

CAPITOLO 4

IL FILTRAGGIO DEL SEGNALE

4.1 - SISTEMA LINEARE NON DISTORCENTE

E' un sistema lineare che restituisce in uscita una replica indistorta del segnale di entrata, intendendo

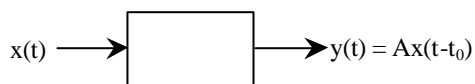


Fig. 4.1

con ciò che il segnale di uscita è al più variato in ampiezza di un fattore costante, A, e ritardato di un tempo costante, t_0 ; **Fig. 4.1.**

Consideriamo la T.F. dell'uscita:

$$(4.1) \quad Y(\omega) = AX(\omega)e^{j\omega t_0}$$

Essendo anche, per la (3.34)

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

si ha per confronto che

$$(4.2) \quad H(\omega) = Ae^{j\omega t_0}$$

è la risposta in frequenza del sistema lineare non distorcente. Pertanto, le condizioni perché un

sistema lineare sia anche non distorcente possono essere così definite:

$$(4.3a) \quad |H(\omega)| = A$$

$$(4.3b) \quad \Phi(\omega) = -\omega t_0$$

La ragionevolezza della prima condizione è del tutto ovvia; della ragionevolezza della seconda ci si può convincere osservando la **Fig. 4.2** ove si riportano due armoniche a frequenza ω_1 e $2\omega_1$, inizialmente sfasate di π . Se il ritardo introdotto dal sistema è t_0 (assunto per semplicità uguale a

$\frac{1}{4}$ del periodo della fondamentale), l'armonica ω_1 comparirà in uscita con un ritardo di fase:

$$\omega_1 t_0 = (2\pi/T)(T/4) = \pi/2$$

mentre l'armonica $2\omega_1$ sarà ritardata di $2\omega_1 t_0 = \pi$

E' facile vedere che la somma delle ampiezze delle due armoniche in uscita all'istante t è uguale a quella delle armoniche in entrata all'istante $t-t_0$ (per semplicità', in Fig. 4.2 si è assunto $A=1$).

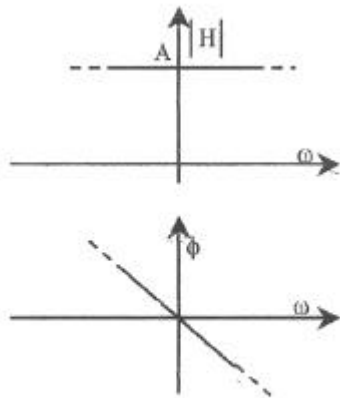


Figura 4.3

Consideriamo ora la realizzabilità fisica di un sistema non distorto. La Fig. 4.3 dà lo spettro di ampiezza e fase di $H(\omega)$. Il sistema non distorto dovrebbe avere banda passante infinita. D'altro canto, nel dominio del tempo, la risposta impulsiva del sistema non distorto deve essere:

$$(4.4) \quad h(t) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega$$

quindi, dalla (3.10):

$$h(t) = A\delta(t-t_0)$$

Un sistema non distorto, quindi, non ha memoria ed è pertanto fisicamente irrealizzabile. Qualunque sistema fisico introduce necessariamente nel segnale di entrata distorsione di ampiezza (A non costante), oppure distorsione di fase (Φ non proporzionale ad ω), oppure entrambe. In ogni caso, lo spettro risulta modificato.

Poiché nessun sistema fisico dà una riproduzione indistorta dello spettro del segnale di entrata, si dice che esso è un "filtro".

4.2 - FILTRAGGIO NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE

Per quanto detto nel paragrafo precedente, l'operazione di filtraggio consiste nel modificare lo spettro $X(\omega)$ del segnale mediante una funzione peso $H(\omega)$, ottenendo

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

La Fig. 4.4 illustra alcuni casi di filtraggio.

