

CAPITOLO 6

DESCRIZIONE STATISTICA DI UN SEGNALE CASUALE

6.1 - GENERALITA'

Nei capitoli precedenti abbiamo considerato il caso in cui il risultato di un esperimento (segnale di uscita) possa essere modellato con una funzione esplicita $x(t)$: con ciò intendiamo dire che ogni qualvolta viene realizzato detto esperimento, il risultato sarà sempre modellabile con la stessa $x(t)$, la quale permette di prevedere esattamente i valori futuri che assumerà l'uscita senza bisogno di effettuare la misura.

In altri casi può invece accadere che o non è possibile descrivere analiticamente il risultato della misura (per es. a causa della complessità del sistema), oppure l'espressione analitica di $x(t)$ (o anche solo un suo parametro, per es. il valore max) cambia in maniera non predicibile ogni volta che si ripete l'esperimento.

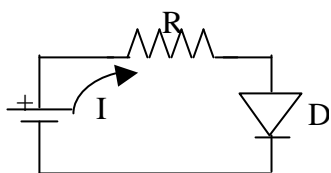


Fig. 6.1

Consideriamo, dapprima, il caso illustrato nella Fig. 6.1, in cui si misura la corrente attraverso il diodo D. Se l'amperometro (non mostrato) è abbastanza sensibile (per es. uno strumento digitale che apprezzi frazioni di microampere), la corrente misurata non sarà costante ma, per cause di cui ci occuperemo nel seguito, avrà un andamento fluttuante in maniera del tutto casuale, Fig. 6.2, intorno alla misura fornita da uno strumento poco sensibile (per es. un tester analogico).

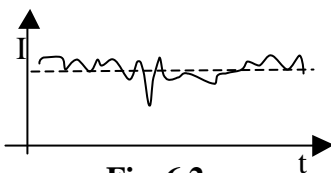


Fig. 6.2

La natura dell'esperimento è tale che anche la conoscenza esatta dei valori misurati da $-\infty$ a t_0 non permette di prevedere esattamente il valore della corrente che si misurerà a t_0+dt . Non è quindi possibile dare una espressione analitica esplicita per la $I(t)$, cioè un modello matematico deterministico, e si parla di segnale casuale (o aleatorio, o random).

Come altro esempio, consideriamo il segnale di tensione all'uscita di un rivelatore di particelle. Di norma, la sua “forma” è costante, $s(t)$, ma la sua ampiezza A cambia a caso di volta in volta,

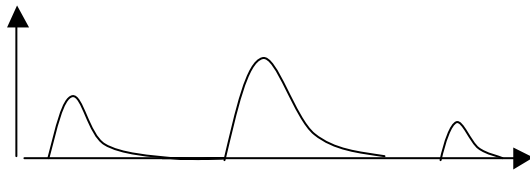


Fig. 6.3

Fig.6.3. Il segnale di uscita è quindi $As(t)$, con A casuale.

Negli esperimenti nei quali i segnali hanno caratteristiche di aleatorietà nel senso sopra descritto,

si può al più sperare di prevedere quale sarà **probabilmente** il risultato della misura, in un certo istante t_0 (misurato a partire dall'inizio dell'esperimento), di un parametro del segnale (per es. la sua ampiezza). Il problema che ora ci poniamo è come definire un modello matematico probabilistico (o statistico) che ci permetta di fare queste previsioni.

E' abbastanza intuitivo che per far questo occorre studiare preliminarmente il “comportamento” dell'esperimento in esame, cioè occorre realizzare preliminarmente molti esperimenti della stessa natura di quello in esame e nelle identiche condizioni (nel caso del primo esempio, occorrerebbe registrare nello stesso laboratorio la corrente in un gran numero N di diodi eguali, usando resistenze e generatori eguali, amperometri eguali, ecc.). Si può poi pensare di misurare, in ciascun esperimento, il valore del parametro (l'intensità di corrente) all'istante t_0 di interesse (per es. l'ampiezza), e utilizzare queste informazioni per stabilire delle regole che permettano di predire quale valore del parametro si misurerà probabilmente, sempre all'istante t_0 , quando l'esperimento sarà ripetuto una $N+1$ -ma volta.

