

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2004-2005.

Università degli studi di Cagliari

Appunti di Tecnologie per l'Astrofisica.

Claudio Pernechele

Parte degli esercizi sono tratti da Nigro-Voci: "Problemi di fisica generale", e M. Riedl "Optical design fundamentals for Infrared System". SPIE Pub Press. Correzioni degli appunti: J. Antichi e D. Magrin (INAF-Padova).

1. Natura e classificazione della radiazione IR

1.1 L'ONDA ELETTROMAGNETICA

1.1.1 Pressione di radiazione

1.2 FRONTE D'ONDA, RAGGIO E CAMMINO OTTICO

1.3 TERMINI RADIOMETRICI

1.4 RADIAZIONE DI CORPO NERO

1.4.1 Legge di Planck

1.4.2 Legge di Kirchoff ed emissività

1.4.3 Legge di Stefan-Boltzmann

1.4.4 Legge di Wien

1.4.5 Energia dei fotoni

1.4.6 Esempi ed esercizi

1.5 BANDE SPETTRALI NELL'INFRAROSSO

2. Disegno Ottico

2.1 FORMAZIONE DELL'IMMAGINE

2.1.1 Campionamento ideale dell'immagine

2.1.2 Disco di diffrazione

2.2 OTTICHE RIFLETTIVE

2.2.1 Aberrazione delle ottiche (θ_{opt})

2.2.2 Aberrazioni fuori asse

2.2.3 Telescopio a due specchi

2.2.4 Telescopi aplanatici

2.2.5 Disallineamento dinamico delle ottiche ($\theta_{opt}(t)$)

2.3 OTTICHE RIFRATTIVE

2.3.1 Fattore di forma

2.3.2 Aberrazioni monocromatiche

2.3.3 Aberrazione cromatica

2.3.4 Doppietti

2.3.5 Effetti termici

2.4 STOP E PUPILLE DI UN SISTEMA OTTICO

2.4.1. Cold Stop

3. Prestazioni di un sistema ottico

3.1 RAPPORTO SEGNALE-RUMORE

3.2 RUMORE

3.2.1 Fluttuazione statistica della sorgente

3.2.2 Emissione del cielo

3.3 TRASMISSIONE DEL MEZZO

3.3.1 Trasmissione atmosferica (τ_{ATM})

3.3.2 Trasmissione delle ottiche (τ_{OPT})

3.4 RIVELAZIONE DELLA RADIAZIONE IR

3.4.1 Rivelatori termici

3.4.2 Rivelatori di fotoni

3.4.3 Calcolo del rapporto segnale-rumore per un sistema ottico reale

1. Natura e classificazione della radiazione IR

1.1 L'onda elettromagnetica

Un campo elettromagnetico nel vuoto è descritto dalle equazioni di Maxwell con densità di carica e di corrente nulle:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} & \operatorname{div} \bar{H} &= 0 \\ \operatorname{rot} \bar{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} & \operatorname{div} \bar{E} &= 0 \end{aligned}$$

le quali possono avere soluzioni diverse da zero indicando che il campo elettromagnetico può esistere anche in assenza di cariche.

Considerando che $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$, le equazioni di Maxwell diventano:

$$\nabla^2 \bar{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2 \bar{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2} = 0$$

da cui si vede che i campi elettrico e magnetico soddisfano la stessa equazione, detta *equazione delle onde*. Per risolvere questa equazione (possiamo considerare una sola delle due equazioni, ad esempio quella per il campo elettrico \mathbf{E}). Considerando solo una dimensione spaziale, l'equazione precedente viene riscritta nella forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \bar{E} = 0$$

Introducendo le variabili $\xi = t - x/c$ e $\eta = t + x/c$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \qquad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

e l'equazione per il campo elettrico diventa

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

la cui soluzione avrà la forma $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1(\xi) + \mathbf{E}_2(\eta)$ con \mathbf{E}_1 ed \mathbf{E}_2 funzioni periodiche arbitrarie.

Un campo elettromagnetico nel vuoto prende il nome di *onda elettromagnetica*.

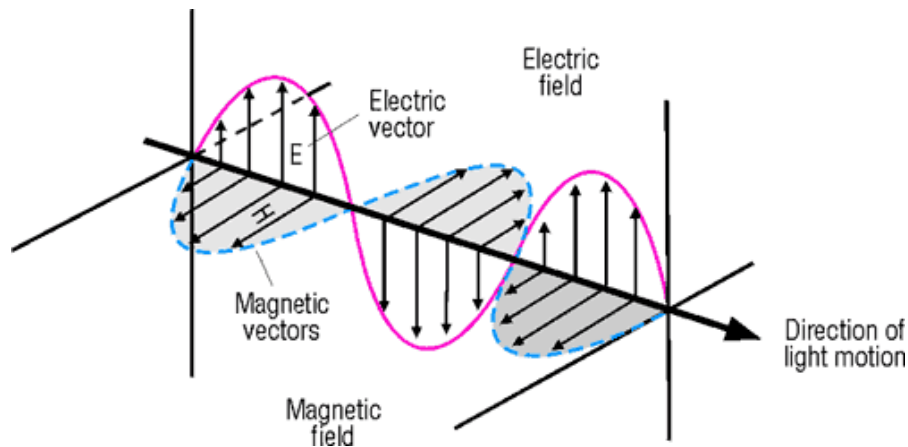


Fig. 1.1: Rappresentazione di un'onda elettromagnetica. I vettori dei campi elettrico (E) e magnetico (H) sono mutuamente perpendicolari.

1.1.1 Pressione di radiazione

L'onda elettromagnetica (un campo elettrico e di uno magnetico variabili nel tempo, come abbiamo visto) trasporta una certa quantità di energia che si propaga con la sua velocità. La quantità di energia per unità di tempo che attraversa l'unità di superficie ortogonale alla direzione di propagazione è data (nel vuoto) dal modulo del cosiddetto *vettore di Poynting*:

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

il cui valore medio nel tempo è l'*intensità* dell'onda.

Esercizio 1.1

L'intensità della radiazione solare alla distanza dell'orbita terrestre è di 1533 [Watt m⁻²]. Consideriamo che tale radiazione si propaghi come un'onda piana ($\vec{E}(r,t) = \vec{E}(x,t)$). Calcolare la pressione di radiazione.

Soluzione

Considerando che la potenza (lavoro per unità di tempo) è esprimibile come il prodotto scalare tra la forza e al velocità, la pressione P (forza per unità di superficie) esercitata su di un pannello posto ortogonalmente alla direzione di propagazione dell'onda piana vale:

$$P[atm] = \frac{I}{c} = 5.11 \cdot 10^{-6} \frac{N}{m^2}$$

Questo è il valore della pressione di radiazione se il pannello assorbe completamente i fotoni incidenti. Nel caso limite opposto, in cui il pannello è totalmente riflettente (come uno specchio ideale), il valore della pressione sarebbe il doppio.

1.2 Fronte d'onda, raggio e cammino ottico

Considerando la radiazione che si propaga mediante un'onda descritta al paragrafo 1.1 Si definisce *fronte d'onda* di un gruppo di onde il luogo dei punti a fase costante. La fase cambia con il tempo ma rimane costante su tutto il fronte d'onda. È definito *fronte d'onda* il luogo dei punti in cui le onde elettromagnetiche hanno fase costante. Il raggio è definito come la normale al fronte d'onda (analogamente alle linee di forza in un campo le quali sono ortogonali al campo).

I due concetti sono rappresentati insieme in Fig. 1.2, dove sono descritte due onde elettromagnetiche che si propagano da un medesimo punto sorgente, uno degli infiniti fronti d'onda che si possono individuare (come

sono infinite le linee di campo che si possono rappresentare) e i due raggi associati alle due onde. Il fronte d'onda unisce i due punti a uguale fase d'onda ($\phi_1 = \phi_2$). I raggi 1 e 2 sono ortogonali localmente al fronte d'onda definito. Se le onde partono nel medesimo istante di tempo, allora il fronte d'onda sarà rappresentato da una superficie sferica con centro nel punto sorgente.

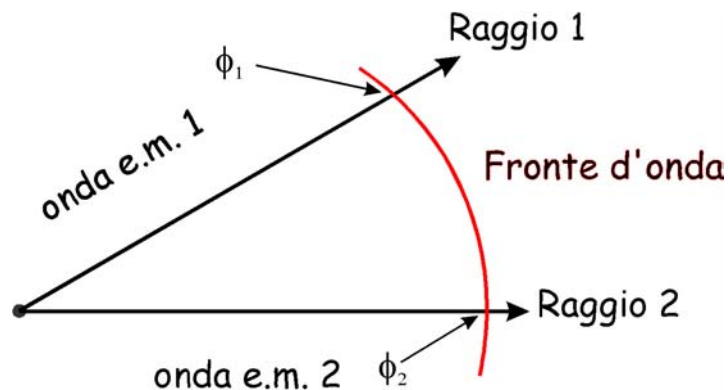


Fig. 1.2: Rappresentazione di due onde elettromagnetiche che si propagano da un medesimo punto sorgente, uno dei possibili fronti d'onda ($\phi_1 = \phi_2$) e i raggi da esse definiti.

Siccome la velocità di un'onda elettromagnetica viaggia con una differente velocità a seconda del mezzo in cui si propaga, è utile definire il cosiddetto cammino ottico (OP: *optical path*), il quale è definito come il prodotto della lunghezza fisica per l'indice di rifrazione del mezzo in cui l'onda si propaga: $OP = L \times n$.

L'indice di rifrazione nel vuoto vale 1 per definizione. Usualmente la velocità di propagazione nell'aria si pone uguale a quella nel vuoto e questo è valido con una approssimazione vera per gran parte delle applicazioni pratiche. Sempre in riferimento ad applicazioni usuali, gli indici di rifrazione dei comuni vetri ottici è maggiore di 1. Questo in pratica significa che la velocità della radiazione e.m. (ovvero la velocità della luce) all'interno di questi vetri è minore di quella in vuoto. Questo si riflette nella condizione che il fronte d'onda subisce un ritardo quando passa attraverso un mezzo (es. vetro). Si vede per esempio la Fig.1.3, in cui una delle due onde, le quali sono partite dal punto sorgente al medesimo tempo, passa attraverso un mezzo con indice di rifrazione $n' > n$. In questo caso il fronte d'onda che emerge dopo il passaggio attraverso il vetro ha una fase ritardata (in senso spaziale) rispetto a quella della parte di fronte d'onda che non è passato attraverso il mezzo. Il fronte d'onda che emerge in questo caso non è più sferico. Nel caso ideale (non tenendo conto della diffrazione dal bordo del vetro), vi sarà un punto di discontinuità nella superficie che definisce il nuovo fronte d'onda. Nella realtà il fronte d'onda emergente non è semplice come quello rappresentato in Fig. 1.3, poiché vi saranno sovrapposti effetti di diffrazione dal bordo che ne complicano la trattazione analitica. Il cammino ottico OP1 sarà uguale al cammino ottico OP2, anche se la lunghezza fisica dei due segmenti rappresentati in figura non è uguale. Questo accade poiché il fronte d'onda 1 ha viaggiato con velocità diversa (minore) quando è passato all'interno del mezzo con indice di rifrazione n' . Se L_1 è la distanza geometrica fra la sorgente e la prima superficie del vetro, L_2 è il suo spessore e L_3 è la distanza fra la seconda superficie e il punto dove abbiamo definito il nuovo fronte d'onda (ϕ'_1), allora $OP1 = L_1 \times n + L_2 \times n' + L_3 \times n$. Per OP2, il quale non viene perturbato da alcun mezzo, vale $OP2 = L \times n$, con L distanza geometrica fra la sorgente e il punto del nuovo fronte d'onda (ϕ'_2). Per la conservazione del cammino ottico, definita sopra, $OP1 = OP2$.

