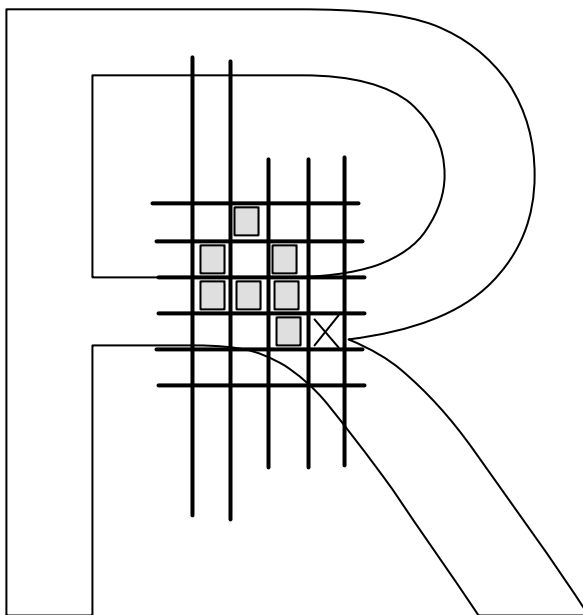


Fig. 7.6

su cui si basa la predizione per una typesetter commerciale (Harris): il pel da predire è marcato con X. Si tenga presente che la bitmap viene percorsa per colonne.

L'errore di predizione sarà ovviamente 0 (quando la predizione è giusta) oppure 1 (quando è sbagliata). I pels ove l' algoritmo sbaglia (e sono veramente pochi...) vengono chiamati "punti eccezione" dell'algoritmo.

Analogamente al caso delle immagini Meteosat, il carattere è ora descritto da una bitmap di errori di predizione, costituita in gran parte da 0 e da qualche 1 isolato. Se contiamo gli 0 che intercorrono tra due 1, questo numero rappresenta la distanza, in numero di pels, fra i punti eccezione. Tale distanza, chiamata run length, rappresenta l'informazione che occorre memorizzare. Per es. se le r.l. successive sono 15, 23, 85, 27,... significa che le prime quindici predizioni sono giuste, la sedicesima è sbagliata (e ciò significa semplicemente

che il risultato giusto è il contrario della predizione); le successive 23 predizioni sono giuste, mentre la seguente è errata; ecc.

La compressione avviene codificando le r.l.: si misura la frequenza di occorrenza delle r.l. e con l'algoritmo di Huffman si costruisce un codice ottimo a lunghezza di parola variabile, che minimizza la lunghezza media delle parole con cui si codificano le r.l.

I risultati che si ottengono sono i seguenti:

Master	bit/caratt originali	<bit/caratt> dopo la codif.	fattore di compressione
7 punti	4900	404	12.1
14 "	19600	787	24.9
28 "	78400	1552	50.5
56 "	313600	3425	91.5

Tab. 7.1

7.5 - TECNOLOGIA DEI CORRELATORI

La misura sperimentale della funzione di correlazione non può ovviamente essere fatta in accordo con le definizioni rigorose (7.4) e (7.10), poiché la durata di osservazione dei segnali è necessariamente finita. Possiamo solo stimare la funzione di correlazione, cioè possiamo misurare

$$(7.39) \quad \hat{C}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} y(t)x(t+\tau)dt$$

che nel caso discreto si scrive

$$(7.40) \quad \hat{C}_{xy}[kT_s] = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} y[nT_s]x[(n+k)T_s] \quad k=0,1,..m$$

E' chiaro che la stima sarà tanto migliore quanto più grande è T, oppure N. Si potrebbe in ogni

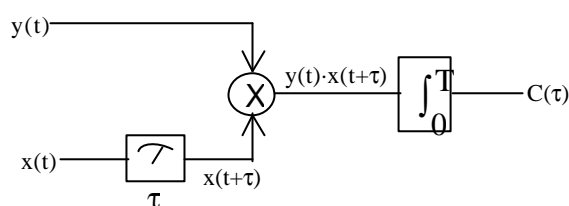


Fig. 7.7

caso far vedere che l'errore di stima

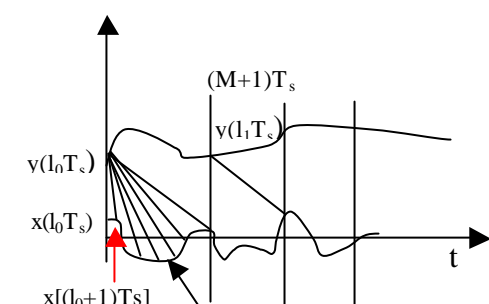
$$(7.41)$$

che è una varianza, va come $1/BT$, essendo B la banda passante dei segnali ($=1/2T_s$ nel caso discreto) e T il tempo di integrazione ($=NT_s$).

