

CAPITOLO 2

RAPPRESENTAZIONE DI UN SEGNALE DETERMINISTICO NEL DOMINIO DEL TEMPO

2.1 - APPROSSIMAZIONE DI UN SEGNALE

Si è detto che un segnale deterministico è rappresentabile analiticamente con una funzione esplicita del tempo $x(t)$.

Il “modello matematico” del segnale, cioè $x(t)$, può tuttavia essere troppo complesso per poter studiare le proprietà di un sistema del quale il segnale è l'eccitazione. Oppure, pur essendo la $x(t)$ di forma semplice, può comunque essere poco adatta a mettere in evidenza le proprietà dei sistemi e le caratteristiche dei metodi di analisi.

E' perciò conveniente ricercare una diversa rappresentazione analitica del segnale, in termini di segnali semplici e standard: questo permetterà di standardizzare i metodi di analisi dei sistemi.

Una soluzione conveniente consiste nell'approssimare la $x(t)$ con una combinazione lineare di altre funzioni:

$$(2.1) \quad x(t) \cong \hat{x}(t) = \sum_{-N}^{+N} a_n f_n(t) \quad N < \infty$$

essendo a_n delle costanti, reali o complesse; (t_1, t_2) l'intervallo su cui si ritiene valida la rappresentazione (2.1); $\{\Phi_n\}$ un opportuno set di funzioni, reali o complesse, dette “funzioni base”.

Esprimere la $x(t)$ in forma di combinazione lineare delle funzioni Φ_n è conveniente sia da un punto di vista matematico, sia perché la (2.1) risulta particolarmente utile per lo studio di un sistema lineare, per il quale vale il principio di sovrapposizione, sia perché può essere facilmente strumentalizzata (sintetizzatore di funzioni). In quest'ultimo caso, è chiaro che le Φ_n devono essere reali. Le Φ_n possono essere scelte in maniera standard, una volta per tutte, per una determinata applicazione

(per esempio, per lo studio dei sistemi lineari sono convenienti i segnali sinusoidali): in tal modo, lo studio di un sistema eccitato da un arbitrario segnale $x(t)$ viene ricondotto allo studio del sistema eccitato da segnali sempre dello stesso tipo, essendo solo necessario ricalcolare le a_n quando cambia $x(t)$.

In generale, non è detto che l'approssimazione (2.1) converga sempre a $x(t)$, cioè che:

$$(2.2) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} |x(t) - \sum_n^{+N} a_n f_n(t)| = 0$$

Questo, qualora si verifici, risulta comunque di scarsa utilità poiché non è pensabile di effettuare infinite misure per ottenere una rappresentazione esatta. Ogni uso pratico della (2.1) implica necessariamente un errore di approssimazione (o scarto)

$$(2.3) \quad e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

Nasce di conseguenza la domanda: per un fissato N , quali a_n danno la migliore approssimazione?

Per cercare la risposta, occorre innanzi tutto precisare il criterio in base al quale l'approssimazione è giudicata "la migliore". Un criterio conveniente è quello della "approssimazione in media": la migliore approssimazione è quella che minimizza l'errore quadratico medio:

$$(2.4) \quad \mathbf{e} = \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - \hat{x}(t)]^2 dt$$

Perciò si dice che questo metodo è ottimo nel senso dei minimi quadrati. Si noti che \mathbf{e} è anche l'energia dell'errore. Minimizziamo la (2.4) nell'ipotesi generale che $x(t)$, a_i , Φ_i siano funzioni complesse. Si ha

$$(2.4a) \quad \begin{aligned} \mathbf{e} &= \int_{t_1}^{t_2} (x(t) - \sum_n a_n f_n)(x^*(t) - \sum_k a_k^* f_k^*) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [|x|^2 - x \sum_k a_k^* f_k^* - x^* \sum_n a_n f_n + \sum_{kn} a_k^* a_n f_k^* f_n] dt \end{aligned}$$

che è una funzione di a_i e a_i^* . Minimizzando rispetto ad entrambe si ha

$$(2.5) \quad \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial a_i} = \sum_k a_k^* \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_k^* \mathbf{f}_i dt - \int_{t_1}^{t_2} x^* \mathbf{f}_i dt = \int_{t_1}^{t_2} (\sum_k a_k^* \mathbf{f}_k^* - x^*) \mathbf{f}_i dt = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial a_i^*} = \sum_n a_n \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_i^* \mathbf{f}_n dt - \int_{t_1}^{t_2} x \mathbf{f}_i^* dt = \int_{t_1}^{t_2} (\sum_n a_n \mathbf{f}_n - x) \mathbf{f}_i^* dt = 0$$

Questo risultato si interpreta dicendo che i coefficienti a_i (e a_i^*) ottimi sono quelli che rendono l'errore di approssimazione $\mathbf{e}(t)$ "ortogonale" alle funzioni $\Phi(t)$. Avremo occasione altre volte nel seguito di richiamare questo "principio di ortogonalità".

Riscrivendo una delle (2.5), per es. la seconda, come segue

$$(2.6) \quad \int_{t_1}^{t_2} x(t) \mathbf{f}_i^*(t) dt = \sum_n^{+N} a_n \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_n(t) \mathbf{f}_i^*(t) dt$$

si ha un sistema di $(2N+1)$ equazioni da cui determinare le a_i . Il problema diventa più semplice se si assume che la base sia essa stessa ortogonale, cioè goda della proprietà:

$$(2.7) \quad \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_j^* \mathbf{f}_n dt = \begin{matrix} 0 & n \neq j \\ I_j & n = j \end{matrix}$$

con λ_i reale e positivo ("norma" di Φ_i). [Quando la norma λ_i è = 1, la base si dice ortonormale].

Si ha allora dalla (2.6):

$$(2.8) \quad \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_j^* x(t) dt = a_j I_j$$

da cui

$$(2.9) \quad a_j = \frac{1}{I_j} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_j^* x(t) dt$$

Per coniugazione, si possono ottenere le a_i^* .

Pertanto, nel caso di una base ortogonale ciascuno dei coefficienti che dà la migliore approssimazione può essere calcolato indipendentemente dagli altri.

Inoltre, dalla (2.4a) facendo uso della (2.9) e della sua coniugata, l'energia dell'errore risulta:

$$(2.10) \quad \mathbf{e} = E_x - \sum_n^{+N} |a_n|^2 I_n$$

Se $x(t)$ ha energia E_x finita, l'errore diminuisce al crescere di N (infatti, la sommatoria è sempre positiva; inoltre, per la (2.4) ϵ è sempre positivo). Per migliorare l'approssimazione, basta quindi aggiungere nuovi termini alla sommatoria senza dover ricalcolare i coefficienti dei termini precedenti.

Se accade che:

$$(2.11) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{e} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} |x(t) - \sum_N^{+N} a_n \mathbf{f}_n(t)|^2 dt = 0$$

si dice che l'approssimazione *converge in media* a $x(t)$, e che il set di funzioni ortogonali è completo.