E' anche intuitivo che la regola di predizione sarà tanto più affidabile quanto più grande è N , cioè quanto più abbiamo imparato sulla “storia” dell'esperimento in esame. Ma per far questo è necessario poter realizzare un gran numero di esperimenti contemporaneamente: cosa quasi mai possibile, in pratica.

Nei paragrafi seguenti, questi concetti intuitivi verranno precisati quantitativamente e si farà vedere che, analogamente al “modello deterministico” $x(t)$, è possibile stabilire un “modello statistico” nel caso di segnali random.

6.2 - PROCESSI E VARIABILI CASUALI

Supponiamo di avere accesso a tutti i possibili esperimenti della stessa natura e fatti nelle identiche condizioni (nell'esempio del paragrafo precedente, la misura della corrente in tutti i diodi dello stesso tipo, nelle identiche condizioni circuitali e ambientali).

L'insieme di tutti i risultati degli esperimenti costituisce un **“processo random”**, e lo si indica con $x(t, \xi)$, essendo ξ il numero d'ordine dell'esperimento e t la variabile indipendente in un singolo esperimento, la quale, nei casi di interesse per l'elettronica, è sempre il tempo.

Il risultato di un particolare esperimento $\xi = \xi_0$, cioè

$$x(t, \xi_0)$$

si chiama **“funzione campione”** o **“realizzazione”** del processo random $x(t, \xi)$: nell'esempio di Fig. 6.1 sopra considerato, $x(t, \xi_k)$ sarà la corrente misurata effettuando l'esperimento col k -mo diodo: una realizzazione del processo è quindi il segnale.

Altri esempi di realizzazioni di processi random sono:

- l'elettroencefalogramma del k -mo ammalato di un gruppo di ammalati aventi la stessa affezione (t è ancora il tempo);
- le risposte del k -mo individuo di un gruppo intervistato dalla Doxa per un sondaggio di opinione (t è un numero d'ordine);
- ecc.

Si è detto che il risultato dell'esperimento ξ_k misurato ad un certo istante t_0 , cioè $x(t_0, \xi_k)$, è un numero che varia casualmente da esperimento ad esperimento: se consideriamo gli infiniti valori che si possono misurare all'istante t_0 sulle infinite realizzazioni costituenti un processo random, su questo insieme (che per comodità consideriamo continuo) possiamo definire una variabile che chiamiamo **“variabile casuale”**, indicandola con:

$$X = X(t_0, \xi)$$

essendo

$$X(t_0, \xi_k) = x_k$$

un particolare valore di X .

In generale, indicheremo con x sia il processo, sia la variabile aleatoria sia i suoi valori, se non c'è rischio di confusione nel contesto.

6.3- DISTRIBUZIONE DI PROBABILITA' E DENSITA' DI PROBABILITA'

Ricordiamo brevemente la definizione di probabilità di un evento A:

$$(6.1) \quad P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n} \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

essendo n il numero di prove eseguito, e n_A il numero di volte in cui si verifica l'evento A nelle n prove.

In pratica, si può eseguire un numero finito di prove, per cui la probabilità può essere in questi casi solo stimata:

$$(6.2) \quad \hat{P}(A) \approx \frac{n_A}{n}$$

e \hat{P} viene più propriamente chiamata la frequenza dell'evento A relativa alle n prove eseguite.

Nel caso di una variabile casuale x , assunta continua e definita in $(-\infty, +\infty)$, non ha senso chiedersi qual è la probabilità che x assuma il valore x_0 : questa probabilità è sempre zero essendo infinito il numero dei casi possibili.