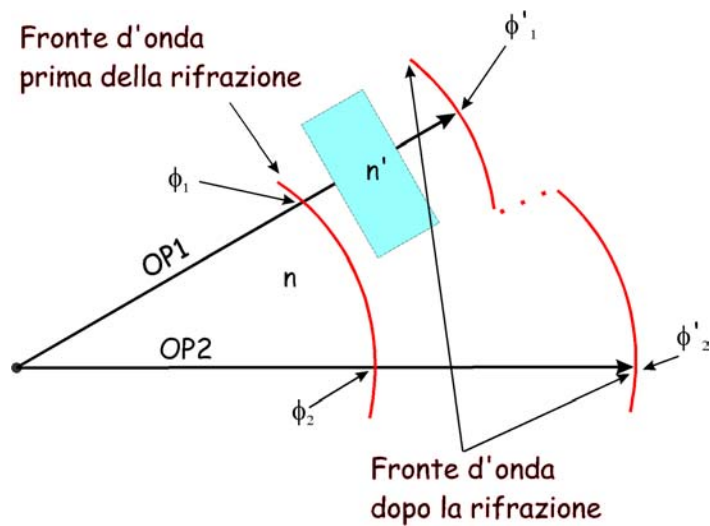


Fig. 1.3: Quando un fronte d'onda viaggia attraverso un mezzo ad indice di rifrazione n' maggiore di quello del mezzo dove è stato generato n ($n' > n$), esso subisce un ritardo di fase, però il cammino ottico nel fronte d'onda si mantiene costante: $OP1 = OP2$.

1.3 Termini radiometrici

Per radiometria si intende una disciplina che concerne la misura della potenza e del flusso della radiazione elettromagnetica. Le grandezze definite e le relative unità di misura sono molto variegata a seconda degli autori. Ultimamente alcune standardizzazioni sono state introdotte allo scopo di fare ordine sulla vasta e spesso articolata letteratura. I termini elencati nella seguente tabella sono da considerarsi standard oramai accettati.

Grandezza	Nome alternativo	Simbolo	Unità
Flusso	flusso radiante	Φ	Watt
Radianza angolare	Radiant Sterance	W	Watt m ⁻² sr ⁻¹
Radianza	Radiant areance (emessa)	M	Watt m ⁻²
Irradianza	Radiant areance (incidente)	I	Watt m ⁻²
Intensità	Radiant pointance	R	Watt sr ⁻¹

Ai termini in tabella si aggiunge il termine *spettrale* quando si ha a che fare con una misura ad una determinata lunghezza d'onda. Ad esempio la *radianza spettrale* si misura in [Watt m⁻² μm⁻¹].

Per quanto riguarda i processi di emissione ed assorbimento di radiazione da parte di un corpo, si utilizzano spesso dei suffissi i quali possiedono una grammatica definita e accettata in letteratura, la quale è riassunta nella seguente tabella:

Suffisso	Riferito a	Esempio
-anza (-ance)	Una proprietà di un campione	Trasmittanza, emittanza, assorbanza
-sione (-sion)	Un processo	Trasmissione, emissione, assorbimento
-ività (-ivity)	Una proprietà di un materiale	Trasmissività, emissività

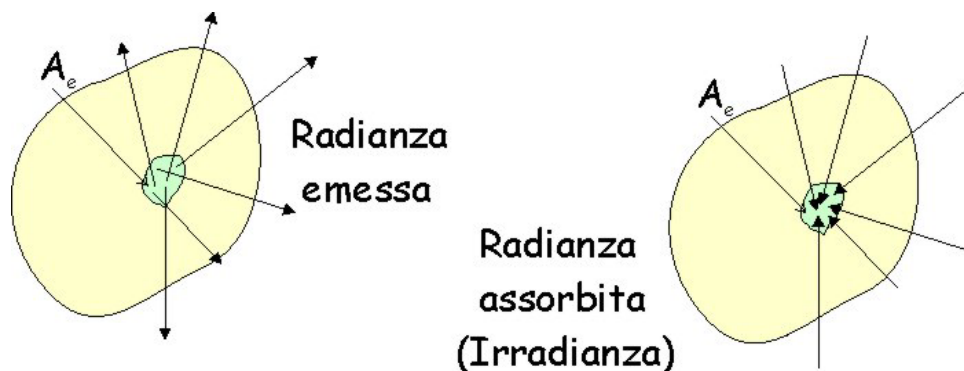


Fig. 1.4: Radianza (emissione) ed irradianza (incidenza).

1.4 Radiazione di corpo nero

Consideriamo un'onda elettromagnetica che incida sulla superficie di un corpo, come in Fig. 1.5 (parte sinistra).

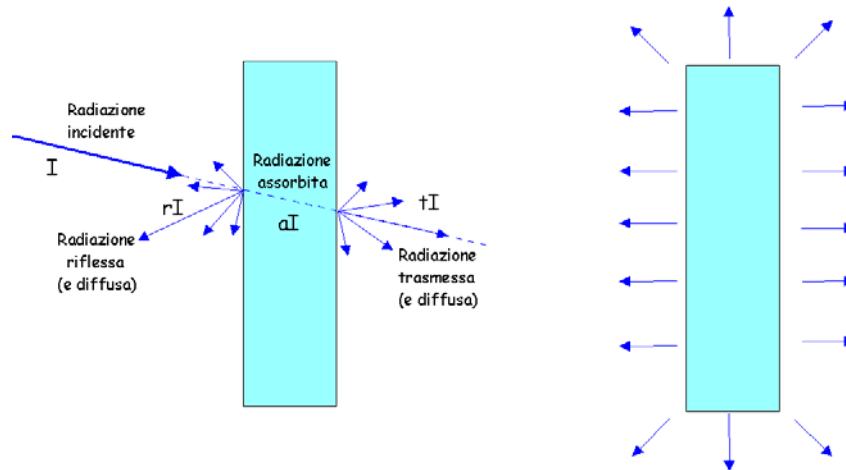


Fig. 1.5: Radiazione incidente, riflessa, assorbita trasmessa ed emessa.

Nella più generale delle situazioni una parte dell'energia incidente sulla superficie verrà riflessa (r = riflessa), una parte assorbita (a = assorbita) ed una parte passerà senza interazioni attraverso il corpo (t = trasmessa). In generale nella componente riflessa ed in quella trasmessa è presente un certo grado di diffusione della luce, dovuta alla forma non ideale della superficie che separa i due mezzi ad indice di rifrazione diversi (es. un vetro o uno specchio).

Comunque il principio di conservazione dell'energia richiede che l'irraggiamento dell'onda incidente (irradianza, I), sia uguale alla somma delle tre componenti riflessa, trasmessa ed assorbita:

$$I = aI + tI + rI$$

I coefficienti di trasmissione (t), assorbimento (a) e riflessione (r) soddisfano alla relazione $a+t+r=1$. La parte assorbita aI va ad aumentare l'energia media degli atomi del corpo assorbente.

Ogni corpo a temperatura maggiore di 0 K irradia energia sotto forma di onde elettromagnetiche (vedi Fig. 1.5 parte destra). L'energia emessa dal corpo per unità di tempo e di superficie si chiama potere emissivo M (radianza). Se il corpo è in equilibrio termico la sua temperatura rimane costante e vale la relazione

$$M = aI$$

ovvero l'energia emessa dal corpo uguaglia quella assorbita. La costante a è molto importante in termodinamica e nella definizione dei corpi reali in termini di corpo nero. Quando è riferita all'emissione essa è solitamente indicata dal simbolo ε ed è detta *emissività*.

La relazione sopra indica alcune proprietà di notevole portata:

1. Poiché l'irraggiamento non dipende dal corpo che riceve ed assorbe l'energia, il rapporto M/a è indipendente dalla natura del corpo ed è quindi lo stesso per tutti i corpi alla stessa temperatura.
2. Se il coefficiente a è uguale a 1 ($a = 1 \Rightarrow t = r = 0$) allora il corpo possiede il potere emissivo massimo possibile, essendo $a \leq 1$. Abbiamo visto come a ed ε rappresentino lo stesso meccanismo con a riferito all'assorbimento ed ε all'emissione. Un corpo per cui $a=1$ (ovvero $\varepsilon = 1$) è detto corpo nero.
3. A parità di irraggiamento, maggiore è l'energia che viene assorbita, maggiore è quella che viene emessa ($\varepsilon = a$).

La legge fondamentale che governa l'emissione di un corpo nero è stata formulata da Max Planck, ed è espressa dalla relazione che prende il nome appunto di *equazione di Planck* (o *equazione di corpo nero*). Durante le ricerche sperimentali che l'hanno portato a formularla, Planck ha introdotto tra l'altro il concetto di fotone e di energia ad esso associato (tramite appunto la costante di Planck), passo iniziale verso la formulazione della teoria quantistica della materia. Per tali studi Planck ha ricevuto il premio Nobel per la fisica nel 1918.

Le determinazioni delle principali leggi che governano la radiazione di corpo nero hanno avuto sviluppo nella seconda metà dell'ottocento. Nella seguente tabella vi è un riassunto delle relazioni trovate.

Legge	Anno	Relazione
Kirchhoff	1859	Proporzionalità fra assorbimento ed emissione
Stefan	1879	Legge empirica di quarta potenza
Boltzmann	1884	Legge teorica di quarta potenza
Wien	1893	Relazione λ -temperatura
Wien	1896	Dipendenza della potenza dalla temperatura e da λ
Reyleigh	1900	Dipendenza della potenza dalla temperatura e da λ
Planck	1900	Legge di emissione della radiazione – Teoria dei quanti

1.4.1 Legge di Planck

L'equazione di Planck vale:

$$W(\lambda, T) [\text{Watt} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \mu\text{m}^{-1}] = \frac{2hc^2}{\lambda^5 (e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1)}$$

con: h costante di Planck ($6.6260755 \cdot 10^{-34}$ J s), c velocità della luce nel vuoto ($2.998 \cdot 10^8$ m s⁻¹), λ lunghezza d'onda (μm), k costante di Boltzmann ($1.3806580 \cdot 10^{-23}$ J K⁻¹), T temperatura (K).

Per misurare la radianza su una determinata banda spettrale, bisogna integrare sull'intervallo della banda.

$$W(T) [\text{Watt} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1}] = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} W(\lambda, T) d\lambda$$

Questo tipicamente viene operato dal rivelatore stesso, il quale è sensibile solamente ad una determinata banda spettrale – a parte i rivelatori detti bolometrici – oppure si ottiene inserendo dei filtri passa banda, che operano la selezione voluta sull'intervallo spettrale.

La soluzione dell'integrazione non ha una forma analitica e deve essere fatta per via numerica. Esistono delle tabelle che riguardano il calcolo. Una approssimazione numerica utile è quella di Simpson:

$$W(T) \cong \sum_{\lambda_1}^{\lambda_2} W(\lambda, T) \Delta\lambda$$

Nella regione IR fra 3 e 12 [μm] questa formula approssima con un grado di precisione sufficiente alla maggior parte dei casi pratici utilizzando $\Delta\lambda = 0.1$ [μm].

C'è da notare che la relazione esatta per l'equazione di Planck contemplerebbe al numeratore l'indice di rifrazione al quadrato del mezzo in cui giace il corpo nero. Questo in genere è ommesso poiché l'usare 1.000 per n anziché il valore esatto di 1.00028 produce una variazione nella determinazione della temperatura di solamente 1° circa a 3000 [K].

1.4.2 Legge di Kirchoff ed emissività

Definiamo l'emissività ε di un corpo (generico e reale) come il rapporto fra la radianza emessa e quella di un corpo nero alla stessa temperatura:

$$\varepsilon(\lambda) \equiv \frac{M(\lambda, T)}{M^{BB}(\lambda, T)}$$

L'assorbività (termine mai usato in italiano) $\alpha = \alpha(\lambda)$ di un corpo è il rapporto fra la radianza assorbita e la radianza che incide sulla sua superficie.

La legge di Kirchhoff dice che:

$$\varepsilon(\lambda) = \alpha(\lambda) \quad \text{e} \quad \varepsilon \equiv \int_{\Delta\lambda} \varepsilon(\lambda) d\lambda = \int_{\Delta\lambda} \alpha(\lambda) d\lambda \equiv a$$

1.4.3 Legge di Stefan-Boltzmann

La legge di Stefan-Boltzmann rappresenta l'integrale su tutto il *range* spettrale (da 0 ad infinito) della legge di Planck. Ogni oggetto riceve ed emette radiazione continuamente. La legge di Stefan-Boltzmann ci dice che la quantità di radiazione emessa da un corpo è funzione della sua temperatura e del coefficiente di assorbimento – *assorbanza* (o di emissione - *emittanza*) della sua superficie.

$$M[\text{Watt} \cdot \text{m}^{-2}] = \sigma T^4$$

dove M è la potenza totale della radiazione messa dal corpo nero per metro quadro entro un angolo solido di 2π e σ è una costante che vale $5.670 \cdot 10^{-8} [\text{Watt m}^{-2} \text{K}^{-4}]$.