[E' utile notare che la (2.11) (convergenza in media) non implica la (2.2) (convergenza in senso ordinario): infatti, la (2.2) può anche essere scritta:

$$(2.12) \quad \int \lim_{M \rightarrow \infty} |\bullet|^2 = 0$$

che è chiaramente diversa dalla (2.11) poiché non è sempre lecito scambiare l'operatore integrale con quello di limite. Sotto certe condizioni (di Dirichlet) sulla $x(t)$, tuttavia, la convergenza in media implica la convergenza in senso ordinario].

Un "fattore di merito" per valutare comparativamente una approssimazione è il rapporto fra l'energia dell'errore e quella del segnale:

$$(2.13) \quad \frac{\mathbf{e}}{E_x} = 1 - \frac{1}{E_x} \sum_n |a_n|^2 \mathbf{I}_n$$

ESEMPIO 2.1 - APPROSSIMAZIONE DI UN DENTE DI SEGA

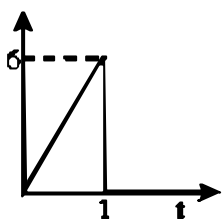


Figura 2.1

Si consideri il segnale a dente di sega, mostrato in **Fig. 2.1**, così definito:

$$x(t) = \begin{cases} 6t & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e lo si voglia sviluppare in serie di funzioni ortogonali, scegliendo la base di Walsh (funzioni di Walsh) mostrata in **Fig. 2.2**:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= 1 \\ \Phi_1 &= -1 \end{aligned}$$

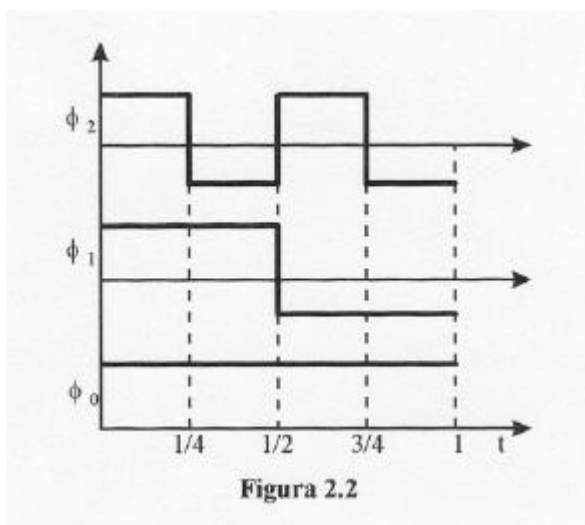


Figura 2.2

in serie di funzioni base reale (funzioni di Walsh):

$$\begin{aligned} &0 < t < 1 \\ &= 1 & 0 < t < 1/2 \\ &= -1 & 1/2 < t < \dots \end{aligned}$$

E' facile verificare che questa base è ortonormale in (0,1), facendo uso della (2.7).

Calcoliamo i coefficienti dello sviluppo con la (2.9):

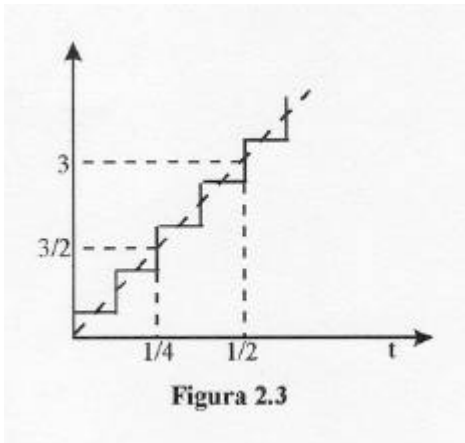
$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^1 \Phi_0 x(t) dt = \int_0^1 1 \cdot 6t dt = 3 \\ a_1 &= -3/2 & a_2 &= -3/4 \\ a_3 &= -3/8 & a_4 &= -3/16 \\ &\dots \end{aligned}$$

Una rappresentazione approssimata del dente di sega è quindi la seguente:

$$\hat{x}(t) = 3\Phi_0 - 3/2\Phi_1 - 3/4\Phi_2 - 3/8\Phi_3$$

ed è rappresentata in **fig. 2.3**. E' anche:

$$E_x = \int_0^1 (6t)^2 dt = 12$$



e dalla (2.13) si ha anche:

$$\varepsilon/E_x = 1/256$$

Aggiungendo Φ_4 , la scalinata si infittisce e si trova:

$$\varepsilon/E_x = 1/1000$$

2.3 - BASE ORTOGONALE COMPLESSA: SERIE DI FOURIER

Consideriamo un segnale $x(t)$ reale definito nell'intervallo (t_1, t_1+T) , il cui andamento sia ignoto al di fuori di questo intervallo, **Fig. 2.4**.

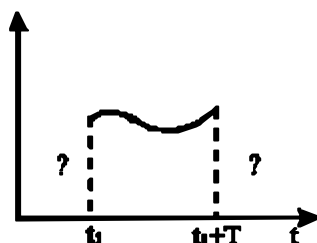


Figura 2.4

Si intende con ciò che il segnale è stato osservato durante la “finestra temporale” di durata T e se ne ignora (volutamente, o per cause di forza maggiore) l'andamento al di fuori.

Una conveniente base per la rappresentazione di $x(t)$, la quale è particolarmente ricca di significati, è la seguente:

$$(2.15) \quad f_n(t) = e^{jn\omega_0 t} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

con

$$(2.16) \quad \omega_0 = 2\pi/T$$

La base è ortogonale; infatti, per la (2.3):

$$(2.17) \quad \int_{t_1}^{t_1+T} e^{jn\omega_0 t} e^{-jk\omega_0 t} dt = 0 \quad n \neq k$$

$$= T \quad n = k$$

I coefficienti dello sviluppo risultano essere:

$$(2.18) \quad a_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = a_{-n}^*$$

e lo sviluppo in serie, noto come serie di Fourier, risulta essere:

$$(2.19) \quad x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(\mathbf{q}) e^{-jn\omega_0 \mathbf{q}} d\mathbf{q} \right] e^{jn\omega_0 t}$$

o anche, in forma compatta:

$$(2.20) \quad x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

Si può anche far vedere che la base (2.15) è completa, e quindi la serie di F. converge in media alla $x(t)$.

Il segnale $x(t)$ è quindi rappresentabile con una somma di infinite “sinusoidi complesse” aventi pulsazione $\omega_n = n\omega_0$, ampiezza $X_n = |X(n\omega_0)| = |a_n|$ e fase $\Phi_n = \arg X(n\omega_0) = \arg a_n$.

La quantità:

$$(2.21) \quad X(n\omega_0) = X_n e^{j\Phi_n}$$

viene chiamata *spettro di frequenza* di $x(t)$. X_n è chiamato *spettro di ampiezza* (per la (2.18) è una funzione pari); Φ_n è lo *spettro di fase* (è una funzione dispari).

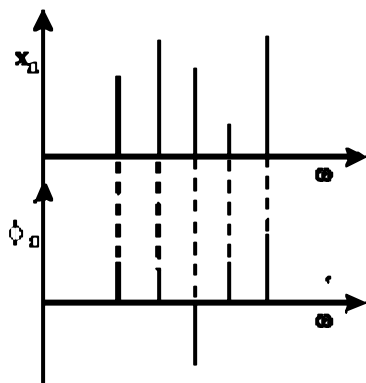


Figura 2.5

I due spettri di ampiezza e fase si rappresentano con delle “righe” di altezza X_n e Φ_n , rispettivamente, poste in corrispondenza della pulsazione $n\omega_0$, come mostrato in **Fig. 2.5**, per n positivo.