Nel caso delle variabili continue interessano, ed hanno senso, due altre domande:

a) qual è la probabilità che x assuma un valore $\leq x_0$? Si scrive:

$$(6.3) \quad P(x_0) = P[x \leq x_0]$$

Si è usato il simbolo $P[.]$ per dire "probabilità che...".

La $P(x)$ è chiamata **funzione di distribuzione di probabilità** del primo ordine, e gode delle seguenti proprietà:

- $P(x)$ è una funzione non decrescente di x ;
- $0 \leq P(x) \leq 1$;
- $P(-\infty) = 0$; $P(+\infty) = 1$;

- $P[x_1 \leq x \leq x_2] = P[x \leq x_2] - P[x \leq x_1] = P(x_2) - P(x_1)$

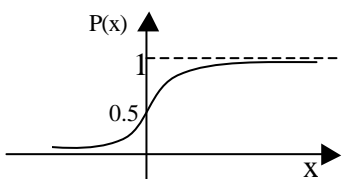


Fig. 6.4

La **Fig. 6.4** rappresenta una tipica funzione di distribuzione di probabilità, detta gaussiana, per una variabile distribuita intorno a 0.

b) Quale è la probabilità che la variabile x assuma un valore compreso fra x_0 e x_0+dx ?

Per quanto detto in a):

$$P[x_0 \leq x \leq x_0+dx] = P(x_0+dx) - P(x_0)$$

Supponendo $P(x)$ continua e derivabile

$$P[\bullet \] = \frac{dP(x)}{dx} dx$$

La funzione

$$(6.4) \quad p(x) = \frac{dP(x)}{dx}$$

che esprime la probabilità che la variabile x assuma un valore compreso in un intervallo unitario intorno ad x_0 , si chiama **funzione di densità di probabilità** del I ordine, e valgono le proprietà:

$$(6.5) \quad P(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx$$

$$P[x_1 \leq x \leq x_2] = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$$

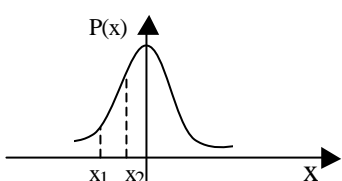


Fig. 6.5

La **Fig. 6.5** mostra la densità di probabilità gaussiana.

Nel caso si considerino n variabili random, si possono definire la distribuzione di probabilità congiunta di ordine n , e la densità di probabilità congiunta di ordine n .

Come apparirà dal paragrafo seguente, il modello statistico completo di un processo random richiederebbe la conoscenza delle densità (o delle distribuzioni) di probabilità di tutti gli ordini: tuttavia, in pratica ci si limita alla statistica del II ordine perché solo alle funzioni di 2 variabili casuali si sa attribuire un significato fisico.

Le probabilità del II ordine vengono definite come segue. Consideriamo dapprima due variabili casuali x e y appartenenti a due processi diversi:

$$x = x(t_0, \xi); \quad y = y(t_1, \xi)$$

La distribuzione di probabilità congiunta è la probabilità che x assuma un valore $\leq x_0$ e Y un valore $\leq y_1$:

$$(6.6) \quad P(x_0, y_1) = P[x \leq x_0; y \leq y_1]$$

Analogamente, per la densità di probabilità del II ordine $p(x, y)$ si può scrivere:

$$P[x \leq x \leq x + dx; y \leq y \leq y + dy] = \frac{\partial^2 P(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy$$

per cui

$$(6.7) \quad p(x, y) = \frac{\partial^2 P(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Se accade che

$$(6.8a) \quad P(x, y) = P(x)P(y)$$

$$(6.8b) \quad p(x, y) = p(x)p(y)$$

si dice che le due variabili sono statisticamente indipendenti.

Le definizioni possono essere ovviamente estese al caso che le due variabili casuali siano definite sullo stesso processo, rispettivamente x_1 all'istante t_1 e x_2 all'istante t_2 .