La radiazione totale Φ [Watt] emessa da un corpo di superficie A (m^2) (si noti che si parla di superficie e non di volume!) ed emissività ε vale quindi:

$$\Phi[\text{Watt}] = A\varepsilon\sigma T^4$$

Per esempio, un corpo con superficie quadra di area $1\text{m} \times 1\text{m}$, $\varepsilon = 0.6$ e $T = 300\text{K}$, emette 276 [Watt].

1.4.4 Legge di Wien

La legge di Wien rappresenta la curva dei massimi della derivata della legge di Planck.

Essa si può scrivere:

$$\lambda_{\max} T [\mu\text{mK}] = 2897.756$$

Per una temperatura, per esempio, di 300K , il massimo della curva di Planck (e quindi dell'emissione) si ha a $2897.756/300 = 9.66 \mu\text{m}$.

1.4.5 Energia dei fotoni

Tutte le grandezze radiometriche definite nel paragrafo 1.3 e utilizzate in questo possono essere espresse in termini di numero di fotoni al secondo. Infatti ogni fotone possiede una certa quantità di energia, che si può esprimere utilizzando i concetti derivati dalla teoria quantistica della radiazione elettromagnetica (*teoria dei quanti*). La quantità di energia associata ad un fotone di lunghezza d'onda λ è:

$$E_{ph} [\text{Joule}] = \frac{hc}{\lambda}$$

esprimendo λ in μm , l'energia di un fotone vale: $1.9863 \cdot 10^{-19} \text{J} \times 1/\lambda$ [μm]. Per esempio, l'energia di un fotone IR di $\lambda = 5 \mu\text{m}$ è $3.97 \cdot 10^{-20} \text{J}$. A volte si può trovare una descrizione del fotone basata sulla sua frequenza (), la cui unità di misura è l'Hertz (Hz) anziché in λ . La relazione fra lunghezza d'onda e

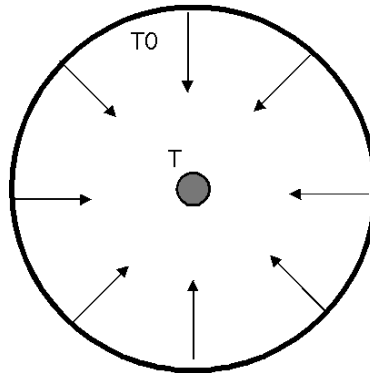
frequenza è $\nu = c/\lambda$ cosicché, ad esempio, la frequenza di un fotone di $\lambda=10 \mu\text{m}$ vale $3 \cdot 10^{13}$ Hz. L'unità di misura utilizzata in astronomia per la misura della *irradianza spettrale* è il Jansky [Jy]:

$$1[\text{Jy}] = 10^{-26} [\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1}]$$

1.4.6 Esempi ed esercizi

Esercizio 1.2

Si consideri un corpo alla temperatura T [K] composto di materiale con coefficiente di assorbimento a e superficie A_s [cm^2] posto nel vuoto al centro di un contenitore cavo alla temperatura T_0 [K] che la circonda completamente.



Si calcoli il flusso radiante (potenza) che giunge sul corpo e la quantità di esso che ne viene assorbito. Si consideri la superficie del corpo piccola rispetto a quella del contenitore (questo per assicurare che le condizioni di emissione di radiazione elettromagnetica da parte di questo non siano alterate dalla presenza della corpo, semplificando il calcolo).

Soluzione

L'irraggiamento da parte del contenitore vale $M = \sigma T_0^4$ (legge di Stefan Boltzmann). Questa cade tutta sul corpo, il quale ne assorbe la quantità $a A_s \sigma T_0^4$. L'energia a sua volta emessa dal corpo obbedisce sempre alla medesima legge e vale $\varepsilon A_s \sigma T^4$. L'energia emessa netta, differenza fra la potenza emessa e quella assorbita vale (ricordando che $\varepsilon = a$):

$$P_e - P_a = a A_s \sigma (T^4 - T_0^4)$$

Questa è la potenza che si deve fornire al corpo per mantenerlo alla temperatura T (sia nel caso $T > T_0$ che $T < T_0$). Si noti che se $T \gg T_0$ o $T \ll T_0$, i termini T_0 o T , rispettivamente possono essere trascurati nella relazione su scritta. Se invece $T \approx T_0$ allora è vantaggioso sviluppare T^4 in serie di Taylor nell'intorno di T_0 . Arrestandoci al primo termine si ottiene $T^4 = T_0^4 + 4 T_0^3 \Delta T$, da cui:

$$P_e - P_a = 4a A_s \sigma T_0^3 \Delta T.$$

A parità di ΔT la dissipazione di energia per irraggiamento varia con la terza potenza della temperatura dell'ambiente. A T_0 fissato invece, la dissipazione è proporzionale a ΔT .

Esercizio 1.3

Se il corpo è una sferetta di 1 cm di raggio fatta di tungsteno ($a = 0.35$, opaca $\varepsilon = 0$) alla temperatura di 2000 K, calcolare quanta potenza è necessaria fornire alla sferetta stessa per mantenere questa temperatura se essa è immersa in un contenitore a 300 K (temperatura ambiente).

Soluzione

L'area della superficie del corpo è $A_s = 4\pi r^2 = 1.26 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ ed essendo $T_0 \ll T$ (con i valori dati $T_0^4/T^4 = 5 \cdot 10^{-4}$), $P_e - P_a = 0.35 \cdot 1.26 \cdot 10^{-3} \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 2000^4 = 400$ [Watt]. Questa è la potenza che bisogna fornire alla sferetta per mantenerla alla temperatura di 2000 K.

Esercizio 1.4

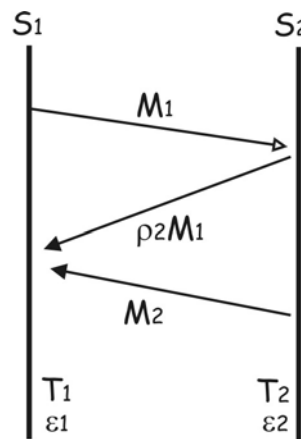
Consideriamo un corpo di forma cilindrica di altezza 10 cm e raggio 2.5 cm e con la superficie annerita in modo che il coefficiente di assorbimento sia $a = 1$ (corpo nero). Questo corpo cavo all'interno è riempito di elio alla temperatura di ebollizione ($T = 4.2$ K). La base superiore ha un piccolo foro da cui l'elio può evaporare (e attraverso lo stesso lo si può riempire nuovamente). Il cilindro è posto in un contenitore mantenuto alla temperatura dell'azoto liquido ($T_0 = 78$ K) e in equilibrio termico con esso ($\varepsilon = a = 1$). Sapendo che il calore di vaporizzazione dell'elio è di $20.9 \cdot 10^3$ J/Kg, calcolare quanto elio si perde attraverso il foro nell'unità di tempo.

Soluzione

$A_s = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ e la potenza netta assorbita dal cilindro vale $|P_e - P_a| = 1.2 \cdot 10^{-2} \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 78^4 = 4.2 \cdot 10^{-2}$ [Watt] (essendo $T_0^4 \gg T^4$ si trascura il termine T^4 nella differenza $T_0^4 - T^4$). A seguito di questo assorbimento energetico l'elio evapora con un tasso pari a $4.2 \cdot 10^{-2} / 20.9 \cdot 10^3 = 2 \cdot 10^{-6}$ Kg/s.

Esercizio 1.5

Le due superfici S_1 e S_2 in figura sono corpi grigi opachi di emissività ε_1 e ε_2 poste, rispettivamente, alla temperatura T_1 e T_2 . Considerando che le due superfici hanno rispettivamente area A_1 e A_2 , calcolare l'irraggiamento da una superficie all'altra.



Soluzione

Essendo i corpi opachi i loro coefficienti di trasmissione sono $\tau_1 = \tau_2 = 0$. I rispettivi coefficienti di riflessione valgono quindi $r_1 = 1 - \varepsilon_1$ e $r_2 = 1 - \varepsilon_2$. S_2 ha radianza $M_2 = \varepsilon_2 \sigma T_2^4$ [Watt m^{-2}] (legge di Stefan Boltzmann per un corpo reale) e questa energia è diretta verso S_1 . A questa si somma quella parte di energia che M_1 irraggia e che viene riflessa da S_2 , pari a $r_2 M_1 = (1 - \varepsilon_2) M_1$. Quindi l'irraggiamento I_1 su S_1 è $I_1 = r_2 M_1 + M_2 = (1 - \varepsilon_2) M_1 + \varepsilon_2 \sigma T_2^4 = M_1 + \varepsilon_2 (\sigma T_2^4 - M_1)$. Analogamente per S_2 : $I_2 = M_2 + \varepsilon_1 (\sigma T_1^4 - M_2)$. Ricordando che $M_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4$ si ottiene:

$$I_1 = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 + \varepsilon_2 \sigma T_2^4 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma T_1^4$$

$$I_2 = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 + \varepsilon_2 \sigma T_2^4 - \varepsilon_2 \varepsilon_1 \sigma T_2^4$$

$(I_2 - I_1)$ dà l'energia per unità di tempo per unità di area trasferita da S_2 a S_1 :

$$I_1 - I_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma (T_2^4 - T_1^4)$$

da cui la potenza ricevuta (emessa) dalla (sulla) singola superficie si scrive:

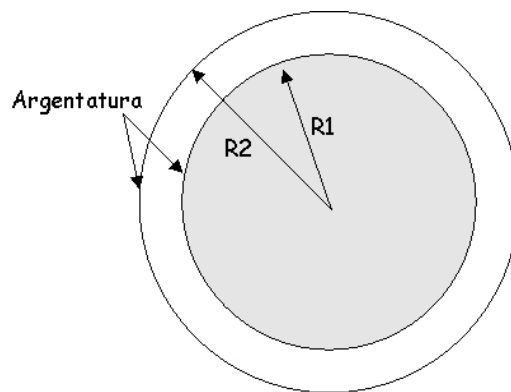
$$P_1 = A_1 (I_1 - I_2)$$

$$P_2 = A_2 (I_2 - I_1)$$

Supponendo che le superfici abbiano area di 500 cm^2 e siano ricoperte di argento ($r=0.9$ e quindi $\varepsilon = 0.1$), per mantenere T_1 a -40 gradi, con una T_2 di 20 gradi, si ottiene $I_1-I_2 = 2.5 \text{ [Watt m}^{-2}\text{]}$, da cui $P_1 = 0.125 \text{ [Watt]}$ (cioè la superficie S_1 assorbe potenza) e $P_2 = -0.125 \text{ [Watt]}$ (cioè la superficie S_2 cede potenza). Quindi la potenza $|P| = 0.125 \text{ [Watt]}$ deve essere resa disponibile da un dispositivo esterno¹.

Esercizio 1.6

Un contenitore Dewar a forma sferica con raggio interno $R_1 = 1 \text{ m}$ e raggio esterno $R_2 = 1.1 \text{ m}$ ha le pareti interne argentate ($r = 0.95$). Esso si trova a temperatura ambiente ($T_2 = 300 \text{ K}$) e all'interno è riempito di ossigeno liquido alla temperatura di ebollizione ($T_1 = 90 \text{ K}$, calore specifico a volume costante $c_v = 240 \text{ J/g}$). Calcolare con che velocità viene perso ossigeno a causa dell'irraggiamento e di quanto cambierebbe il risultato se le pareti del contenitore fossero annerite ($\varepsilon = 0$).