Sulla base della (2.20), la conoscenza dei due spettri di ampiezza e di fase determina completamente e biunivocamente il segnale $x(t)$. Dalla (2.18):

$$(2.22) \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) dt$$

e quindi

$$X_0 = a_0 = \text{valor medio di } x(t)$$

$$\Phi_0 = 0$$

Si osservi, Fig. 2.5, che lo spettro di $x(t)$ è discreto, costituito da righe intervallate di ω_0 .

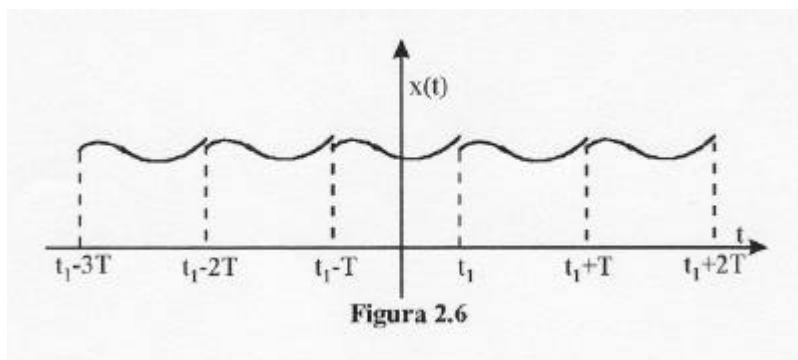


Figura 2.6

È importante osservare che la rappresentazione (2.20) del segnale $x(t)$ “prolunga” la definizione del segnale stesso a tutto l’asse dei tempi. È infatti facile verificare nella (2.20) che:

$$(2.23) \quad x(t+kT) = x(t),$$

k intero

Il segnale $x(t)$ viene cioè considerato periodico dalla serie di F., se non lo è già: il segnale restituito dalla (2.20) è quindi quello di Fig. 2.4 ripetuto indefinitamente con periodo T sull'asse dei tempi, **Fig. 2.6**.

Questa periodicizzazione del segnale non può dar luogo ad inconvenienti: avendo noi limitato l'osservazione di $x(t)$ nell'intervallo (t_1, t_1+T) , non siamo interessati a quale sia il suo reale andamento al di fuori di detto intervallo.

E' possibile scrivere la (2.20) in forme intuitivamente più accessibili, anche se meno compatte. Si può infatti scrivere:

$$\begin{aligned}
 \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\omega_0 t} &= a_0 + \sum_1^{\infty} a_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_1^{\infty} a_{-n} e^{-jn\omega_0 t} \\
 (2.24) \quad &= a_0 + \sum_1^{\infty} a_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_1^{\infty} [a_n e^{jn\omega_0 t}]^* \\
 &= a_0 + 2\operatorname{Re}[\sum_1^{\infty} a_n e^{jn\omega_0 t}] \\
 &= a_0 + 2\sum_1^{\infty} |a_n| \cos(n\omega_0 t + \mathbf{f}_n)
 \end{aligned}$$

o anche, col simbolismo della (2.21):

$$(2.25) \quad x(t) = X_0 + 2\sum_1^{\infty} X_n \cos(n\omega_0 t + \mathbf{f}_n)$$

che esprime $x(t)$ come somma del proprio valor medio (o componente continua) e di infinite sinusoidi reali di pulsazione discreta $n\omega_0$, ciascuna avente ampiezza X_n e fase \mathbf{f}_n .

La sinusoide a ω_0 è chiamata componente fondamentale, o prima armonica, del segnale; la sinusoide a $n\omega_0$ è detta la n-ma armonica.

Un'altra forma ben nota della serie di F. la si ottiene ponendo nella (2.18):

$$(2.26) \quad a_n = \frac{1}{2}(A_n - jB_n) \quad a_{-n} = a_n^* = \frac{1}{2}(A_n + jB_n)$$

ottenendo

$$(2.27) \quad A_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) \cos n \omega_0 t dt$$

$$(2.28) \quad B_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) \sin n \omega_0 t dt$$

$$(2.29) \quad A_0 = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) dt$$

Si può allora scrivere la (2.19):

$$(2.30) \quad x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_1^{\infty} A_n \cos n \omega_0 t + \sum_1^{\infty} B_n \sin n \omega_0 t$$

ed è immediato dalla (2.21) che lo spettro di ampiezza è:

$$(2.31) \quad X_n = |a_n| = \frac{1}{2} (A_n^2 + B_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

e lo spettro di fase:

$$(2.32) \quad \mathbf{f}_n = \arctan \frac{B_n}{A_n}$$

ESEMPIO 2.II - SERIE DI F. PER UN SEGNALE AD ONDA QUADRA

Si consideri il segnale ad onda quadra mostrato in **Fig. 2.7**, definito come segue:

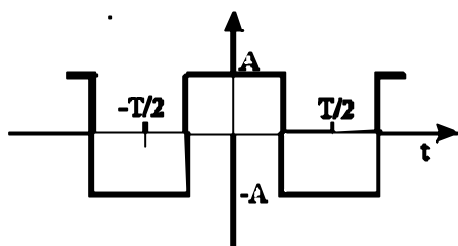


Figura 2.7

$$(2.33) \quad x(t) = \begin{cases} -A & -T/2 < t < -T/4 \\ A & -T/4 < t < T/4 \\ -A & T/4 < t < T/2 \end{cases}$$

$$x(t+kT) = x(t)$$

Dalle (2.27), (2.28), (2.29) si ha (data l'arbitrarietà di t_1 , lo si può porre = $-T/2$):

$$B_n = 0$$

$$A_n = 0 \quad n \text{ pari}$$

$$A_n = \frac{4A}{np} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad n \text{ dispari}$$

e dalla (2.30):

$$(2.34)$$

$$x(t) = \frac{4A}{p} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} n^{-1} (1)^{\frac{n-1}{2}} \cos n\omega_0 t$$

La **Fig. 2.8** dà un'idea dell'approssimazione del segnale $x(t)$ di Fig. 2.7 con un numero finito di termini nella (2.34).