Questa operazione di filtraggio non può essere effettuata direttamente, poiché si ha accesso alla rappresentazione temporale del segnale. Essendo

$$X(\omega)H(\omega) \Leftrightarrow x(t)*h(t)$$

ne segue che l'operazione di filtraggio in frequenza corrisponde nel dominio del tempo ad una operazione di convoluzione. Pertanto, per filtrare in frequenza con la funzione peso $H(\omega)$ occorre

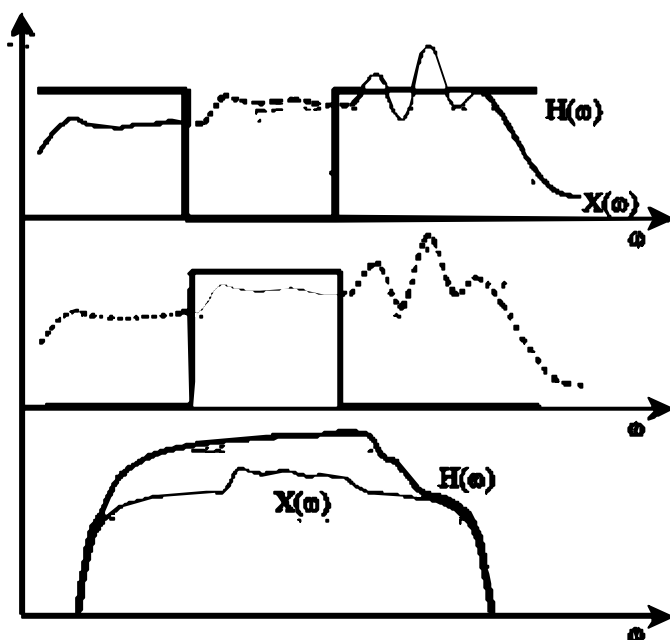


Figura 4.4

disporre di un sistema lineare di risposta impulsiva $h(t)$ e far passare in esso il segnale $x(t)$. Si osservi che il filtraggio in frequenza è necessariamente un filtraggio lineare, poiché solo un sistema lineare effettua l'operazione di convoluzione.

Un filtro di frequenza ideale è, per definizione, un filtro che entro la propria "banda passante" soddisfa le condizioni di non distorsione (ha cioè una funzione di trasferimento del

tipo (4.2)) e modifica (per es. annullandole) tutte le armoniche fuori banda.

Così, per un filtro passa-banda ideale, di guadagno in banda unitario, Fig. 4.5

$$(4.7) \quad H(\omega) = \begin{cases} e^{j\omega t_0} & |\omega| \in \pm(\omega_1, \omega_1 + \omega^*) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

essendo $\omega_1 \neq 0$, $\omega^* < \infty$.

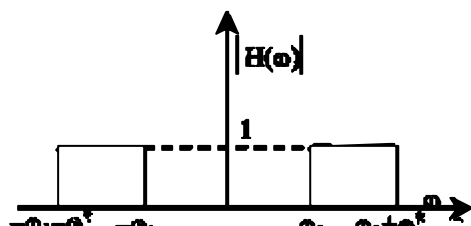


Figura 4.5

Come è noto, nel caso $\omega_1 = 0$ e $\omega^* < \infty$ si parla più propriamente di filtro passa-basso, Fig. 4.6, mentre nel caso $\omega_1 \neq 0$ e $\omega^* = \infty$ si parla di filtro passa-alto, Fig. 4.7.

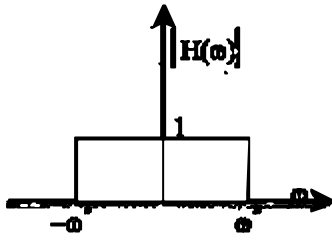


Figura 4.6

A titolo di esempio, studiamo le risposte indiziali del filtro passa-basso; negli altri due casi lo studio è analogo.