Soluzione

Poiché la distanza fra le pareti del contenitore è piccola rispetto al raggio di curvatura di esse si può usare la relazione dell'esercizio precedente: $I_1-I_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2\sigma(T_2^4-T_1^4) = 1.14 \text{ [Watt m}^{-2}\text{]}$, se $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.05$. $P_1 = A_1 (I_1-I_2) = 4\pi R_1^2 \times (I_1-I_2) = 14.33 \text{ [Watt]}$. L'energia assorbita fa evaporare l'ossigeno al tasso $q = P_1/cv = 0.06 \text{ [g s}^{-1}\text{]}$. Se $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, allora $I_1-I_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2\sigma(T_2^4-T_1^4) = 455.55 \text{ [Watt m}^{-2}\text{]}$ da cui $P_1 = 5724.61 \text{ [Watt]}$ e $q = 23.85 \text{ [g s}^{-1}\text{]}$.

1.5 Bande spettrali nell'infrarosso

La definizione delle bande infrarosse è generalmente differente per i vari campi di applicazione e di interesse. Nella tabella seguente vengono riassunte le definizioni delle bande per applicazioni termiche (civili e industriali) e astronomiche.

	Astronomia	Civile & industriale
Near IR (NIR)	1.0 – 2.5 μm	0.7 – 1.1 μm
Short IR (SWIR)		1.1 – 2.5 μm
Mid IR (MIR)	2.5 – 28 μm	3.0 – 4.6 μm
Long IR (LWIR)	> 28 μm	7.0 – 15.0 μm
Very Long IR		> 15.0 μm

¹ Attualmente hanno una buona qualità dei dispositivi detti crio-pompe (cryo-cooler) in grado di fornire potenze sufficienti per molti scopi pratici.

2. Disegno Ottico

In questo capitolo affronteremo i concetti basilari del disegno ottico, ossia dello studio della progettazione di un sistema ottico.

Il proposito di un sistema ottico è, nella maggior parte dei casi, quello di formare l'immagine di un oggetto, il più possibile fedele all'oggetto stesso. Esistono in realtà anche sistemi ottici costruiti per raccogliere luce senza particolari requisiti di qualità, ma noi ci focalizzeremo solamente su quei sistemi che sono in grado di produrre una immagine.

I concetti preliminari di ottica geometrica, oggetto, immagine e così via sono già stati introdotti nei corsi precedenti.

Un sistema ottico basilare è costituito da:

1. Un oggetto (anche target),
2. Un sistema ottico (ad es. obiettivo, telescopio, microscopio, ecc...),
3. L'immagine dell'oggetto creata dal sistema ottico.

Consideriamo il sistema ottico in Fig. 2.1. Esso è costituito da una lente semplice la quale crea l'immagine L' dell'oggetto esteso L . Il rapporto fra le dimensioni fisiche L e L' è chiamato ingrandimento del sistema ottico (o magnificazione). L'ingrandimento non è una proprietà intrinseca del sistema ottico ma dipende solamente dalle distanze dell'oggetto e dell'immagine dal sistema ottico stesso. In realtà la definizione corretta richiede di possedere i concetti di pupilla d'ingresso ed uscita, che vedremo meglio nel seguito.

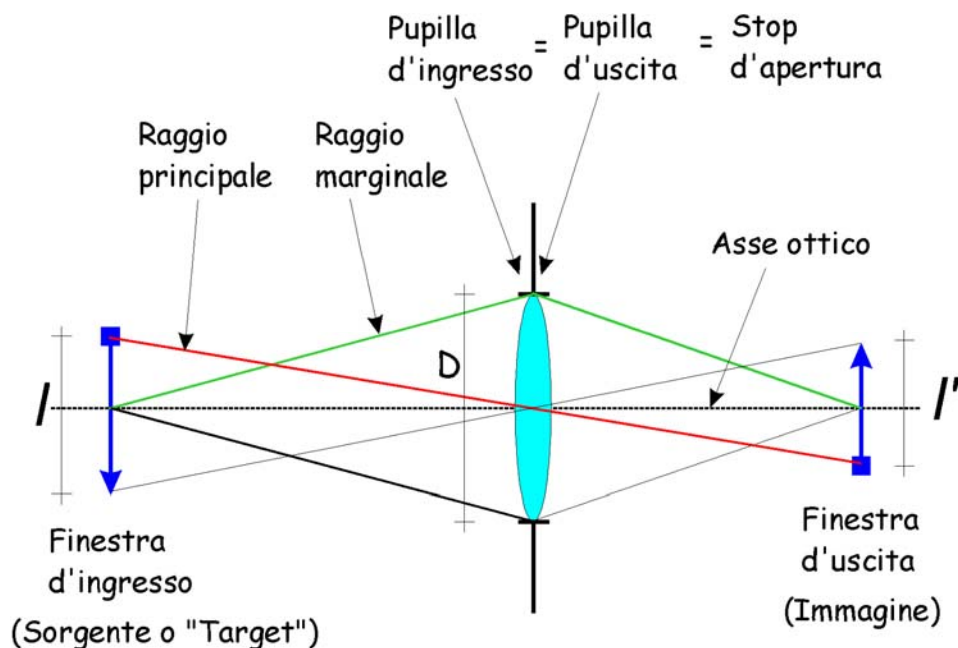


Fig. 2.1 Sistema ottico basilare.

2.1 Formazione dell'immagine

Nel caso generico l'immagine è affetta da svariate tipi di degrado, evidenziati in Fig. 2.2.

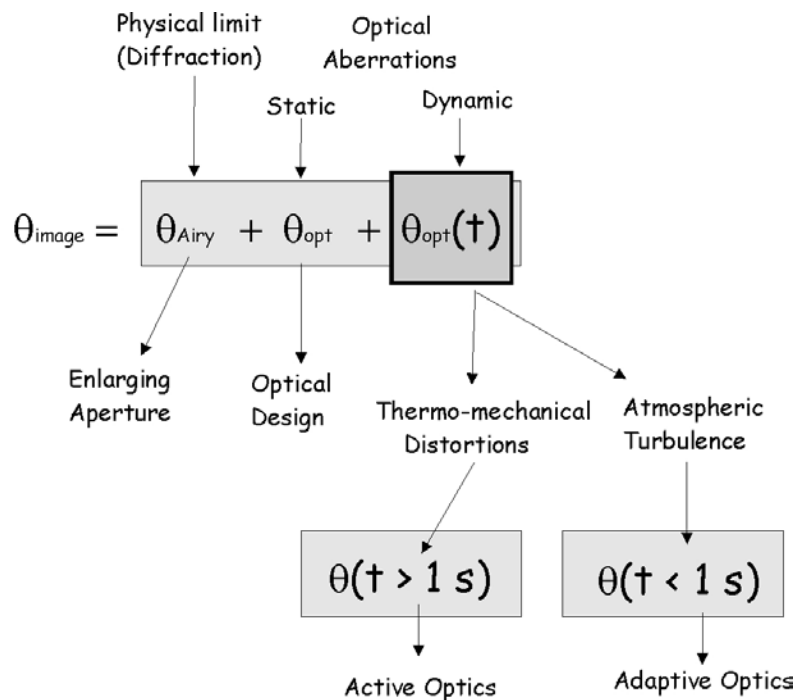


Fig. 2.2: Principali cause del degrado dell'immagine.

Il segno + non è da intendersi in senso algebrico, ma piuttosto come un operatore convoluzione fra i singoli contributi. A θ_{image} va anche convoluto un contributo dovuto ad errori di allineamento nello strumento e imperfezioni nella lavorazione delle superfici ottiche. Comunque questo contributo non lo prenderemo in considerazione poiché non è modellabile a priori. Nel caso in cui $\theta_{\text{image}} = \theta_{\text{Airy}}$ l'immagine si dice *diffraction limited*

2.1.1 Campionamento ideale dell'immagine

Il campionamento di *Nyquist* si ha ponendo due pixel sull'immagine θ_{image} . A volte si preferisce mettere quattro pixel sul disco su θ_{image} in modo da campionare secondo il criterio di *Rayleigh*. Se θ_{image} è molto maggiore di due pixel nel caso *Nyquist* (o quattro pixel nel caso *Rayleigh*) l'immagine si dice sovra campionata, nel caso contrario sotto campionata.

2.1.2 Disco di diffrazione

Escludiamo per ora l'effetto delle aberrazioni. L'immagine di un punto oggetto, anche per uno strumento ideale, ha una dimensione fisica finita, determinata dal diametro del disco di diffrazione (disco di Airy), di dimensione angolare $\theta_{\text{Airy}} = 2.44 \lambda/D$, con λ la lunghezza d'onda a cui si osserva e D il diametro della pupilla d'ingresso (vedi Fig. 2.3). La dimensione fisica (ad es. in micrometri) si trova moltiplicando la dimensione angolare per la focale dello strumento: $\phi_{\text{Airy}} = \theta_{\text{Airy}} \times f$

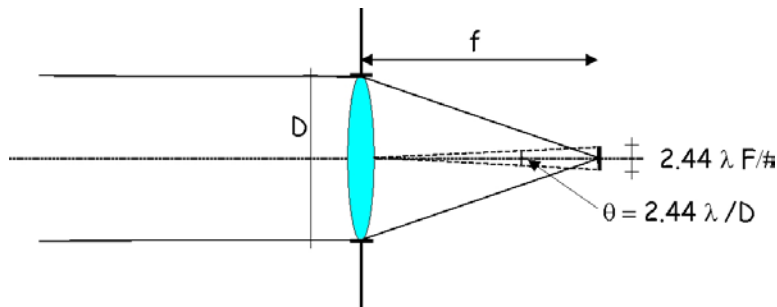


Fig. 2.3: Disco di diffrazione.

2.2 Ottiche riflettive

2.2.1 Aberrazione delle ottiche (θ_{opt})

Un oggetto in asse può essere focalizzato senza aberrazione sferica se si considerano le proprietà delle superfici coniche. Una conica è descritta dalle relazioni:

$$\rho^2 - 2Rz + (1 + K)z^2 = 0$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dove R è il raggio di curvatura della sfera osculatrice della conica, K è la costante conica e z è detto il *sag* della superficie. Fissata quindi la forma della superficie (R, K) e la posizione (x,y) si ottiene il valore del *sag* della superficie conica rispetto a quella posizione.

Per varie combinazioni di p e q, le coniche mostrate Fig. 2.4 producono una immagine priva di aberrazione sferica.

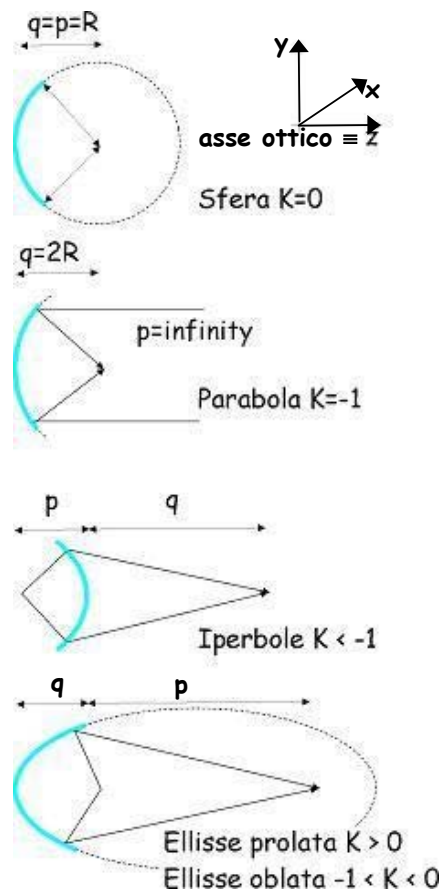


Fig. 2.4: Proprietà ottiche delle superfici coniche.

Per un oggetto all'infinito e sull'asse ottico (tipica applicazione astronomica) la superficie che produce una immagine priva di aberrazione sferica è il paraboloide. Iperboloide ed ellissoide producono una immagine senza aberrazione sferica se oggetto ed immagine stanno nei fuochi delle curve, e quindi a distanza finita. La sfera è un caso particolare di ellissoide con i due fuochi coincidenti. Il problema principale per le coniche non sferiche è quella di produrre le aberrazioni fuori-asse. Ricordiamo che l'ingrandimento vale $m = q/p$. Una utile relazione fra questo parametro e la costante conica è:

$$K = -\left(\frac{m+1}{m-1}\right)^2$$

2.2.2 Aberrazioni fuori asse

Abbiamo visto come le superfici coniche siano le uniche a fornire immagini prive di aberrazione sferica, per oggetti in asse, per tutte le possibili combinazioni di p e q .