Lo sviluppo in serie di F. permette anche di chiarire il concetto di distorsione di

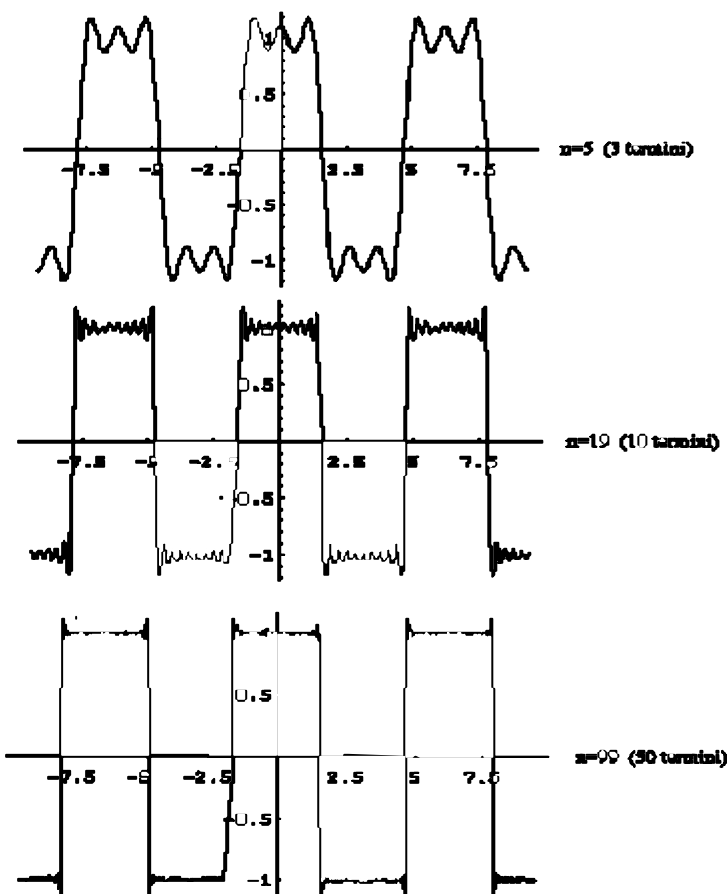
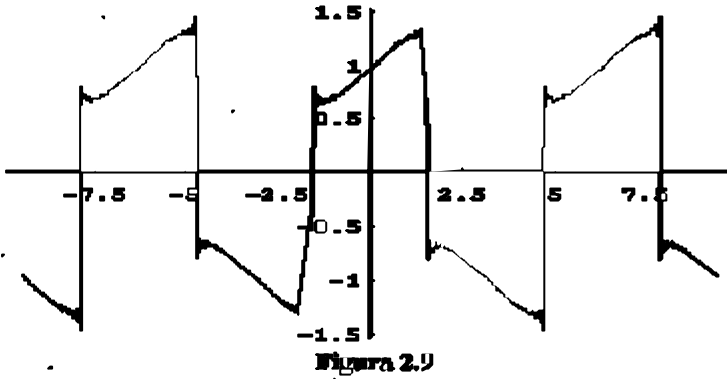


Figura 2.8

ampiezza e di fase che un segnale subisce nell'attraversare un sistema fisico.

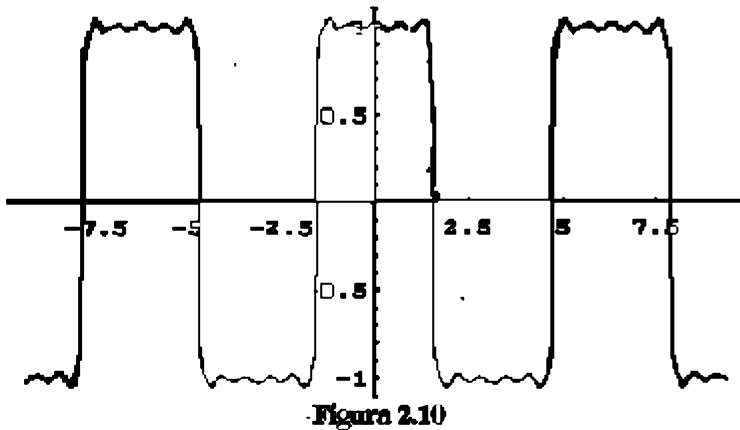
La **Fig. 2.9** mostra l'approssimazione dell'onda quadra con 50 termini, avendo introdotto un ritardo di fase di 15 gradi (pari a $\pi/12$) nella prima armonica, cioè scrivendo:

$$\hat{x}(t) = \frac{4A}{p} \cos\left(\omega_0 t - \frac{p}{12}\right) + \frac{4A}{p} \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} n^{-1} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos n \omega_0 t$$



La **Fig. 2.10** mostra l'effetto della distorsione di ampiezza: le armoniche successive alla nona ($n > 11$) sono attenuate del 25%:

$$\hat{x}(t) = \frac{4A}{p} \sum_{n=1,3,\dots}^9 n^{-1} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos n \omega_0 t$$



Si osservi, infine, per quanto detto a proposito dell'effetto di "periodicizzazione" della serie di F., che lo sviluppo (2.34) vale anche per un segnale rettangolare definito dalla (2.33) fra $(-T/2, T/2)$ e ignoto altrove.

ESEMPIO 2.III- SVILUPPO IN SERIE DI F. DI UN IMPULSO RETTANGOLARE

Tale impulso è mostrato in **Fig. 2.11** ed è definito:

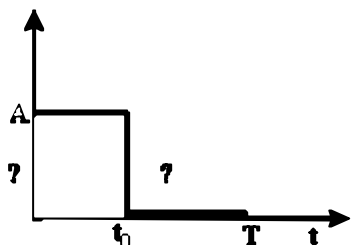


Figura 2.11

$$(2.35) \quad x(t) = \begin{cases} = A & 0 < t < t_0 \\ = 0 & t_0 < t < T \\ = ? & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcoliamo lo sviluppo in serie di F. facendo uso della (2.19).

Dalla (2.18) si ottiene, intanto:

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^{t_0} A e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{A}{T} \left[\frac{1 - e^{-jn\omega_0 t_0}}{jn\omega_0} \right] = \frac{At_0}{T} \left[\frac{e^{jn\omega_0 \frac{t_0}{2}} - e^{-jn\omega_0 \frac{t_0}{2}}}{2jn\omega_0 \frac{t_0}{2}} \right] e^{-jn\omega_0 \frac{t_0}{2}}$$

avendo messo in evidenza $e^{jn\omega_0 t_0/2}$, e avendo moltiplicato e diviso per $t_0/2$. Quindi:

$$(2.36) \quad a_n = \frac{At_0}{T} \left[\frac{\sin n\omega_0 \frac{t_0}{2}}{n\omega_0 \frac{t_0}{2}} \right] e^{-jn\omega_0 \frac{t_0}{2}}$$

e per la (2.19):

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{At_0}{T} \left[\frac{\sin n\omega_0 \frac{t_0}{2}}{n\omega_0 \frac{t_0}{2}} \right] e^{jn\omega_0(t - \frac{t_0}{2})}$$

Dalla (2.36) si ricava lo spettro di ampiezza:

$$(2.37) \quad X_n = \left| \frac{At_0}{T} \cdot \frac{\sin n\omega_0 \frac{t_0}{2}}{n\omega_0 \frac{t_0}{2}} \right|$$

e quello di fase:

$$(2.38) \quad \mathbf{f}_n = -n\omega_0 \frac{t_0}{2}$$

Questi spettri di righe sono mostrati in **Fig. 2.12**, ove sono anche mostrate tratteggiate le due funzioni X_n e Φ_n ottenute avendo sostituito $n\omega_0$ con la variabile continua ω .