La meccanizzazione delle equazioni (7.39) o (7.40) si traduce nello schema a blocchi di **Fig. 7.7**, che rappresenta un correlatore che calcola la $C(\tau)$ punto per punto.

Il principio di funzionamento è il seguente: fissato un valore del ritardo, $\tau = \tau_0$, si fanno scorrere i segnali preventivamente registrati; si ottiene in uscita un punto di $C(\tau)$, cioè $C(\tau_0)$. Variando il ritardo e ripetendo il procedimento, si costruisce per punti la $C(\tau)$.

Tale principio può essere effettivamente messo in atto registrando i due segnali su due registratori magnetici diversi, ritardando l'avvio di un registratore rispetto all'altro. E' chiaro che il processo è lentissimo: se si vogliono $(m+1)$ punti per descrivere la $C(\tau)$ (il che significa che si ritiene $C(\tau) = 0$ per $\tau > (m+1)\tau_0$), occorre attendere $(m+1)T$ sec., e se B è piccolo (segnali a bassa frequenza) T può essere anche di molti minuti se si vuole una buona precisione.



Una soluzione migliore, che calcola contemporaneamente gli $(m+1)$ punti e si presta anche per applicazioni in tempo reale (correlatore "on-line" con l'esperimento) è

illustrata in **Fig. 7.8**, ove si opera su segnali campionati.

Per illustrare il principio di funzionamento, consideriamo il campione di $y(t)$ preso all'istante $t = l_0 T_s$ del tempo del segnale, cioè $y(l_0 T_s)$.

Il correlatore opera come segue:

- memorizza $y(l_0 T_s)$.
- moltiplica $y(l_0 T_s)$ per i campioni successivi di $x(t)$, cioè per $x(l_0 T_s)$; $x[(l_0+1)T_s]$; $x[(l_0+m)T_s]$

ottenendo:

$x(l_0 T_s)y(l_0 T_s)$	ritardo 0
$x[(l_0+1)T_s]y(l_0 T_s)$	" T_s
$x[(l_0+2)T_s]y(l_0 T_s)$	" $2T_s$
.....	
$x[(l_0+m)T_s]y(l_0 T_s)$	" mT_s

- memorizza i prodotti.

Si campiona di nuovo $y(t)$, ottenendo $y(l_1 T_s)$, e si ricalcolano i prodotti con i successivi campioni di $x(t)$, ottenendo

.....	
$x[(l_1+k)T_s]y(l_1 T_s)$	ritardo kT_s

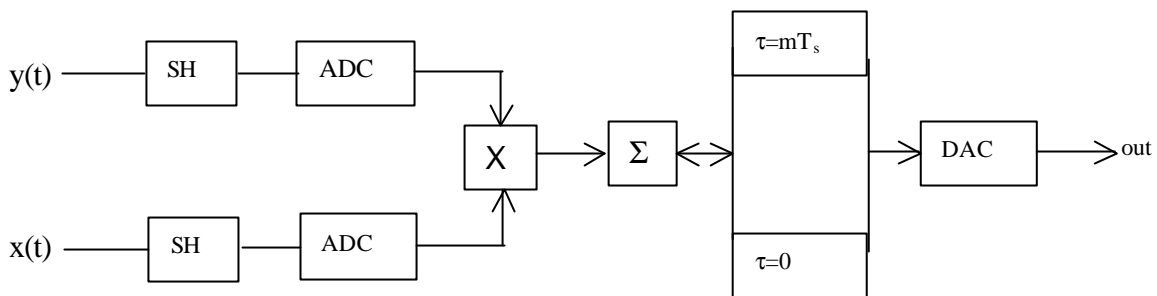


Fig. 7.9

e ciascun prodotto è sommato al contenuto della rispettiva locazione di memoria (stesso ritardo).

Lo schema a blocchi di un correlatore che opera secondo come descritto è mostrato in **Fig. 7.9**.