6.4 - DESCRIZIONE STATISTICA DI UN SEGNALE CASUALE

Precisiamo innanzi tutto quali informazioni si può pretendere di conoscere su uno o, congiuntamente, su più processi random.

In generale, considerato un set di variabili casuali x, y, z, t, \dots che per semplicità supporremo provenienti dallo stesso processo (ma è facile estendere quanto ora diremo al caso che le variabili provengano da processi diversi), e definita la funzione $f(x,y,z,t, \dots)$, che è una nuova variabile aleatoria, ciò che è lecito chiedersi è:

quale valore di $f(\cdot)$ ci si può aspettare di misurare nella prossima realizzazione?

Tale valore aspettato (o atteso) è indicato con

$$(6.9) \quad E\{f(x,y,z,t,\dots)\}$$

Si è già detto che alla domanda si può dare risposta solo sulla base della passata esperienza acquisita sul processo. Consideriamo dapprima, per semplicità, il caso

$$f(\cdot) = x$$

Ragionevolmente, la previsione del valore futuro di x può essere fatta osservando i valori assunti in passato da x , attribuendo un “peso” a ciascuno di tali valori numerici e, infine, combinando opportunamente questi valori pesati per predire il valore di x .

E’ anche ragionevole assumere ciascun peso (normalizzato) pari alla probabilità di occorrenza del corrispondente valore numerico di x .

Inoltre, la combinazione più semplice dei valori pesati è quella lineare la quale, come noto, prende in questo caso il nome di media pesata.

In altri termini, il valore che possiamo aspettarci di misurare per x , cioè $E\{x\}$, è quello che mediamente abbiamo misurato nella precedente storia del processo.

-6.10-

Quanto sopra detto è una definizione operativa del valore aspettato. Per definirlo in modo formale, consideriamo dapprima il caso che x sia una variabile casuale discreta di cui si siano misurati i valori

$$x_i = x(t_0, \xi_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

su n realizzazioni.

Si ha, per definizione di media

$$(6.10) \quad E\{x\} \approx \sum_1^n p_j x_j$$

ove in pratica p_j saranno le frequenze relative.

Questo risultato può essere esteso al caso di una variabile aleatoria continua, che assuma valori fra $-\infty$ e $+\infty$ e che abbia densità di probabilità $p(x)$

$$(6.11) \quad E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \langle x \rangle$$

Questo valore aspettato, chiamato anche momento del I ordine della variabile aleatoria, è una “media di insieme” nel senso che è una media di valori presi ciascuno su una realizzazione del processo, all’istante di definizione della variabile x (una media sull’insieme delle realizzazioni).

Per il calcolo dell’integrale (6.11) occorre conoscere la densità $p(x)$: a questo scopo, se si dispone di un numero sufficientemente grande di realizzazioni del processo su cui è definita la variabile $x(t_0)$, si può fare un istogramma dei valori di x misurati a t_0 e approssimare l’istogramma con una funzione (di area unitaria) che è appunto la $p(x)$.

Se ora consideriamo una generica funzione di variabili aleatorie $f(x, y, z, t, \dots)$, il suo valore aspettato sarà

$$(6.12) \quad E\{f(\bullet)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z, \dots) p(x, y, z, \dots) dx dy dz \dots$$

essendo $p(x,y,z,\dots)$ la densità di probabilità congiunta delle variabili considerate.

Avere una descrizione statistica completa di un processo random significa che per una generica $f(\bullet)$ si è in grado di calcolare $E\{f\}$ (medie statistiche): ma per far questo, in base alla (6.12) occorre conoscere preliminarmente tutte le densità di probabilità $p(\bullet)$ (modello statistico). Questo, in generale, non è possibile, né ha interesse pratico poiché solo al valore atteso di alcune particolari $f(\bullet)$ si sa dare un significato fisico, e solo ad esse siamo quindi interessati.