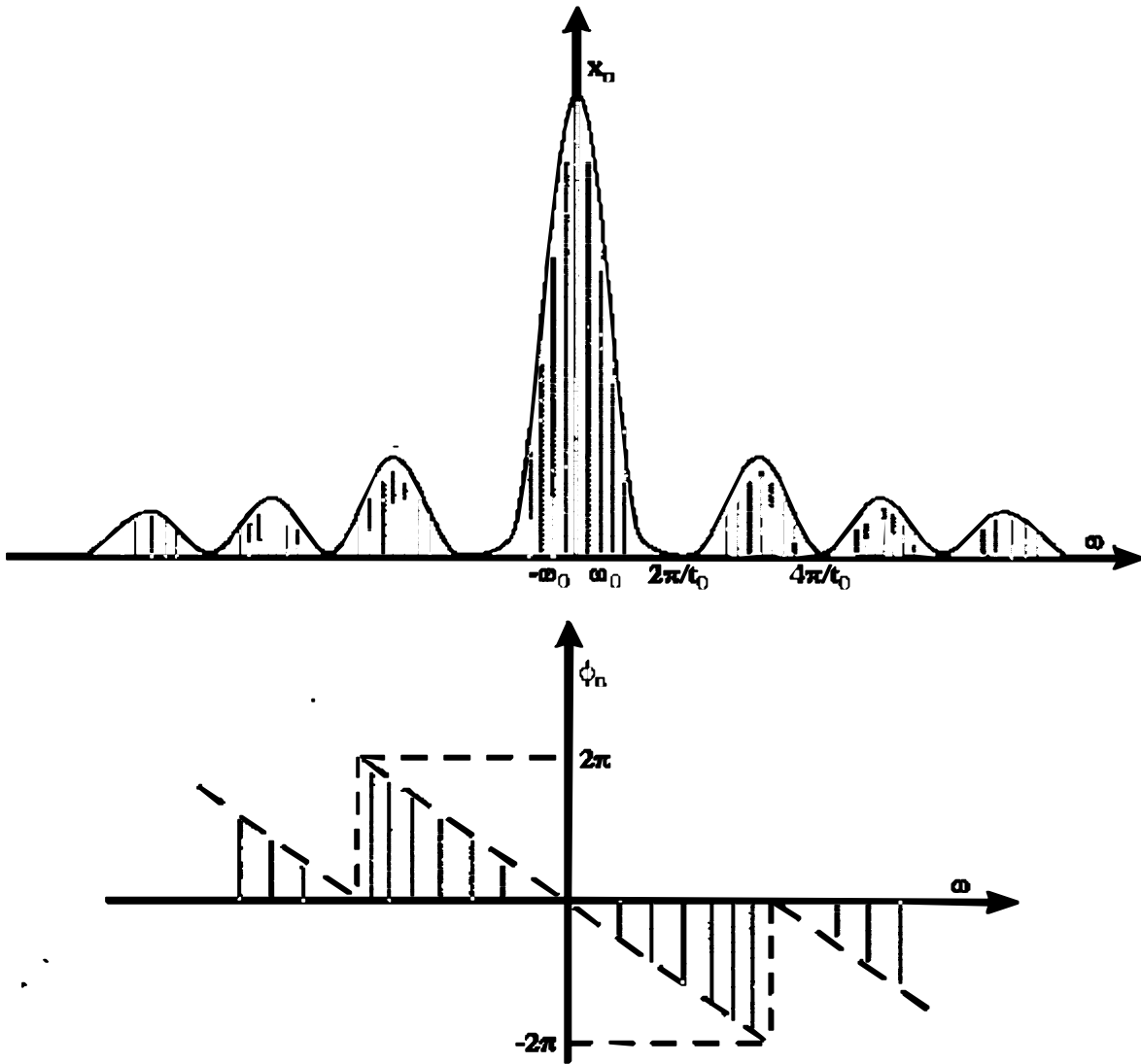


Figura 2.12

La funzione $[\]$ nella espressione (2.36), il cui valore assoluto “modula” l’altezza delle righe nello spettro di ampiezza, è estremamente importante nell’analisi dei segnali: essa è del tipo $\text{sen}x/x$ e viene brevemente chiamata funzione “sinc”. Su di essa torneremo spesso nel seguito; rileviamo per ora due sue caratteristiche:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1$$

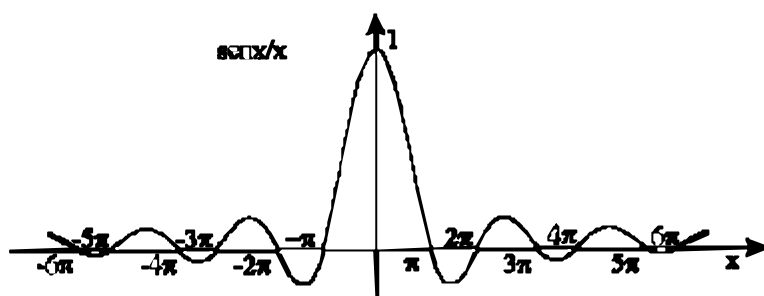


Figura 2.13

La sinc si annulla per $x = \pm n\pi$,

cioè per $\omega t_0/2 = \pm n\pi$, con $n \neq 0$;

quindi per

$$\omega = \pm 2n\pi/t_0$$

La sinc è mostrata in **Fig.**

2.13.

2.4 - RAPPRESENTAZIONE DI UN SEGNALE DETERMINISTICO MEDIANTE UN CONTINUO DI DELTA. LA RISPOSTA DI UN SISTEMA.

Un problema generale dell'elettronica è studiare la risposta di un sistema ad un generico segnale di eccitazione. E' impensabile di affrontare questo problema in laboratorio, facendo la misura diretta: e ciò sia per la gran varietà di segnali possibili sia per la difficoltà di generare tali segnali. Questo problema viene affrontato in altro modo. Si cerca dapprima la maniera di rappresentare un generico segnale mediante la combinazione lineare di un set di segnali semplici e standard, prefissati. Fatto questo, si può misurare in laboratorio la risposta del sistema ai segnali standard e ricavare con un calcolo la risposta a qualunque altro segnale. Si fa vedere ora la maniera più semplice di fare questo, utilizzando cioè un solo segnale standard.

Si consideri il segnale $x(t)$ generico e la distribuzione di Dirac $\delta(t)$. Utilizzando la (1.20), con un opportuno cambiamento di nome alle variabili si può scrivere:

$$(2.39) \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \delta(t - \lambda) d\lambda$$

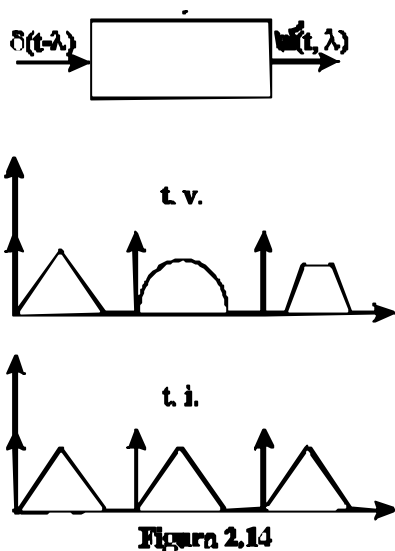
che esprime il segnale $x(t)$ come somma di un continuo di delta di area $x(\lambda)d\lambda$.

La (2.39) ha una rilevante peculiarità rispetto alle altre rappresentazioni di un segnale deterministico nel dominio del tempo: essa esprime la $x(t)$ in termini di un solo tipo di segnale elementare, la δ . Questo può comportare un grande vantaggio nell'analisi dei sistemi lineari, come ora si fa vedere.