Per definizione

$$(4.8) \quad H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & |\omega| \leq \omega^* \\ 0 & |\omega| > \omega^* \end{cases}$$

La risposta alla delta è

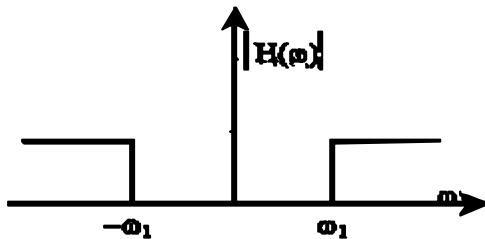


Figura 4.7

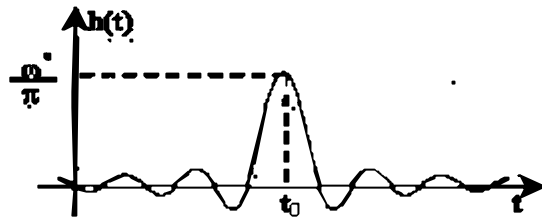


Figura 4.8

$$(4.9) \quad h(t) = T.F.\{H(\omega)\} = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2p} \int_{-\omega^*}^{\omega^*} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{\omega^*}{p} \frac{\text{sen } \omega^*(t-t_0)}{\omega^*(t-t_0)}$$

rappresentata in Fig. 4.8.

La risposta al gradino è

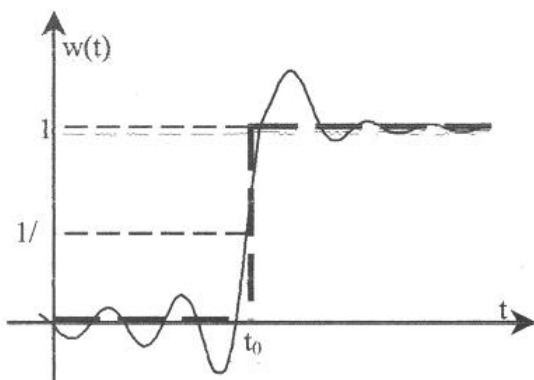


Figura 4.9

$$(4.10)$$

$$\begin{aligned} w(t) &= T.F.\{W(\omega)\} = T.F.\{H(\omega)U(\omega)\} \\ &= \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) [p\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{H(0)}{2} + \frac{1}{2pj} \int_{-\omega^*}^{\omega^*} \frac{1}{\omega} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega \end{aligned}$$

tenendo conto delle proprietà di parità delle funzioni trigonometriche, ed essendo $1/\omega$ dispari

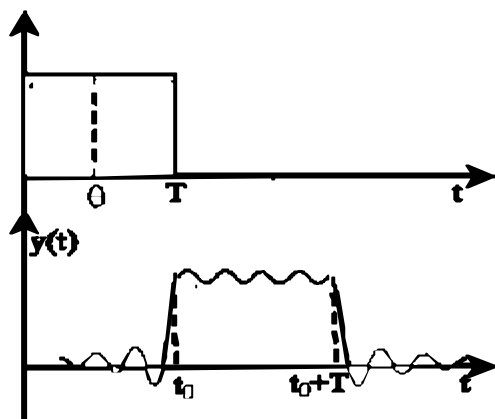


Figura 4.10

fuori della banda passante del filtro. Le risposte sono in ogni caso non causali indicando così la non realizzabilità fisica del filtro ideale: esso può essere approssimato facendo t_0 grande.

(4.11)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2p} \int_{-w^*}^{w^*} \frac{\text{sen}w(t-t_0)}{w} dw \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{p} \int_0^{w^*} \frac{\text{sen}w(t-t_0)}{w} dw
 \end{aligned}$$

rappresentata in **Fig. 4.9**.

Infine, tenendo conto della (1.9) si può avere la risposta ad un impulso rettangolare, **Fig. 4.10**. Si noti la distorsione che ha subito il segnale di entrata, dovuta al fatto che il suo spettro è $\neq 0$

4.3 - FILTRAGGIO NEL DOMINIO DEL TEMPO

Analogamente alla (4.6), il filtraggio nel dominio del tempo è esprimibile come

$$(4.12) \quad y(t) = x(t)f(t)$$

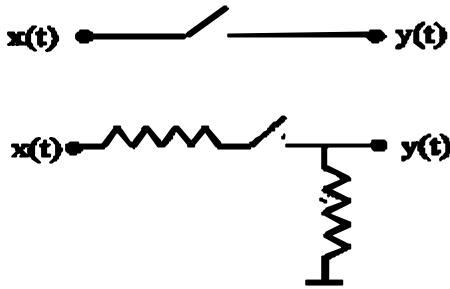


Figura 4.11

La funzione peso $f(t)$ può essere pensata come la “finestra” attraverso cui il segnale viene osservato man mano che il tempo evolve, cioè la durata di osservazione di $x(t)$. Pertanto, l’operazione di filtraggio può essere schematizzata come una interruzione o una attenuazione del segnale $x(t)$: il filtro temporale è cioè un interruttore o attenuatore,

Fig. 4.11.