Consideriamo in questo paragrafo le funzioni di una sola variabile casuale, $f(x)$, limitandoci alle medie statistiche di maggior interesse.

Si è già visto il momento del I ordine (6.11). Un altro momento che ha interesse è quello del II ordine

$$(6.13) \quad E\{x^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = \langle x^2 \rangle$$

meglio noto come valore quadratico medio della variabile aleatoria.

Hanno poi interesse i momenti della variabile casuale “centrata”, definita come segue

$$(6.14) \quad \tilde{x} = x - \langle x \rangle$$

Il momento centrale del I ordine è

$$(6.15) \quad E\{x - \langle x \rangle\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle) p(x) dx$$

noto anche come scarto medio. Si ha subito

$$(6.16) \quad E\{x - \langle x \rangle\} = 0$$

Il momento centrale del II ordine, o **varianza**, è

$$(6.17) \quad E\{(x - \langle x \rangle)^2\} = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 p(x) dx$$

La varianza è un indice delle fluttuazioni della variabile intorno al valor medio. E' facile verificare che

$$(6.18) \quad \sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

σ si chiama standard deviation.

Si noti che le (6.15) e (6.17) evidenziano la linearità dell'operatore $E\{\bullet\}$.

E' importante sottolineare che i momenti possono, in pratica, essere solo stimati, poiché si ha accesso ad un numero finito di realizzazioni del processo su cui stimare le densità di probabilità per calcolare le medie. Perché una stima sia affidabile, occorre ovviamente considerare molte realizzazioni per dar modo a $x(t_0, \xi)$ di assumere tutti i valori possibili con la giusta densità di probabilità.

Va anche sottolineato che i momenti dipendono in generale dal particolare t_0 considerato: i momenti misurati a $t_1 \neq t_0$ saranno in generale diversi, e per poterli calcolare occorre misurare le nuove densità di probabilità.

Finora ci siamo interessati a come è possibile caratterizzare il valore che un segnale può assumere in un certo istante t_0 : cioè con la media, il valore quadratico medio, ecc. Ai parametri definiti sappiamo dare un significato anche intuitivo; se noi li conoscessimo per ogni istante sapremmo cosa ci possiamo aspettare se realizzassimo un altro esperimento di quel processo. Sfortunatamente, quasi mai abbiamo accesso a un numero sufficientemente grande di realizzazioni per poter fare delle buone stime. Anzi, molto spesso in esperimenti particolarmente complessi si ha accesso ad una sola realizzazione, si può cioè osservare un solo segnale $x(t, \xi_k)$. L'informazione disponibile è allora quella di:

- *media temporale*

$$(6.19) \quad \bar{x}(t_0, \mathbf{x}_k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t, \mathbf{x}_k) dt$$

- *valore quadratico medio nel tempo*

$$(6.20) \quad \overline{x^2}(t_0, \mathbf{x}_k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t, \mathbf{x}_k) dt$$

- *scarto quadratico medio nel tempo*

$$(6.21) \quad \sigma^2 = \overline{|x - \bar{x}|^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x - \bar{x}|^2 dt$$

Se il segnale $x(t, \xi_k)$ è, per es., una tensione allora \bar{x} è la sua componente continua quale verrebbe letta da un voltmetro in d.c. Inoltre, $\sqrt{\overline{x^2}}$ è il suo valore efficace, quale verrebbe letto da un voltmetro a vero valore efficace. Infine, σ è il valore efficace delle sole componenti variabili, letto da un voltmetro in a.c. che non risponde alla continua.

In generale, questi valori dipendono da ξ_k , nonché dall'istante t_0 in cui inizia l'osservazione. Inoltre, qualunque segnale fisico può essere osservato su un intervallo di tempo T finito: anche le medie temporali possono quindi essere solo stimate. È anche chiaro che le medie temporali sono molto meno significative rispetto alle medie di insieme: conoscere \bar{x} in $(0, T)$ aiuta, in genere, poco a stimare il valore che ci si aspetta di misurare a un generico t_1 , $0 < t_1 < T$.