Si consideri un sistema generico, cioè non lineare ed a parametri variabili nel tempo: si suppone quindi che tale sistema contenga almeno un elemento descrivibile con un parametro dipendente dal tempo (per es. un interruttore che sia talvolta aperto e talvolta chiuso): tale sistema è detto time-variant (t.v.).

I sistemi fisici sono, a rigore, t.v.: si pensi per es. alla dipendenza del valore di una resistenza dalla temperatura, dall'invecchiamento, ecc. Un sistema a parametri costanti è detto time-invariant, t.i., ed

è una buona approssimazione di molti sistemi fisici, se la variazione del parametro è trascurabile durante il tempo di osservazione. Consideriamo per ora sistemi t.v.



Se si eccita un sistema t.v. con una delta all'istante generico λ , **Fig. 2.14**, la risposta sarà descrivibile con una funzione del tipo $w(t, \lambda)$, dipendente dall'istante di applicazione dell'eccitazione, come mostrato in Fig. 2.14b. La Fig. 2.14c mostra cosa accade in un sistema t.i.

Se in particolare il sistema è lineare, la risposta al segnale $A\delta(t-\lambda)$, cioè ad una delta di area A , sarà $Aw(t, \lambda)$.

Allora, tornando alla (2.39) che esprime $x(t)$ come somma di delta di area $x(\lambda)d\lambda$, la risposta $y(t)$ del sistema lineare al segnale $x(t)$ sarà, per il principio di sovrapposizione, la

somma delle risposte alle delta di area $x(\lambda)d\lambda$ in cui è sviluppato $x(t)$: cioè

$$(2.40) \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)w(t, \lambda)d\lambda$$

Questa è l'operazione più generale che un sistema lineare può fare su un segnale al suo ingresso: essa dice che il sistema calcola la risposta facendo una somma pesata dei valori dell'entrata, essendo $w(t, \lambda)$ la "funzione dei pesi".

Si badi che questo risultato vale solo se il sistema è lineare: se così non è, pur potendo definire la $w(t, \lambda)$ di un sistema non lineare non è possibile esprimere la risposta $y(t)$ di tale sistema ad un segnale $x(t)$ mediante l'integrale (2.40): questo, essendo una diretta conseguenza del principio di sovrapposizione, vale solo per sistemi lineari. La risposta di un sistema non lineare va cercata con altri metodi, diversi dalla (2.40).

Si osservi ancora che nella (2.40):

- t è il "presente", l'istante cioè in cui si desidera conoscere la risposta;
- $\lambda < t$ è il "passato" del segnale;

- $\lambda > t$ è il “futuro” del segnale.

Pertanto, la (2.40) è il modello matematico di un sistema che per fornire la risposta all'istante t deve conoscere la storia passata, presente e futura (rispetto a t) dell'entrata. Un tale sistema non è fisicamente realizzabile, in quanto *non causale* ma anticipatorio.

Un sistema causale deve necessariamente attribuire peso zero ai valori futuri dell'entrata, cioè deve essere:

$$(2.41) \quad w(t, \lambda) = 0 \quad \text{per } t < \lambda$$

Poiché $w(t, \lambda)$ è la risposta a $\delta(t - \lambda)$, cioè ad una eccitazione applicata all'istante $t = \lambda$, la (2.41) equivale anche a dire che la risposta del sistema deve essere zero prima dell'applicazione dell'eccitazione, che è la definizione di sistema causale.

La (2.40) si può allora scrivere, per un sistema fisico:

$$(2.42) \quad y(t_m) = \int_{-\infty}^{t_m} x(\mathbf{I}) w(t_m, \mathbf{I}) d\mathbf{I}$$

dove si è indicato esplicitamente con t_m il momento in cui si effettua la misura sul segnale $y(t)$.

Possiamo aggiungere che qualunque segnale $x(t)$ esiste fisicamente per un tempo finito (il tempo che dura la sua osservazione, per es. dall'istante in cui si accende il generatore a quello in cui lo si spegne). Se indichiamo convenzionalmente con $t=0$ l'origine dei tempi per il segnale, per un tale segnale la (2.42) può scriversi:

$$(2.43) \quad y(t_m) = \int_0^{t_m} x(\mathbf{I}) w(t_m, \mathbf{I}) d\mathbf{I}$$

Talvolta, la forma (2.40) appare più comoda: ovviamente, in questo caso causalità e osservabilità fisica sono sottintese.

Il valore “presente” (cioè all'istante t_m della misura) dell'uscita di un sistema causale è quindi la somma pesata dei valori passati e presente dell'entrata. Quindi, i valori passati dell'entrata influenzano il valore attuale dell'uscita: si esprime questo fatto dicendo che il sistema modellato dalla (2.43) ha memoria (sistema dinamico). Questo è un modello realistico di un sistema fisico: per es.

una rete elettrica reale contiene sempre elementi di memoria (cioè induttanze e condensatori) sia pure sotto forma di elementi parassiti.

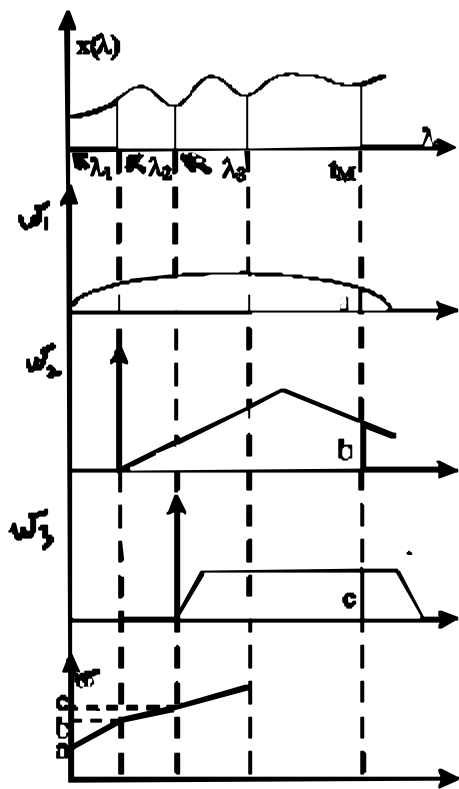


Figura 2.15

Per usare la (2.43), occorre misurare preliminarmente la funzione dei pesi, e tale misura andrebbe fatta istante per istante in tutto l'intervallo $(0, t_m)$. Per capire meglio, immaginiamo di fare la misura per valori discreti t_i . Operativamente, si può procedere come segue, vedi **Fig. 2.15**:

- si invia una delta all'istante λ_1 , cioè $\delta(t - \lambda_1)$; si misura la risposta del sistema all'istante t_m , cioè $w(t_m, \lambda_1) = a$: questo è il peso che va attribuito a $x(\lambda_1)$ per calcolare il suo contributo a $y(t_m)$.
- si ripete l'operazione agli istanti successivi $\lambda_2, \lambda_3, \dots$, ottenendo gli altri pesi. La successione dei valori ottenuti è una descrizione della pesiera $w(t_m, \lambda)$.

L'uscita sarà espressa come

$$y(t_m) \approx \sum x(\lambda_i) w(t_m, \lambda_i)$$

Naturalmente, se si cambia il momento della misura (t'_m anziché t_m), la funzione dei pesi va rideterminata, come è facile capire dalla Fig. 2.15.