Considerando un oggetto all'infinito, ipotesi sempre valida per le osservazioni astronomiche, vediamo che la parabola è la conica che fornisce un'immagine priva di sferica per oggetti in asse.

Per le aberrazioni fuori asse ad un angolo ψ (vedi Fig 2.5) abbiamo che le dimensioni angolari delle aberrazioni ottiche coma e astigmatismo valgono:

$$\theta_{Coma} = \frac{\psi}{16(F/\#)^2}$$

$$\theta_{Astigmatismo} = \frac{\psi^2}{2(F/\#)}$$

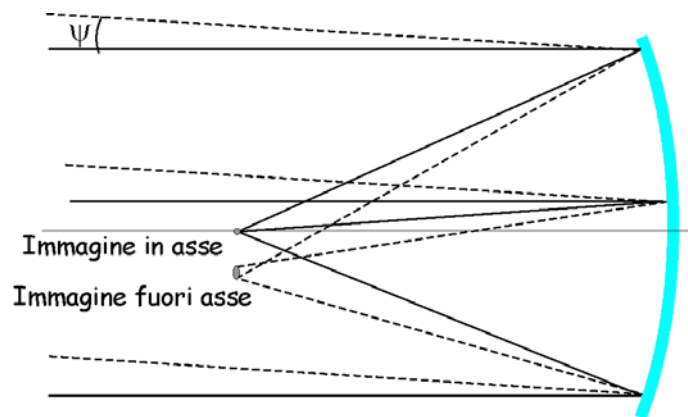


Fig. 2.5: Immagini per un oggetto in asse e uno fuori asse di un angolo θ .

Al solito le aberrazioni tangenziali (ϕ_{Coma} e ϕ_{Ast} in micrometri) si trovano da quelle angolari (θ_{Coma} e θ_{Ast} in radianti o in gradi o in secondi d'arco) moltiplicando per la focale dello strumento (in micrometri).

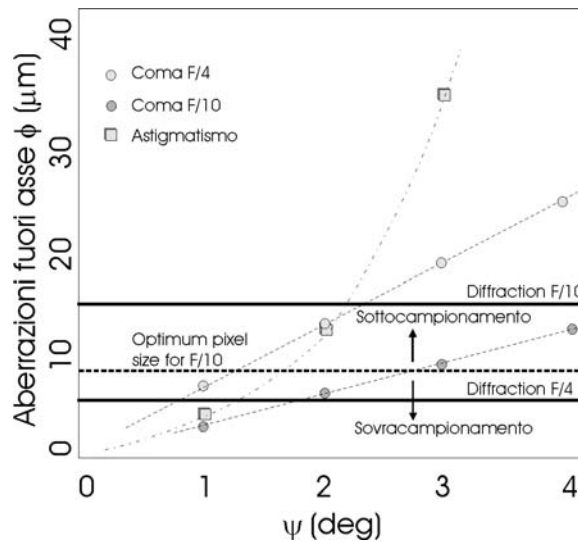
Esercizio 2.1

Disegnare un grafico che mostri le dimensioni delle immagini di coma e astigmatismo per 4 oggetti a 1, 2, 3 e 4 gradi dall'asse di un paraboloide di focale 250 mm e diametro 25 mm e di un paraboloide di focale 100 mm e diametro sempre 25 mm. Considerare $\lambda=0.65 \mu\text{m}$.

Soluzione

Il primo specchio ha $F/10$ ed il secondo $F/4$. A parità di diametro, l'astigmatismo (ϕ_{Ast}) non dipende dalla focale mentre la coma (ϕ_{Coma}) è inversamente proporzionale alla focale. Dal punto di vista angolare, per angoli piccoli (quindi vicino all'asse ottico) la coma prevale sempre sull'astigmatismo ($\theta_{Coma} > \theta_{Ast}$). Infatti, come si vede dall'analisi delle derivate ($d\theta_{Ast}/d\psi = \psi/2F/\#$ e $d\theta_{Coma}/d\psi = 1/16(F/\#)^2$) la pendenza

dell'astigmatismo va a zero per ψ piccoli. Nel caso F/10 la coma prevale sull'astigmatismo per $\psi < 0.7$ gradi ($\theta_{Ast}/\theta_{Coma} = 80 \psi$), nel caso F/4 la coma prevale sull'astigmatismo per $\psi < 1.8$ gradi ($\theta_{Ast}/\theta_{Coma} = 32 \psi$). Il disco di Airy lineare per lo specchio F/10 vale $D_{Airy} = 2.44 \times (0.65/25000) \times 250000 \approx 16 \mu\text{m}$, mentre per lo specchio F/4 vale $D_{Airy} = 2.44 \times (0.65/25000) \times 100000 \approx 6.4 \mu\text{m}$, quindi lo specchio F/10 diventa limitato dall'astigmatismo per $\psi > 2$ gradi mentre lo specchio F/4 diventa limitato dall'astigmatismo per $\psi > 1$ grado. Nella figura sotto è indicata anche la *pixel size* ($8 \mu\text{m}$) per il campionamento ideale del disco di diffrazione per il caso F/10: con pixel più grandi/piccoli si ha *sottocampionamento/sovracampionamento* del disco di Airy.



2.2.3 Telescopio a due specchi

Ponendo uno specchio iperbolico con uno dei fuochi sul piano focale di M_1 (parabolico) otteniamo un *teleobiettivo* con focale equivalente maggiore delle dimensioni fisiche dello strumento. Una caso particolare di teleobiettivo è il telescopio classico a due specchi. Un telescopio costruito in questo modo si chiama *Cassegrain*. Sebbene l'aberrazione sferica per oggetti in asse è annullata, permangono tutte le altre aberrazioni fuori asse.

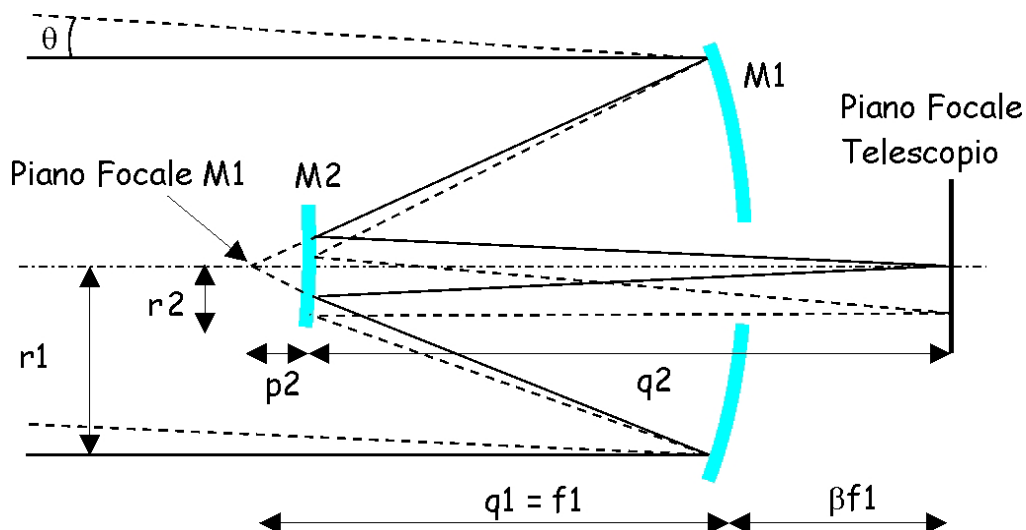


Fig. 2.6: Telescopio a due specchi.

R_1 e R_2 sono i raggi di curvatura di M_1 e M_2 , $\rho = R_2/R_1$ (*rapporto dei raggi di curvatura*), $\varepsilon = r_2/r_1$ (*rapporto di ostruzione* che è sempre < 1). La magnificazione di M_1 è $m_1 = 1$ mentre quella di M_2 è $m_2 = q_2/p_2$, la

magnificazione del telescopio è $m = m_1 \times m_2 = m_2 = q_2/p_2 = f/f_1 = F/F_1$.??? (si ricordi che $f = R/2$). βf_1 è detta estrazione focale (o *back focal distance*), ed è la distanza fra il vertice del primario ed il piano focale del telescopio misurata in unità di misura della focale di M_1 . $F_1 = f_1/D$ e $F = f/D$ sono i rapporti focali del primario e del telescopio, rispettivamente, con $f_1 =$ focale di M_1 e $f =$ focale del telescopio.

Le seguenti relazioni sono utili da ricordare, e possono essere ricavate da semplici considerazioni di ottica geometrica (seppure la loro derivazione sia tediosa):

$$q_2 = m \cdot \varepsilon \cdot f_1 \qquad \rho = \frac{m \cdot \varepsilon}{m-1}$$

$$\varepsilon = \frac{\rho(m-1)}{m} \qquad 1 + \beta = \varepsilon(m+1)$$

Si tenga presente che le relazioni non sono fra loro indipendenti e quindi non si possono utilizzare, in generale, in un sistema di equazioni per risolvere i parametri.

Le costanti coniche dei due specchi (M_1 parabolico, M_2 iperbolico) valgono:

$$K_1 = -1$$

$$K_2 = -\left(\frac{m+1}{m-1}\right)^2$$

Coma ed astigmatismo per telescopi a due specchi valgono:

$$\theta_{Coma} = \frac{\psi}{16(F/\#)^2}$$

$$\theta_{Astigmatismo} = \frac{\psi^2}{2(F/\#)} \left[\frac{m^2 + \beta}{m(1 + \beta)} \right]$$

Come si nota l'aberrazione di coma è uguale a quella del singolo paraboloide, mentre l'astigmatismo, per β piccoli è all'incirca m volte quello del paraboloide.

2.2.4 Telescopi aplanatici

Ogni superficie ottica può essere utilizzata per correggere una particolare aberrazione. Ne risulta che con due specchi si possono in realtà correggere due differenti tipi di aberrazione. Come abbiamo visto l'aberrazione più forte (dopo quella sferica, già corretta utilizzando un paraboloide) è quella di coma. Un telescopio a due specchi ottimizzato per correggere sferica e coma si dice *aplanatico*. Per ottenere queste qualità in un telescopio *Cassegrain* anche il primario diventa iperbolico (configurazione *Cassegrain aplanatico* o *Ritchey-Chretien*). Nel caso del telescopio *Gregoriano* il primario diventa anch'esso un'ellisse come il secondario (configurazione *Gregoriano aplanatico*).

In entrambe i casi le costanti coniche valgono:

$$K_1 = -1 - \frac{2(1+\beta)}{m^2(m-\beta)}$$

$$K_2 = -\left(\frac{m+1}{m-1}\right)^2 - \frac{2m(m+1)}{(m-\beta)(m-1)^3}$$

Adesso valgono le seguenti equazioni:

$$\theta_{Coma} = 0$$

$$\theta_{Astigmatismo} = \frac{\psi^2}{2(F/\#)} \cdot \left[\frac{m \cdot (2m+1) + \beta}{2m \cdot (1+\beta)} \right]$$

Per β piccoli l'astigmatismo vale $m+1/2$ volte quello del singolo paraboloide. Quindi in un telescopio *aplanatico* l'astigmatismo è più forte che nel corrispondente *classico*.

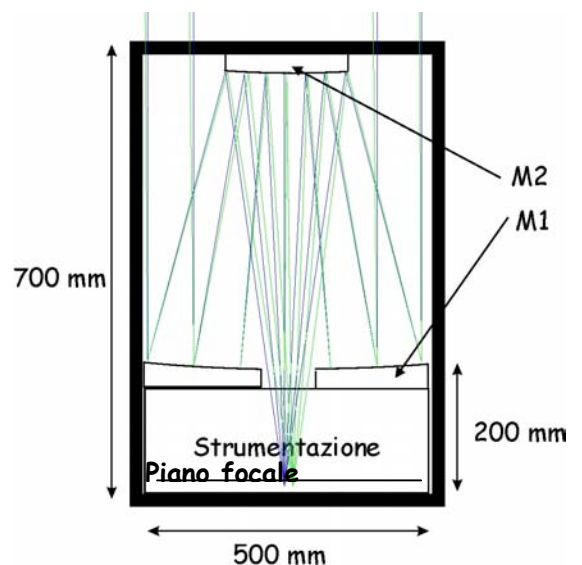
Esercizio 2.2

Nella stazione spaziale orbitante ISS uno spazio volumetrico a forma di parallelepipedo di dimensioni 500 x 500 x 700 mm può ospitare un telescopio per osservazioni UV a 0.4 μm di lunghezza d'onda. Il pixel di campionamento è equivalente ad un quadrato di 1.6 μm di lato². Per permettere l'alloggiamento della strumentazione e necessario lasciare 200 mm sul retro del primario ed il rivelatore ha un ingombro di 8 mm. Calcolare i parametri di disegno delle ottiche per un telescopio *Cassegrain* classico ed uno *Ritchey-Chretien*. Si considerino M_1 e M_2 di spessore trascurabile.