6.5 - PROCESSI STAZIONARI E PROCESSI ERGODICI

Da quanto detto nel paragrafo precedente, appare chiara la maggiore ricchezza di informazione associata alle medie statistiche calcolate sull'insieme delle realizzazioni del processo, rispetto alle medie calcolate su una singola realizzazione nel dominio del tempo.

Ciò che rende problematico l'uso delle medie di insieme è da un canto la difficoltà di disporre di un numero sufficientemente grande di realizzazioni, dall'altro il fatto che occorre misurare tali medie in ogni istante, poiché in qualunque processo fisico nulla garantisce a priori che le medie di insieme siano le stesse in ogni istante.

Una difficoltà analoga esiste anche se ci si limita a misurare le medie su una sola realizzazione nel dominio del tempo: infatti, anche se il segnale viene osservato su un tempo T sufficientemente grande, nulla garantisce a priori che le medie debbano essere le stesse qualunque sia l'istante t_0 di inizio dell'osservazione. Inoltre le medie saranno in generale diverse se ci si riferisce ad un'altra realizzazione.

A quanto sopra detto, va infine aggiunto che l'osservatore non ha in generale elementi per poter affermare che esista una qualche relazione tra le medie temporali e quelle di insieme. Questa è una cosa molto spiacevole, poiché è del tutto ovvio che è molto più agevole misurare medie temporali che non medie di insieme.

Per fortuna, in molti processi fisici sulla base dell'esperienza (cioè la storia conosciuta del processo) o di un ragionevole esame delle condizioni sperimentali, si possono fare delle ipotesi semplificative.

Si dirà che un processo è **stazionario** se le medie statistiche sono indipendenti dall'origine dei tempi. Per es. riferendoci alla media di insieme $E\{x\}$, la stazionarietà implica che

$$(6.22) \quad E\{x(t_0, \xi)\} = E\{x(t_1, \xi)\} \quad \forall t_0, t_1$$

Più in generale, un processo si dirà stazionario "**in senso stretto**" se, dette

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

delle variabili aleatorie definite sul processo x agli istanti $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, \dots$ e dette

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_n, \dots$$

delle variabili definite sullo stesso processo agli istanti $t_1 + \theta, t_2 + \theta, \dots$ accade che

$$(6.23) \quad E\{f(x_1, x_2, \dots)\} = E\{f(x'_1, x'_2, \dots)\} \quad \theta, f \text{ arbitr.}$$

Ne segue che se un processo è stazionario, basta conoscere le densità di probabilità ad un solo istante per caratterizzare completamente il processo.

Se si considerano le medie temporali, nel caso stazionario deve essere per es.

$$(6.24) \quad \bar{x}(t_0, \mathbf{x}_k) = \bar{x}(t_1, \mathbf{x}_k) = \bar{x}(\mathbf{x}_k)$$

continuando a sussistere la dipendenza da ξ_k .

Va tuttavia sottolineato che la stazionarietà è una **ipotesi** che si fa sul processo, dopo aver analizzato un certo numero di realizzazioni: tale ipotesi potrebbe anche risultare errata, poiché non si può sapere a priori se si è effettuato un numero sufficientemente grande di prove.

Va anche detto che, poiché i parametri statistici più interessanti sono i momenti del I e II ordine, il più delle volte è sufficiente ipotizzare la stazionarietà fino al II ordine: si parla allora di stazionarietà “**in senso lato**”.

Si dirà che un processo è **ergodico** se le medie temporali (calcolate su una qualunque realizzazione del processo) coincidono con le medie di insieme (calcolate su un qualunque istante). L'ipotesi ergodica semplifica drasticamente lo studio del processo, riducendolo a quello di una sola realizzazione.