2.5 - L'INTEGRALE DI CONVOLUZIONE

La rappresentazione (2.39) di un segnale non sembra offrire vantaggi per calcolare la risposta di un sistema t.v. con la (2.40): occorre pur sempre fare in laboratorio un gran numero di misure (per determinare la pesiera), sia pure con un solo tipo di eccitazione (la delta).

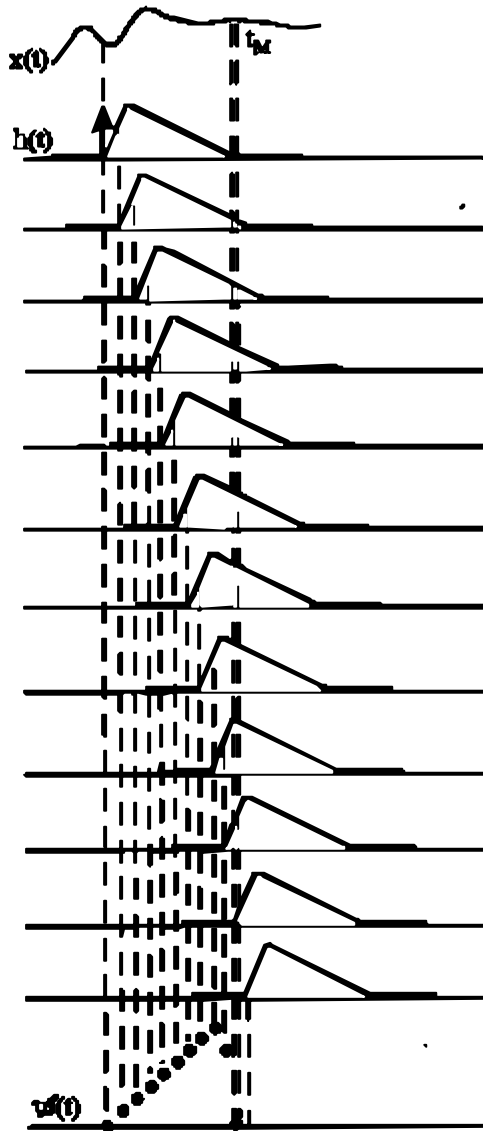


Figura 2.16

Le cose cambiano drasticamente se si considera un sistema time-invariant. Infatti, la risposta di tale sistema ad una eccitazione e' , per definizione, indipendente dall'istante di applicazione dell'eccitazione stessa.

Sarà pertanto

$$w(t,\lambda) = w(t+\theta,\lambda+\theta)$$

per ogni θ arbitrario, e scegliendo $\theta = -\lambda$, si ha

$$= w(t-\lambda)$$

che indicheremo comunemente con $h(t-\lambda)$ e chiameremo *risposta impulsiva* del sistema lineare t.i. La (2.40) diventa ora

$$(2.44) \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(l)h(t-l)dl$$

che si chiama integrale di convoluzione.

La (2.44) esprime il fatto fondamentale che la risposta $y(t)$ di un sistema lineare t.i. ad un generico segnale di ingresso $x(t)$ può essere calcolata dopo aver misurato la risposta impulsiva

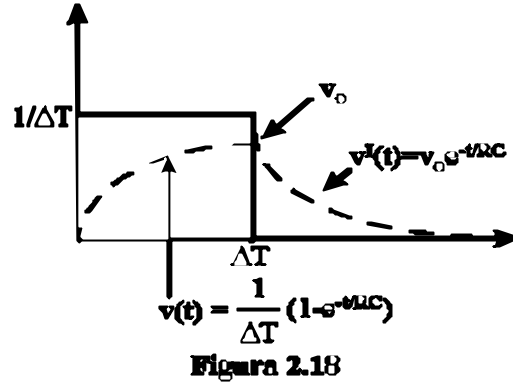
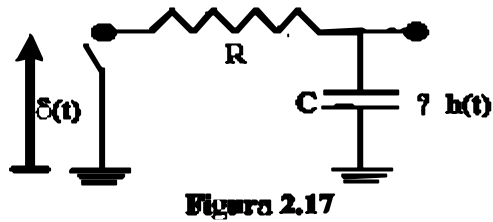
del sistema stesso, $h(t)$: quindi, a differenza del sistema t.v., occorre fare sul sistema *una sola misura*, una volta per tutte, quella della risposta alla δ , per essere in grado di calcolare la risposta ad una qualunque eccitazione.

L'operazione di convoluzione viene più brevemente indicata con un asterisco

$$(2.44a) \quad y(t) = x(t) * h(t)$$

La relazione fra $h(t)$ (risposta a $\delta(t)$) e $h(-t)$, cioè la pesiera che compare nell'integrale di convoluzione (ove si integra rispetto a λ), viene chiarita nel par. 2.6. Tuttavia, è istruttivo ricavare la pesiera t.i. col procedimento indicato in Fig. 2.15. Ciò è mostrato in **Fig. 2.16**, da cui appare che la funzione peso $w(t)$ di un sistema t.i. è l'immagine speculare della risposta alla delta, $h(t)$: $w(t) = h(-t)$.

ESEMPIO 2.IV - RISPOSTA IMPULSIVA DI UNA RETE RC PASSA-BASSO



Si consideri il circuito RC passa-basso di Fig.

2.17. Per calcolare la sua risposta alla delta, si

può dapprima calcolare la risposta ad un impulso rettangolare, come mostrato in Fig. 2.18.

E' chiaro che:

$$h(t) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} v(t) = e^{-\frac{t}{RC}} \lim_{\Delta T \rightarrow 0} v_0$$

e poiché

$$v_0 = v(\Delta T) = \frac{1}{\Delta T} (1 - e^{-\frac{\Delta T}{RC}})$$

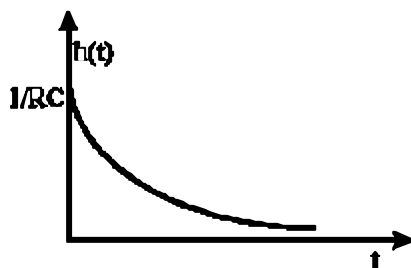
si ha

$$\lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta T} (1 - e^{-\frac{\Delta T}{RC}}) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta T} (1 - 1 + \frac{\Delta T}{RC} - \frac{\Delta T^2}{R^2 C^2} + \dots) = \frac{1}{RC}$$

Si ha così infine

$$\lim_{\Delta T \rightarrow 0} v(t) = h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

mostrata in Fig. 2.19.



2.6 - INTERPRETAZIONE GRAFICA DELLA CONVOLUZIONE

Riscriviamo l'integrale di convoluzione:

$$(2.45) \quad f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(t-\lambda) d\lambda$$

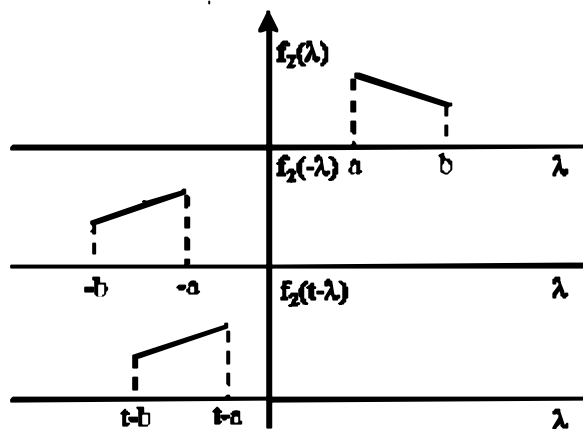


Figura 2.20

Il valore della convoluzione all'istante t è l'area del prodotto $f_1(\lambda)f_2(t-\lambda)$.