Per ottenere gli $(m+1)$ punti della $C(\tau)$, ciascuno mediato su N prodotti, occorrono $(m+1)N$ campioni di $x(t)$, quindi un tempo

$$T = (m+1)NT_s$$

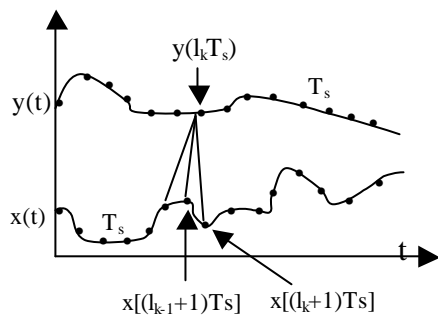


Fig. 7.10

Ora, supponendo che i due segnali x e y abbiano larghezza di banda uguale, e che T_s sia stato scelto $= 1/2B$, in modo da non perdere informazione sul segnale $x(t)$, segue che $y(t)$ risulta essere sottocampionato $(m+1)$ volte.

Un correlatore che supera questo inconveniente opera secondo lo schema di **Fig. 7.10**, ove entrambi i segnali sono campionati

con lo stesso periodo T_s . All'istante lT_s del tempo del segnale occorre avere già in memoria m campioni precedenti di $x(t)$; nell'intervallo di tempo T_s prima del successivo campionamento, occorre effettuare le operazioni già descritte.

Lo schema a blocchi del correlatore è mostrato in **Fig. 7.11**.

La memoria FIFO (first-in, first-out) è una memoria a shift: il nuovo elemento in arrivo (campione attuale di $x(t)$) sposta in avanti di una posizione il contenuto precedente, cosicché il dato in cima va perduto.

Come si vede, in T_s sec. occorre effettuare $m+1$ operazioni, ciascuna delle quali consiste in

- lettura di un dato $x(\cdot)$ dalla FIFO
- moltiplicazione del dato letto per $y(\cdot)$

- ciclo di lettura-somma-scrittura del risultato nella memoria di integrazione.

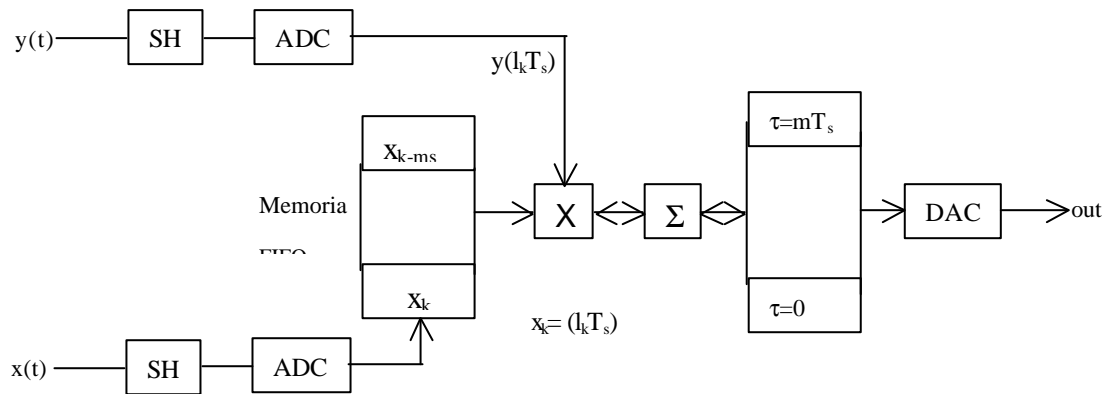


Fig. 7.11

Se una operazione dura θ sec., occorre che sia

$$T_s > (m+1)\theta$$

Così, per es., assumendo $\theta = 100$ nsec, $m+1 = 256$ si ha

$$T_s = 25.6 \mu\text{sec}; \quad v_s = 1/T_s = 39 \text{ kHz}$$

cioè si possono analizzare segnali con banda fino a $f = 19.5$ kHz. Se ci si accontenta di mediare su $N = 10000$ campioni, occorre un tempo

$$T = 10000 \cdot 25.6 \mu\text{sec} = 256 \text{ msec}$$

Correlatori adatti a segnali con larghezza di banda maggiore di quella considerata, portano avanti in parallelo il calcolo degli $m+1$ punti della funzione di correlazione, usando $m+1$ moltiplicatori ed altrettanti sommatore, uno per ogni punto della $C(\tau)$.

Bibliografia

J. Max, Méthodes et techniques de traitement du signal. Masson 1981

G. Cooper, C. McGillem, Methods of signal and system analysis. Holt, Rinehart, Winston

A. Papoulis, Probabilità, variabili aleatorie e processi stocastici. Boringhieri