Tuttavia, poiché osserviamo un fenomeno su un intervallo finito di tempo ΔT , potremmo essere sicuri di ottenere gli stessi risultati sia operando nel tempo che sull'insieme solo se avessimo la

garanzia che nel ΔT in cui si è osservata la realizzazione sono comparsi tutti i valori che il processo può assumere ad un certo istante t_0 , e con la giusta densità di probabilità: tale garanzia non può fornirla nessuno.

L'ipotesi ergodica può essere verificata solo a posteriori, sulla base delle conseguenze che la sua assunzione ha sui risultati.

E' facile convincersi che un processo stazionario non è necessariamente ergodico: infatti, la stazionarietà implica che le medie siano indipendenti dall'origine dei tempi, ma non richiede che tali medie siano le stesse su qualunque realizzazione del processo.

Viceversa, un processo ergodico è necessariamente stazionario, come appare dalla definizione.

6.6 - PROCESSO GAUSSIANO

Da quanto detto in precedenza, dovrebbe essere chiaro che la difficoltà di calcolare le medie statistiche su un processo è strettamente legata alla difficoltà di misurare le funzioni di densità di probabilità. Ovviamente, questa difficoltà viene meno se è possibile stabilire a priori un modello matematico per tali funzioni.

Sono state in effetti individuate varie classi di processi fisici particolarmente interessanti, le cui proprietà statistiche possono essere modellate con funzioni di densità di probabilità particolarmente semplici.

Descriviamo brevemente il processo gaussiano, la cui densità di probabilità, nel caso di una variabile aleatoria, è

$$(6.25) \quad p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}}$$

La caratteristica essenziale di un processo gaussiano è, come appare dalla (6.25), che basta conoscere i momenti del I e II ordine, $\langle x \rangle$ e σ^2 , per poter calcolare i momenti di qualunque ordine.

L'importanza del processo gaussiano si fonda sul teorema del limite centrale, che può essere così enunciato:

la densità di probabilità della somma di n variabili aleatorie statisticamente indipendenti (la quale somma è una nuova variabile aleatoria) approssima la densità gaussiana per $n \rightarrow \infty$.

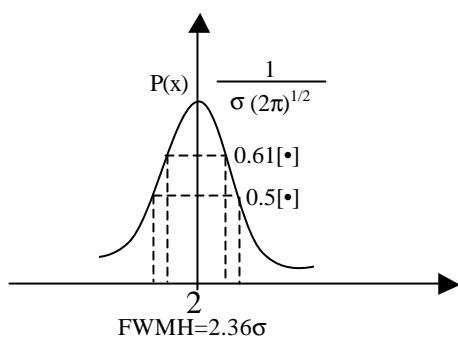


Fig. 6.6

Le richieste del teorema sono verificate in molti processi fisici (per es. nel caso del rumore termico che è dovuto al moto casuale di un gran numero di elettroni indipendenti all'interno di un conduttore). Lo studio di questi processi risulta quindi semplice, poiché non occorre fare misure per determinare la

-6.18-

$p(x)$.

La **Fig. 6.6** mostra la densità di probabilità gaussiana, e sono indicati alcuni valori caratteristici.

6.7 - DISTRIBUZIONE DI POISSON. PROCESSI POISSONIANI.

Supponiamo che un evento si verifichi N volte nell'intervallo di tempo (-T/2,T/2). Ogni occorrenza dell'evento è supposta casuale nel tempo e indipendente dalle altre (si pensi per es. alle gocce di pioggia che cadono in una pentola su un piazzale).