Soluzione

La distanza fra M_1 e M_2 può essere al massimo 500 mm. Il piano focale del telescopio è a 192 mm dal vertice del primario (*estrazione focale*). Il diametro del telescopio sarà di 500 mm ($D_1 = 500$ mm). Il campionamento ideale corrisponde a quello del disco di Airy su due pixel.

- Il disco di Airy vale in diametro (angolare) $2.44 \lambda/D = 1.952 \cdot 10^{-6}$. Questo deve cadere su due pixel (3.2 μm). La focale dovrà essere quindi $f = 3.2 \mu\text{m}/\theta_{\text{Airy}}$, da cui $f = 1639$ mm
- $q_2 [= (500 + 192) \text{ mm} = 692 \text{ mm}] = m \times \varepsilon \times f_1 = (f/f_1) \times \varepsilon \times f_1 = f \times \varepsilon$ da cui $\varepsilon = 0.4222$
- $\varepsilon = r_2/r_1$ da cui $r_2 = \varepsilon \times r_1 = 105.5$ mm. da cui $D_2 = 211.1$ mm.
- $p_2/r_2 = f_1/r_1$ (triangoli simili) da cui $p_2/r_2 = (p_2+500)/r_1$ da cui $p_2 = (500 r_2)/(r_1-r_2) = 365$ mm
- $f_1 = 500 + p_2 = 865.0$ mm
- $m = f/f_1 = 1.89$
- β (estrazione focale normalizzata) vale $192/865 = 0.222$
- $R_1 = 2 f_1$ -da cui $R_1 = 1730.0$ mm
- $\rho = R_2/R_1 = m \times \varepsilon / (m-1) = 0.891$, da cui $R_2 = \rho \times R_1$ da cui $R_2 = 1542.0$ mm.
- Per il telescopio *Cassegrain*: $K_1 = -1$. $K_2 = -(m+1)^2/(m-1)^2$ da cui $K_2 = -10.38$
- Per un telescopio *Ritchey-Chretien*³: $K_1 = -1.40$ e $K_2 = -19.38$.



² Questo valore è fittizio e a puro scopo illustrativo. In realtà il criterio di scelta della focale per il telescopio UVISS è stato dettato dal campo di vista necessario. Per di più il pixel equivalente dato dalle dimensioni dei canali della *microchannel plate* è superiore 1.6 μm .

³ La distinzione fra *Cassegrain* e *Ritchey-Chretien* sta solamente nelle costanti coniche degli specchi

Nel caso *Cassegrain* coma ed astigmatismo valgono: $\theta_{\text{Coma}} = (5.82 \times 10^{-3}) \cdot \psi$ [ψ in radianti] ed $\theta_{\text{Ast}} = 0.25 \cdot \psi^2$ [ψ in radianti]. Nel caso *Ritchey-Chretien* $\theta_{\text{Coma}} = 0$ ed $\theta_{\text{Ast}} = 0.31 \cdot \psi^2$ [ψ in radianti] ed è quindi maggiore che nel caso *Cassegrain*.

Una volta calcolati i parametri al primo ordine si passa all'ottimizzazione del disegno mediante *ray tracing*.

2.2.5 Disallineamento dinamico delle ottiche ($\theta_{\text{opt}}(t)$)

Consideriamo solo $\theta_{\text{opt}}(t > 1\text{sec})$, ossia gli effetti dovuti alle deformazioni termo-meccaniche del telescopio. Si può dimostrare che nel disallineamento del secondario viene introdotta aberrazione di coma e l'aumento dell'astigmatismo è da considerarsi trascurabile rispetto a questo. **Senza perdita di generalità, il disallineamento del secondario o (*decentering*) l , si può suddividere in una componente di spostamento angolare di *tilt* α e in una di spostamento lineare *piston* d lungo l'asse del telescopio (vedi Fig 2.7).**

La coma angolare introdotta da *tilt* e dal *piston* vale

$$\theta_{\text{Coma}}^{\text{pistone}} = \frac{d}{f} \cdot \frac{3(m-1)^3}{32(F/\#)^2} \cdot \left[K_2 - \frac{m+1}{m-1} \right]$$

$$\theta_{\text{Coma}}^{\text{tilt}} = \alpha \cdot \frac{3(m-1) \cdot (1+\beta)}{16(F/\#)^2}$$

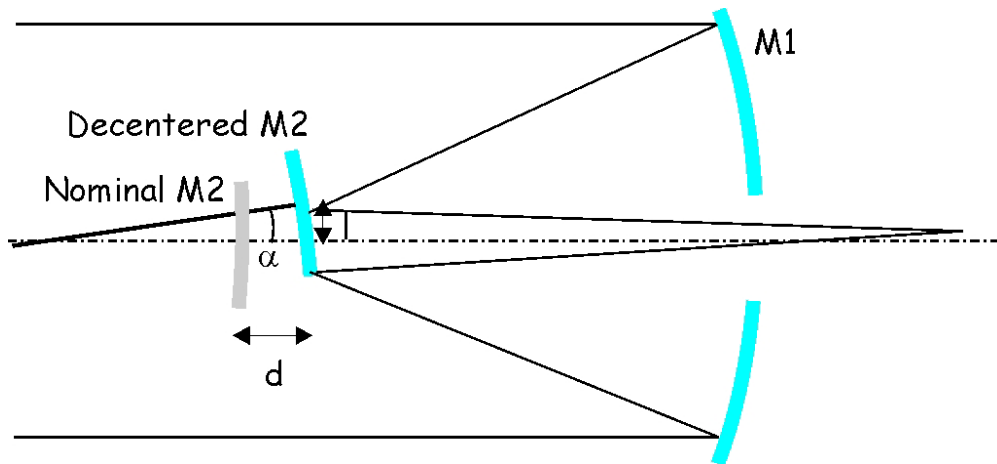


Fig. 2.7: Telescopio a due specchi.

Esercizio 2.3

Per il telescopio per UVISS trovare:

1. Tolleranza in *piston* del secondario.
2. Tolleranza in *tilt* del secondario attorno al suo centro di curvatura.
3. Introducendo quantità uguali in modulo e contrarie in segno di coma per *tilt* e per *piston* trovare la combinazione che fornisce uno spostamento dell'immagine senza introduzione di coma. Per la tolleranza si consideri che l'immagine in asse al piano focale non può degradare più di 10 μm . Si calcolino gli stessi parametri per il telescopio TNG: $D = 3500$ mm, $f_1 = 7700$ mm, distanza M_1 - $M_2 = 5933$ mm, rapporto focale telescopio $F/11$, $K_1 = -1.024$, $K_2 = -2.45$, $\beta = 0.3767$ ed $m = 5$

Soluzione

Abbiamo calcolato i seguenti parametri per il telescopio *Cassegrain*: $D_1 = 500$ mm, $m = 1.9$, $f = 1639$ mm, $\beta = 0.222$, $R_2 = 1542.0$ mm e rapporto focale del telescopio $F/3.3$. Nel caso *Cassegrain* $K_2 = -10.38$ e in quello *Ritchey-Chretien* $K_1 = -1.40$ e $K_2 = -19.38$.

1. Considerando che $\phi = f \times \theta$, $\phi_{\text{dec}} = 0.085 d$. Quindi ogni millimetro di puro *decentering* provoca 72 μm di coma. Siccome non possiamo avere un degrado maggiore di 10 μm , ne risulta che M_2 non può spostarsi lateralmente per più di 0.14 mm. Siccome ϕ_{dec} dipende da K_2 , la sensibilità al decentramento del secondario per il caso *Ritchey-Chretien* è differente: $\phi_{\text{dec}} = 0.14 l$ che risulta quindi maggiormente sensibile rispetto a quello classico. Nel caso TNG (*Ritchey-Chretien*), $\phi_{\text{dec}} = 0.196 l$.
2. Sempre considerando $\phi = f(\theta)$: $\phi_{\text{tilt}} = 0.019 f \alpha = \alpha 31.04$ (mm). Quindi 10 μm di coma sono prodotti da un *tilt* di M_2 attorno al suo vertice pari a 0.018 gradi. In questo caso non vi è differenza fra classico e *Ritchey-Chretien*. Per il caso TNG $\phi_{\text{tilt}} = 328 \alpha$ (mm), quindi molto più sensibile del caso UVISS.
3. Nel caso classico la coma introdotta per *decentering* vale $\phi_{\text{dec}} = 0.086 l$, mentre quella per *tilt* $\phi_{\text{tilt}} = \alpha 31.04$ (mm). Eguagliando gli opposti si ha $0.085 l = -31.04 \alpha$, da cui $l/\alpha = -31.04/0.086 = 365$ mm. Nel caso *Ritchey-Chretien* $l/\alpha = 221.7$ mm. Nel caso TNG $l/\alpha = 1676$ mm.

Il parametro che dà lo spostamento dell'immagine sul piano focale senza introduzione di coma, come si può capire, è molto importante per i telescopi. Questo punto coincide con p_2 (distanza del vertice di M_2 dal fuoco del primario) nel caso classico, mentre è fra p_2 ed il vertice di M_2 nel caso *aplanatico*. Esso si indica generalmente come *punto neutro* ed è un particolarmente utile per telescopi ad ottica attiva con correzione da M_2 e per quelli nell'infrarosso, dove c'è bisogno di spostare l'immagine sul piano focale senza introdurre degrado per aberrazione.

Le relazioni analitiche che danno la posizione del *punto neutro* nel caso di telescopi *classici* ed *aplanatici* sono le seguenti (che come al solito non deriviamo):

$$\frac{l}{\alpha_{\text{classico}}} = p_2$$

$$\frac{l}{\alpha_{\text{aplanatico}}} = \frac{p_2}{1 + \frac{1}{(m - \beta) \cdot (m - 1)}}$$

L'espansione termica della struttura che alloggia le ottiche provoca principalmente un'espansione lungo l'asse dello strumento (coordinata L in Fig. 2.8) della quantità ΔL . Questo effetto è particolarmente dannoso nei telescopi astronomici data la grande distanza fra primario e secondario e le variazioni della temperatura del sito (il telescopio lavora tipicamente in ambiente non termalizzato). Come è facile intuire dalla Fig. 2.8 e dalla relazione lineare che lega espansione termica e distanza fra M_1 e M_2 , la variazione di ΔL con ΔT vale (con α_T coefficiente di espansione termica):

$$\Delta L \equiv \alpha_T \cdot L \cdot \Delta T$$

La relazione fra ΔT e sfuocamento da ricordare è:

$$\Delta \mathcal{G} = \left[\frac{1}{(F_1 / \#)^2} + \frac{1}{(F / \#)^2} \right] \cdot \frac{\alpha_T \cdot L \cdot \Delta T}{D} \text{Controllare!}$$

Questa permette di calcolare lo sfuocamento per un telescopio a due specchi con F_1 ed F i rapporti focali rispettivamente di primario e telescopio, D il diametro del primario, α_T il coefficiente di espansione termica del materiale di cui sono fatti i tubi di supporto, ΔT la differenza di temperatura ed L la distanza fra primario e secondario.