La funzione $f_1(\lambda)$ differisce da $f(t)$ per il solo cambio di nome della variabile.

L'interpretazione di $f_2(t-\lambda)$ è in **Fig. 2.20**. In tale figura è disegnata

dapprima $f_1(\lambda)$; quindi $f_2(-\lambda)$ che è la stessa funzione ruotata intorno all'asse delle ordinate; infine, è disegnata $f_2(t-\lambda)$ che è $f_2(-\lambda)$ con l'origine dei tempi shiftata di t .

In **Fig. 2.21** è riportato un esempio di calcolo grafico del risultato della convoluzione all'istante t_1 .

In conclusione, calcolare la convoluzione tra f_1 e f_2 equivale a:

- mantenere fissa una delle due funzioni, per es. $f_1(\lambda)$;
- ribaltare $f_2(\lambda)$ sull'asse delle ordinate, avendo $f_2(-\lambda)$;
- far scorrere $f_2(-\lambda)$

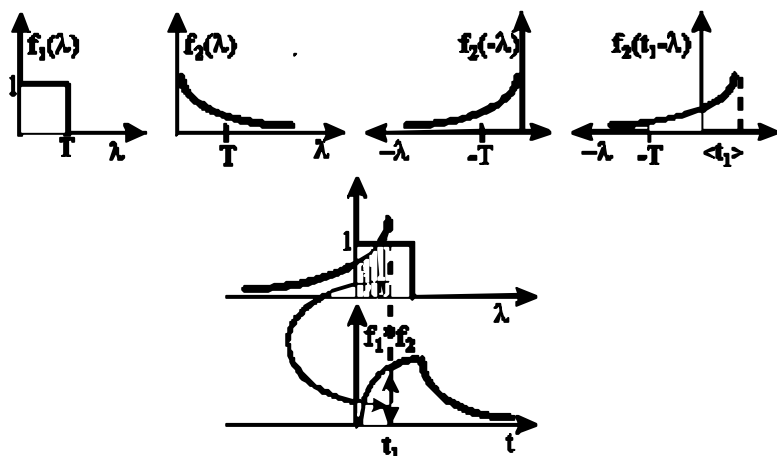


Figura 2.21

lungo l'asse dei tempi, ottenendo $f_2(t-\lambda)$ e misurare l'area del prodotto per ogni t : questo è il valore della

convoluzione in ciascun istante t .

2.7 - RAPPRESENTAZIONE DI UN SEGNALE DETERMINISTICO MEDIANTE UN CONTINUO DI GRADINI

Sia $x(t)$ un segnale definito in $(-\infty, +\infty)$. Detto $x(-\infty)$ il “valore iniziale” di $x(t)$, si può scrivere formalmente:

$$\begin{aligned}
 (2.46) \quad x(t) &= x(-\infty) + dx(\lambda_1) + dx(\lambda_2) + \dots \\
 &= x(-\infty)u(t+\infty) + dx(\lambda_1)u(t-\lambda_1) + dx(\lambda_2)u(t-\lambda_2) + \dots \\
 &= x(-\infty)u(t+\infty) + \int dx(\lambda)u(t-\lambda)
 \end{aligned}$$

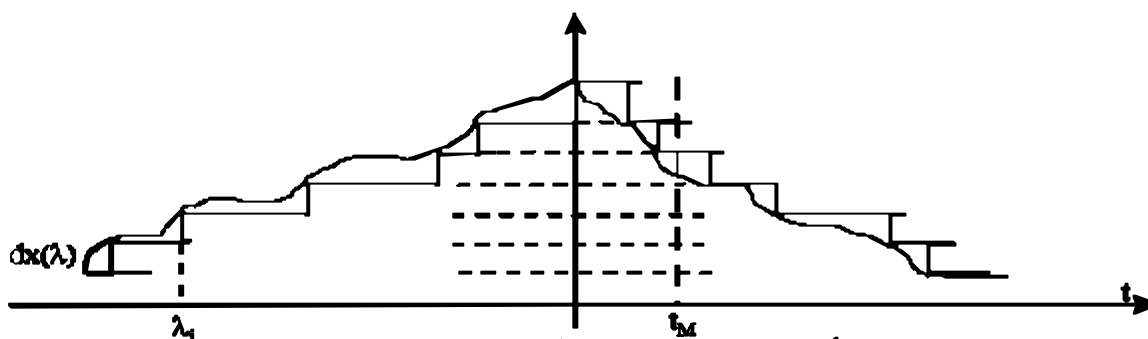


Figura 2.22

e quindi:

$$(2.47) \quad x(t) = x(-\infty)u(t+\infty) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(I)}{dI} u(t-I) dI$$

che esprime il segnale $x(t)$ come somma di un gradino iniziale di ampiezza $x(-\infty)$ e di infiniti gradini di ampiezza infinitesima $dx(\lambda)$, **Fig. 2.22**.

Sia ora $g(t)$ la risposta al gradino unitario di un sistema lineare, cioè:

$$(2.48) \quad g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(I)h(t-I) dI$$

Allora, per il teorema di sovrapposizione, la risposta del sistema al segnale espresso con la (2.47) è:

$$\begin{aligned}
 (2.49) \quad y(t) &= x(-\infty)g(t+\infty) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(I)}{dI} g(t-I) dI \\
 &= x(-\infty)g(t+\infty) + x'(t) * g(t)
 \end{aligned}$$

che fornisce la risposta del sistema ad un segnale qualunque, se è nota la risposta al gradino.

Se il segnale è fisico ($x(t) = 0$ per $t < 0$):

$$(2.50) \quad y(t) = x'(t) * g(t)$$

La risposta al gradino e la risposta alla delta godono quindi della stessa proprietà, fondamentale per l'analisi dei sistemi lineari: la conoscenza di una di esse permette di conoscere la risposta del sistema lineare a una qualunque eccitazione, con l'uso della (2.44) o della (2.50).

Le due risposte $h(t)$ e $w(t)$ sono anche note come “risposte indici”.

2.8 - PROPRIETA' DELLA CONVOLUZIONE

Si riportano alcune proprietà della convoluzione, rimandando alla letteratura per la dimostrazione.

proprietà commutativa

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

proprietà distributiva

$$(2.52) \quad f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$$

proprietà associativa

$$(2.53) \quad f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t)$$

convoluzione con la delta

$$(2.54) \quad x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$x(t) * \delta'(t) = x'(t)$$

$$x(t) * \sum_k \delta(t - t_k) = \sum_k x(t - t_k)$$

convoluzione con lo scalino

$$(2.55) \quad x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

Bibliografia

C.Atzeni, V.Cappellini, Elementi di teoria delle comunicazioni