In Fig. 4.12 sono schematizzati gli effetti del filtraggio nel caso di finestre rettangolari ideali. Consideriamo l’effetto del filtraggio sullo spettro del segnale, prendendo la T.F. della (4.12):

$$(4.13) \quad Y(\omega) = X(\omega)*F(\omega)$$

Se ci riferiamo per esempio al caso di una finestra rettangolare ideale, la funzione peso è

$$f(t) = \Pi_T(t-t_0), \text{ con T.F.}$$

$$F(\omega) = 2T \frac{\text{sen}\omega T}{\omega T} e^{-j\omega t_0}$$

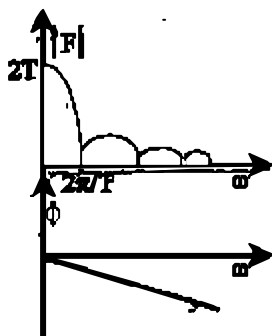


Figura 4.13

Considerando lo spettro di ampiezza del filtro, Fig. 4.13, si

comprende che lo spettro di ampiezza del segnale $x(t)$ sarà alterato dal filtro stesso. Solo per $T \rightarrow \infty$, quando $F(\omega)$ tende a divenire una delta, lo spettro di $y(t)$ sarà identico a quello di $x(t)$. Poiché ogni

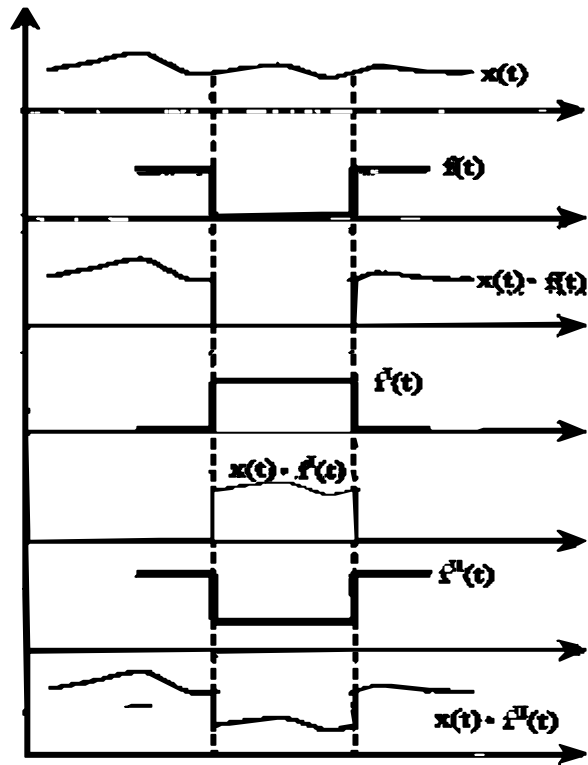


Figura 4.12

segnale fisico è sempre osservato su una finestra temporale finita, ne consegue che tale osservazione comporta intrinsecamente una modifica del segnale stesso.

4.4 - FILTRO FISICAMENTE REALIZZABILE

E' un sistema causale, la cui risposta impulsiva è nulla per $t < 0$ ed è reale, **Fig. 4.14**. Si ha

$$h(t) \Leftrightarrow H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

La risposta del filtro è

$$y(t) \Leftrightarrow Y(\omega) = X(\omega) |H(\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

Possiamo affermare che ogni filtro fisico introduce uno sfasamento $\Phi(\omega)$. Infatti, se fosse

$$\phi(\omega) = \arctan \frac{\text{Im}[H(\omega)]}{\text{Re}[H(\omega)]} = 0$$

dovrebbe essere $\text{Im}[H(\omega)] = 0$, e quindi $H(\omega)$ dovrebbe essere reale e pari e, per la (3.15), anche

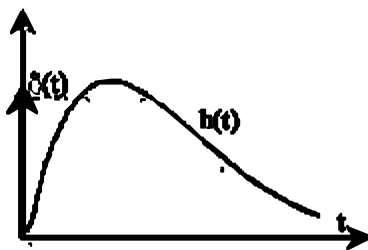


Figura 4.14

$h(t)$ dovrebbe essere reale e pari, come in **Fig. 4.15**; ma questo filtro non è causale, quindi non è fisicamente realizzabile.