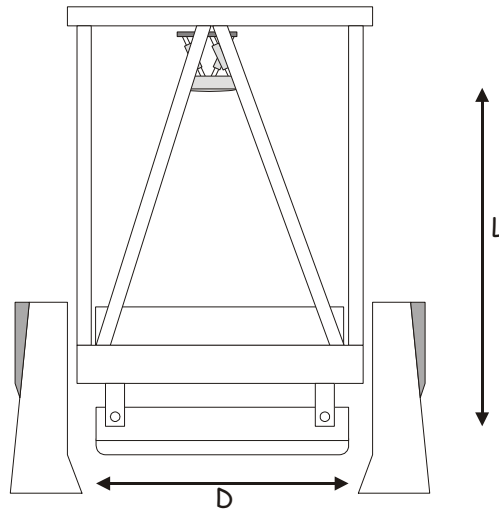


Fig. 2.8: Parametri per calcolare lo sfuocamento dovuto ad effetti termici.

Esercizio 2.4

Calcolare lo sfuocamento (in μm) per unita' di variazione di temperatura per UVISS considerando un coefficiente di dilatazione termica di $1.2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ (alluminio). Fare lo stesso per il telescopio TNG: $L = 6 \text{ m}$, $D = 3.5 \text{ m}$, $F/\# = 11$, $F_1/\# = 2.2$, $f = 38.5 \text{ m}$, e stesso coefficiente di espansione termica.

Soluzione

$\Delta\phi = f \times \Delta\theta$, quindi nel caso UVISS: $L = 700 \text{ mm}$, $D = 500 \text{ mm}$, $F/\# = 3.28$, $F_1/\# = 1.73$, $f = 1639 \text{ mm}$ si ottiene $\Delta\phi_{\text{UVISS}} \approx 12 \text{ } \mu\text{m } ^\circ\text{C}^{-1}$ mentre per il caso TNG $\Delta\phi_{\text{TNG}} \approx 170 \text{ } \mu\text{m } ^\circ\text{C}^{-1}$. Quindi il telescopio UVISS avendo un rapporto focale più spinto ($F_{\# \text{TNG}}/F_{\# \text{UVISS}} = 3.3$) e una dimensione più contenuta ($L_{\text{TNG}}/L_{\text{UVISS}} = 8.6$), ha una tolleranza molto più rilassata per effetto dell'espansione termica.

2.3 Ottiche rifrattive

Sempre fermandoci ad una trattazione al terzo ordine nello sviluppo di *Seidel*, si possono ricavare delle relazioni analoghe a quelle per ottiche riflettive anche per ottiche rifrattive. In particolare daremo alcune relazioni per le lenti.

La focale di una lente di spessore T , costituita da un vetro di indice di rifrazione n e con raggi di curvatura delle superfici R_1 e R_2 vale:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \cdot \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n-1) \cdot T}{nR_1R_2} \right]$$

R_i è da considerare positivo se il centro di curvatura della superficie giace a destra di essa e negativo se giace a sinistra.

2.3.1 Fattore di forma

Considerando una lente sottile, ovvero trascurando t nella relazione precedente, essa diventa:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \cdot \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] = (n-1) \cdot [c_1 - c_2] = (n-1) \cdot c$$

$c_i \equiv 1/R_i$ è la curvatura della lente e c la cosiddetta *curvatura netta* della lente. Da questa relazione si vede come mantenendo c costante, le curvature c_i delle superfici possono essere variate senza cambiare la focale della lente. Quindi per un fissata focale si possono scegliere le curvature che minimizzano le aberrazioni. La quantità $K = c_1/c_2$ è detta *fattore di forma della lente* ed è molto utilizzata nel disegno delle lenti.

2.3.2 Aberrazioni monocromatiche

La prima aberrazione da controllare è quella sferica (come per le ottiche riflettive). Il suo generico valore angolare è:

$$\theta_{Sph} = \frac{n^2 - (2n + 1) \cdot K + \left[\frac{(n + 2)}{n} \right] \cdot K^2}{32(n - 1)^2 \cdot (F / \#)^3} \text{ Controllare!}$$

Esercizio 2.5

Trovare le curvature di una lente sottile che dia aberrazione sferica minima.

Soluzione:

Differenziando la relazione e risolvendo in K si trovano R_1 e R_2 che danno la minima sferica:

$$R_1 = f \cdot \frac{2(n + 2) \cdot (n - 1)}{n(2n + 1)} \quad e \quad R_2 = f \cdot \frac{2(n + 2) \cdot (n - 1)}{n(2n - 1) - 4}$$

Il valore angolare della sferica minima è:

$$\theta_{Sph}^{min} = \frac{n \cdot (4n - 1)}{128(n - 1)^2 \cdot (n + 2) \cdot (F / \#)^3}$$

Analogamente le relazioni per coma ed astigmatismo valgono (sempre in termini di aberrazioni angolari):

$$\mathcal{G}_{Ccoma} = \frac{\psi}{16 \cdot (n + 2) \cdot (F / \#)^2} \quad e \quad \mathcal{G}_{Ast} = \frac{\psi^2}{2 \cdot (F / \#)} \text{ Controllare!}$$

che sono identiche a quelle già descritte per le ottiche riflettive.

2.3.3 Aberrazione cromatica

Siccome l'indice di rifrazione n varia al variare della lunghezza d'onda, le relazioni su scritte valgono solamente ad una determinata lunghezza d'onda. Scegliendo di operare in un intervallo fissato, fra λ_1 e λ_2 , ponendo $n(\lambda_1) \equiv n_1$, $n(\lambda_2) \equiv n_2$, $f_1 \equiv f(\lambda_1)$ ed $f_2 \equiv f(\lambda_2)$, si ha che $1/f_1 = (n_1 - 1) \times c$ ed $1/f_2 = (n_2 - 1) \times c$ hanno valori diversi. La differenza fra f_1 e f_2 viene chiamata *aberrazione cromatica longitudinale* e vale $|f_2 - f_1| = f \times (|n_1 - n_2|)/(n - 1)$, con $n \equiv n[\langle \lambda \rangle]$ indice di rifrazione a metà del *range* spettrale ed $f \equiv f[\langle \lambda \rangle]$ la focale corrispondente. La quantità $(n - 1)/(n_1 - n_2)$ è chiamata numero di Abbe (ν). Il *blur* associato ad una determinata aberrazione cromatica longitudinale è detto aberrazione cromatica trasversale e vale (angolarmente)

$$\mathcal{G}_{Chrom} = \frac{1}{2\nu_{Abbe} \cdot (F / \#)} \text{ Controllare!}$$

Vetro	Indice di rifrazione (n)	Numero di Abbe (ν)
Ge	4	103
ZnS	2.3	110
Si	3.4	236

Esercizio 2.6

Trovare le aberrazioni monocromatiche principali e quella cromatica per una lente in silicio, da utilizzarsi fra 3 e 5 μm , di focale 100 mm, diametro 50 mm che deve lavorare sino ad un angolo fuori asse di 5.7 gradi. Si consideri l'indice medio di rifrazione $n = 3.4254$ ed $\nu = 235.5$.

Soluzione

Si trovano gli R_1 e R_2 di minima sferica: $R_1 = 97.9$ mm e $R_2 = 164.1$ mm. I valori angolari delle aberrazioni sono (in milliradiani): $\theta_{\text{Sph}} = 1.33$, $\theta_{\text{Coma}} = 0.29$, $\theta_{\text{Ast}} = 2.50$, $\theta_{\text{Chrom}} = 1.06$.

2.3.4 Doppietti

Utilizzando due lenti (avendo a disposizione 4 superfici) è possibile controllare un maggior numero di aberrazioni. Si parte sempre dalla correzione della sferica, che è di gran lunga l'aberrazione più importante per lenti con superfici sferiche. In questo caso, fissato un unico indice di rifrazione, le relazioni per i quattro raggi di curvatura sono:

$$\begin{aligned} R_1 &= f \cdot \frac{4(n+2)(n-1)}{n(2n+1)} & R_2 &= f \cdot \frac{4(n+2)(n-1)}{n(2n-1)-4} \\ R_3 &= f \cdot \frac{4(n+2)(n-1)}{n(2n+1)+4(n^2-1)} & R_4 &= f \cdot \frac{4(n+2)(n-1)}{n(2n-1)+4(n^2-2)} \end{aligned}$$

e le aberrazione sferica angolare (minima) e di coma associate valgono:

$$\mathcal{G}_{\text{Sph}}^{\min} = \frac{n[5+4n(n-3)]}{512(n-1)^2(n+2)(F/\#)^3} \quad \mathcal{G}_{\text{Coma}} = \frac{\varphi}{16(n+2)(F/\#)^2}$$

da cui si vede che con due lenti si può azzerare totalmente l'aberrazione sferica, scegliendo $n = 2.5$.

Invece, utilizzando due lenti di indice di rifrazione diverso, si può controllare l'aberrazione cromatica scegliendo la focale della prima lente $1/f_A = (\nu_A/f)/(\nu_A-\nu_B)$ e quella della seconda $1/f_B = (\nu_B/f)/(\nu_B-\nu_A)$, con f la focale equivalente del doppietto mentre ν_A e ν_B sono rispettivamente i numeri di Abbe della prima e della seconda lente.

2.3.5 Effetti termici

La strumentazione ottica per l'infrarosso molto spesso deve lavorare a temperature molto inferiori a quella ambiente. Per tale motivo il controllo degli effetti termici sui parametri delle ottiche deve essere accuratamente studiato. Prendendo in considerazione una sistema di lenti e la sua montatura meccanica, si può descrivere lo spostamento del piano focale di essa (sfuocamento) tramite la relazione:

$$\Delta f = - \left[f^2 \sum_{i=1}^j \left(\frac{C_i}{f_i} \right) + \alpha_H f \right] \Delta T$$

con f focale equivalente del sistema, f_i focale della lente i -esima,

C_i costante termica della lente i -esima:

$$C_i = \frac{dn_i/dT}{n_i-1} - \alpha_i$$

P_i potere dispersivo della lente i-esima:

$$\frac{dn_i / dT}{n_i - 1}$$

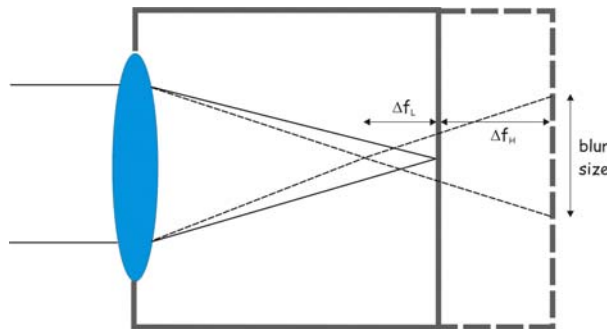
n_i indice di rifrazione della lente i-esima, α_i coefficiente di espansione termica della lente i-esima (CTE) ed α_H coefficiente di espansione termica del montaggio meccanico

Nella seguente tabella sono riportati i valori delle costanti per alcuni vetri comuni per IR. È riportato per paragone anche la costante termica del BK7, un vetro molto utilizzato nel visibile, da cui si vede che essa è negativa. Questo significa che la lunghezza focale del BK7 aumenta all'aumentare della temperatura, al contrario di quello che accade per i più comuni vetri per l'IR.

Vetro	C_i
BK7	-1×10^{-6}
ZnS	25×10^{-6}
ZnSe	36×10^{-6}
Si	60×10^{-6}
Ge	126×10^{-6}
Montatura	α_H
Al	$24.0 \times 10^{-6} \text{ C}^{-1}$
Acciaio (1015)	$12.0 \times 10^{-6} \text{ C}^{-1}$
Invar 36	$1.3 \times 10^{-6} \text{ C}^{-1}$

Esercizio 2.7

Considerando la figura successiva Si trovi il diametro dello spot di sfuocamento per una lente in Germanio di focale 100 mm e diametro 25 mm montata su un supporto di Alluminio, prodotto da una variazione di temperatura di $+20 \text{ }^\circ\text{C}$



Soluzione

Si applica la relazione su scritta tenendo conto che $j = 1$ (abbiamo un solo elemento) quindi $f_i = f$. Si ottiene $\Delta f = -f (C + \alpha_H) \Delta T$, e quindi $\Delta f = -100 (126 + 24) 10^{-6} 20 = -0.0252 - 0.048 = -0.3 \text{ mm}$, dove -0.252 mm è la variazione della lunghezza focale dovuta solo al vetro della lente, mentre -0.048 mm è la variazione della lunghezza focale dovuta solo al montaggio meccanico. Lo spot dovuto allo sfuocamento ha un diametro pari ad $\Delta f / F / \# = 0.075 \text{ mm}$ che è un valore molto alto.