Se consideriamo un intervallo $\Delta t=t_2-t_1$ in (-T/2,T/2), si può dimostrare che la probabilità di trovare k occorrenze dell'evento in Δt è'

$$(6.26) \quad P[k \text{ in } \Delta t] = \frac{(I\Delta t)^k}{k!} e^{-I\Delta t} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

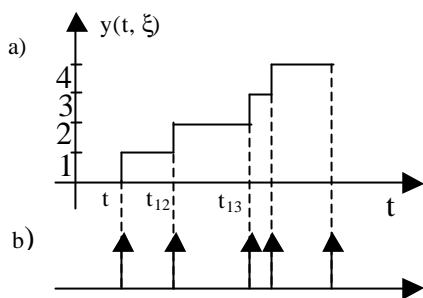
nell'ipotesi che N sia molto grande e $\Delta t \ll T$. Nella (6.26) è'

$$(6.27) \quad I = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N}{T}$$

e rappresenta il numero medio di occorrenze nell'unità di tempo (rate medio). La (6.26) è chiamata funzione di distribuzione di Poisson. Vedremo che i processi di rumore che interessano l'elettronica sono modellabili con "eventi" distribuiti nel tempo secondo la (6.26).

Se l'operazione di distribuire a caso nell'intervallo (-T/2,T/2) N occorrenze dell'evento viene realizzata molte volte (molte pentole disposte sul piazzale), l'insieme di queste realizzazioni costituisce un processo random, $y(t)$, detto processo di Poisson. La **Fig. 6.7a** mostra una maniera per

rappresentare una realizzazione di questo processo, cioè



$y(t, \xi_o)$. Si tratta di una scalinata stocastica di scalini unitari:

$$(6.28) \quad y(t, \xi_o) = \sum_k u(t-t_k)$$

Su questo processo possiamo definire la variabile aleatoria $y(t_o)$ tale che $y(0)=0$ e $y(t_o)=$ numero di eventi nell'intervallo $(0, t_o)$. Tale variabile ammette una distribuzione di Poisson

Fig. 6.7

$$(6.28a) P[y(t_0) = k] = \frac{(I t_0)^k}{k!} e^{-I t_0}$$

Se calcoliamo le statistiche di y, si trova [vedi dispense complete, oppure (3)]:

$$(6.29) E\{y\} = I t_0$$

$$(6.30) \sigma_y^2 = \lambda t_0$$

Costruiamo ora il processo casuale

$$(6.36) x(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{y(t + \epsilon) - y(t)}{\epsilon}$$

e dalla (6.28), ricordando la (1.23)

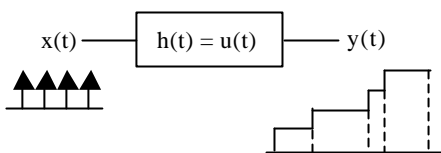
$$(6.37) x(t) = \sum_k \delta(t - t_k)$$

rappresentato in **Fig. 6.7b**. Si ha

$$\begin{aligned} E\{x(t)\} &= E\left\{ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{y(t + \epsilon) - y(t)}{\epsilon} \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [E\{y(t + \epsilon)\} - E\{y(t)\}] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\lambda(t + \epsilon) - \lambda t] = \lambda \end{aligned}$$

Si osservi che per la (2.54) il processo y(t) può essere considerato l'uscita di un sistema lineare t.i. di

risposta impulsiva h(t) = u(t) (integratore ideale) eccitato dal



processo x(t), **Fig. 6.8**. Infatti

$$y(t) = x(t) * h(t) = \sum_k \delta(t - t_k) * u(t) = \sum_k u(t - t_k)$$

Fig. 6.8

Si può agevolmente verificare che il processo più generale

$$(6.37a) x(t) = \sum_k a_k \delta(t - t_k)$$

dove a_k sono delle costanti arbitrarie, + o -, indipendenti da t_k , ha come media

$$(6.38) \quad E\{x(t)\} = \bar{1a}$$

Bibliografia

- 1-J. Max, Méthodes et techniques de traitement du signal. Masson 1981
- 2-G. Cooper, C. McGillem, Methods of signal and system analysis. Holt, Rinehart, Winston
- 3-A. Papoulis, Probabilità, variabili aleatorie e processi stocastici. Boringhieri
- 4-B. Marangelli, Dispense di Fisica dei Dispositivi Elettronici.