Supponiamo che $h(t)$ di Fig. 4.15 abbia durata limitata, sia cioè nulla al di fuori di $(-t_0, t_0)$; consideriamo il filtro

$$h_1(t) = h(t-t_0)$$

mostrato in **Fig. 4.16**, che è causale. La sua risposta in frequenza è

$$H_1(\omega) = H(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

Poiché $\text{Im}[H(\omega)] = 0$, lo sfasamento introdotto da $H_1(\omega)$ è $-\omega t_0$, funzione lineare di ω . Questo è quindi un filtro a sfasamento lineare, che non distorce in

fase il segnale. Va tuttavia ricordato, come si è accennato nel paragrafo (3.8), che sistemi che operano su segnali rappresentati da funzioni continue del tempo devono avere una funzione di trasferimento che è esprimibile come rapporto di due polinomi. Nel nostro caso, il filtro di Fig. 4.16

ha funzione di trasferimento

$$H_1(s) = H(s) e^{-s t_0}$$

e poiché l'esponenziale non è una forma polinomiale segue che tale funzione di trasferimento non può essere realizzata

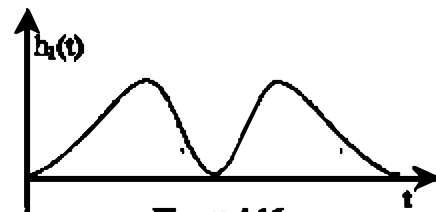


Figura 4.16

con filtri continui. Un tale filtro è realizzabile mediante un campionamento preliminare del segnale.

4.5 - FILTRO MONOCROMATORE

E' il filtro che "isola" la componente ω_0 del segnale eliminando il resto dello spettro

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = X(\omega)[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

La sua risposta in frequenza e quella impulsiva sono in **Fig. 4.17**.

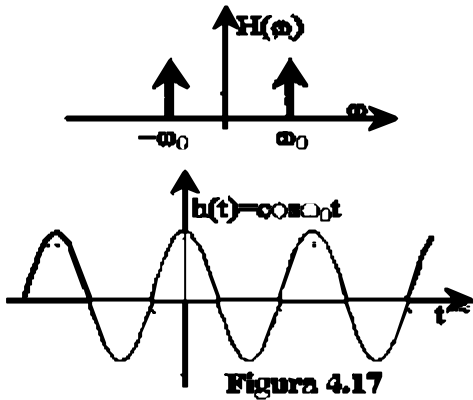


Figura 4.17

Poiché si ha accesso al dominio del tempo, per filtrare occorre convolvere

$$X(\omega)H(\omega) \leftrightarrow x(t)*h(t)$$

Ma non è possibile convolvere per $-\infty < t < \infty$, poiché $h(t)$ è disponibile su una finestra temporale finita $(0, T)$, cioè disponiamo di

$$h'(t) = h(t)\Pi_{T/2}(t-T/2)$$

ed il filtraggio dà

$$x(t)*h'(t) \leftrightarrow X(\omega)H'(\omega)$$

con

$$H'(\omega) = H(\omega)*R(\omega)$$

$R(\omega)$ è mostrato in Fig. 3.9. In conclusione, quello che siamo in grado di realizzare è non il filtro di Fig. 4.17 bensì quello di **Fig. 4.18**: filtrare una singola frequenza è fisicamente impossibile.

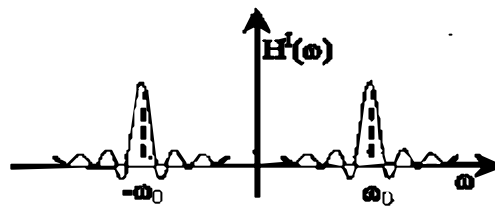


Figura 4.18

Bibliografia