Un primo passo per atermalizzare il sistema è quello di utilizzare un doppietto con due vetri con diverso costante termica (analogamente al caso del cromatismo). In questo caso la relazione diventa:

$$\Delta f = -f \left[f \left(\frac{C_A}{f_A} + \frac{C_B}{f_B} \right) + \alpha_H \right] \Delta T$$

con A la lente frontale e B quella successiva. La condizione atermica si ha per $\Delta f = 0$ e le focali delle due lenti devono essere:

$$f_A = \frac{C_B - C_A}{C_B + \alpha_H} f \quad e \quad f_B = \frac{C_A - C_B}{C_A + \alpha_H} f$$

Questo doppietto ovviamente funziona solamente ad una lunghezza d'onda ed è quindi utile per applicazioni monocromatiche (come ad esempio applicazioni laser), ma per *imaging* deve essere reso anche acromatico. Le condizioni da soddisfare diventano:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{f} = \sum_{i=1}^j \frac{1}{f_i} \\ \sum_{i=1}^j \left(C_i \frac{1}{f_i} \right) = -\alpha_H \frac{1}{f} \\ \sum_{i=1}^j \left(\frac{1}{f_i v_i} \right) = 0 \end{array} \right.$$

Per tre lenti:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{\frac{1/v_1}{1/v_3 - 1/v_1} - \frac{C_1 + \alpha_H}{C_3 - C_1}}{\frac{1/v_1 - 1/v_2}{1/v_3 - 1/v_1} - \frac{C_1 - C_2}{C_3 - C_1}} \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{f_3} = \frac{1/v_1 - 1/v_2}{1/v_3 - 1/v_1} \frac{1}{f_2} - \frac{1/v_1}{1/v_3 - 1/v_1} \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{f} - \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_3}$$

2.4 Stop e pupille di un sistema ottico

Il sistema ottico più semplice è formato da un singolo rivelatore di radiazione.

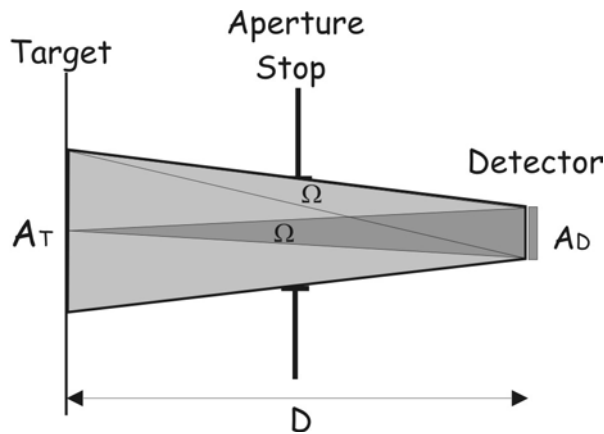


Fig. 2.9: Energia raccolta da un rivelatore in un sistema ottico basilare.

La sorgente (*target* in Fig. 2.9) emette con una radianza di corpo nero [Watt m⁻² sr⁻¹]. L'energia emessa da un elemento di superficie della sorgente e che cade sul rivelatore è limitata dall'angolo solido con cui quest'ultimo è visto dalla sorgente stessa ($\Omega = A_D/D^2$). L'area totale emittente interessata (A_T) viene selezionata dallo stop di apertura che limita appunto l'area di sorgente vista dal rivelatore di area A_D . Si definisce *etendue* del sistema la quantità $\Gamma = A_T \Omega$. Se la radianza angolare della sorgente è L [Watt m⁻² sr⁻¹], allora la potenza che raccoglie il rivelatore vale $L \Gamma$.

È importante sottolineare che $A_T \Omega = A_D \Omega'$ (*commutazione Γ*) con Ω' l'angolo solido con cui A_D vede l'area A_T ($\Omega' = A_T/D^2$): $\Gamma = A_T \Omega = A_D \Omega'$.

Un sistema ottico agisce in maniera da distribuire in modo diverso l'energia proveniente dalla sorgente, come mostrato in Fig 2.10. Qui l'area del rivelatore rimane uguale al sistema precedente, ma l'area vista da esso (A_T) è diversa. Se i due piani contenenti la sorgente e il rivelatore sono otticamente coniugati (sono posti nei piani focali della lente), allora il rapporto fra le due aree A_D e A_T è pari alla magnificazione della lente.

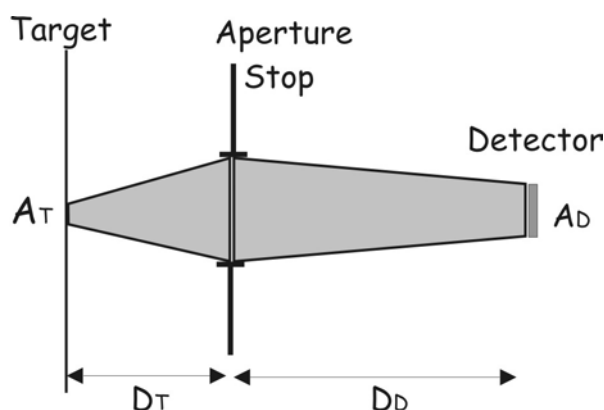


Fig. 2.10: Una lente redistribuisce l'energia proveniente dalla sorgente A_T .

La conservazione dell'energia implica che i fattori Γ siano uguali a sinistra e a destra della lente: $A_T \Omega_{AST} = A_D \Omega_{ASD}$, dove $\Omega_{AST} = A_{AS} / D_T^2$ e $\Omega_{ASD} = A_{AS} / D_D^2$ con A_{AS} area dello stop di apertura (la lente in questo caso), D_T e D_D sono, rispettivamente, le distanze dallo stop di apertura della sorgente e del rivelatore, Ω_T e Ω_D sono gli angoli solidi sottesi dallo stop alla distanza della sorgente e del rivelatore. Dalla commutazione Γ si ha

$$A_T \Omega_{AST} = A_{AS} \Omega_{TAS} = A_D \Omega_{ASD} = A_{AS} \Omega_{DAS},$$

con Ω_{TAS} e Ω_{DAS} gli angoli solidi sotto cui, rispettivamente, l'oggetto T ed il rivelatore D vedono lo stop di apertura AS. La relazione è molto importante ai fini pratici dato che permette di calcolare il flusso radiante o incidente a seconda dei parametri che si hanno a disposizione.

Nel sistema più generale possibile lo stop potrebbe essere un elemento presente in un insieme di ottiche anche molto complicato. In questo caso la conservazione dell'energia si propaga attraverso le due pupille d'ingresso e d'uscita (vedi Fig. 2.11):

$$A_T A_{EnP}/D_{EnP}^2 = A_T \Omega_{EnP} = A_D A_{Exp}/D_{Exp}^2 = A_D \Omega_{Exp}$$

Con ovvio significato dei simboli.

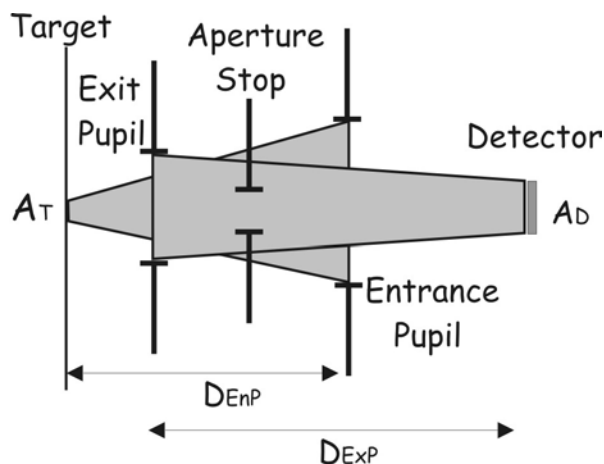


Fig. 2.11: Pupille e Stop di Apertura.

L'energia per unità di tempo che entra nel sistema vale $L A_T \Omega_{EnP}$, ed è la stessa che entra nel rivelatore (a parte le efficienze varie del sistema ed altri effetti che sono argomento del prossimo capitolo).

Quindi in un sistema ottico di qualsiasi complessità, la quantità di luce che, partendo da un punto oggetto, raggiunge il piano focale nel corrispondente punto immagine è definita da un elemento fisico interno al sistema. Questo elemento ottico è uno e uno solo per ciascun sistema. Lo stop d'apertura limita quindi il fascio angolare di raggi che raggiungono il piano focale. Il raggio che passa attraverso il centro dello stop d'apertura è chiamato raggio principale, mentre quello che passa per il suo bordo è chiamato raggio marginale. I raggi principale e marginale sono caratteristici per ogni punto oggetto. L'immagine dello stop d'apertura formata dalla parte del sistema che precede lo stop (ricordiamo che lo stop è sempre un oggetto fisico reale) è chiamata pupilla d'ingresso, mentre l'immagine dello stop formata dalla parte di sistema che succede lo stop è detta pupilla d'uscita. I concetti di stop e pupilla sono fondamentali per progettare un sistema ottico di qualità. Nel caso di sistemi ottici per l'infrarosso essi acquisiscono una importanza anche maggiore, legato al controllo della radiazione di fondo, che risulta particolarmente dannosa a queste lunghezze d'onda.

Vediamo ora come si fa a identificare lo stop d'apertura del sistema. Va sottolineato che lo stop può essere una lente oppure un diaframma. Il sistema ottico in Fig. 2.12 è costituito da due lenti e un diaframma. Il primo passo è quello di identificare lo stop di apertura del sistema. Per fare questo si devono fare le immagini di ogni elemento formate dagli elementi che lo precedono, come mostrato in Fig. 2.13:

1. L'immagine dell'elemento 1 è esso stesso essendo che nessun elemento ottico lo precede.
2. L'immagine del diaframma si forma ad una distanza q_D dalla lente L_1 : $q_D = f_1 L_2 / (L_2 - f_1)$ con un ingrandimento $m_D = f_1 / (L_2 - f_1)$.
3. L'immagine della lente L_2 si forma ad una distanza $q_2 = f_1 (L_2 + L_3) / (L_2 + L_3 - f_1)$ dalla lente L_1 , con un ingrandimento $m_2 = f_1 / (L_2 + L_3 - f_1)$.

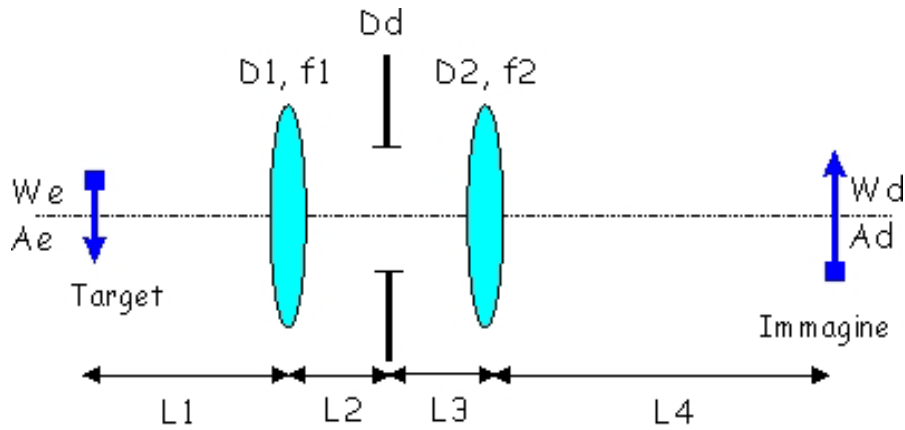


Fig. 2.12: Sistema con due lenti e un diaframma.

Il passo successivo è quello di determinare quale dei tre elementi limita l'angolo di accettazione dei raggi; per fare questo si identificano gli angoli sottesi dai raggi incidenti da ognuna delle immagini determinate al punto precedente, ovvero si identificano gli angoli θ_1 , θ_2 e θ_D , come si vede in Fig. 2.13. Questi valgono

$$\theta_1 = 2 \arctan \frac{D_1}{2L_1}, \quad \theta_D = 2 \arctan \frac{D_D m_D}{2} \frac{1}{L_1 + |q_D|}, \quad \theta_2 = 2 \arctan \frac{D_2 m_2}{2} \frac{1}{L_1 + |q_2|}$$

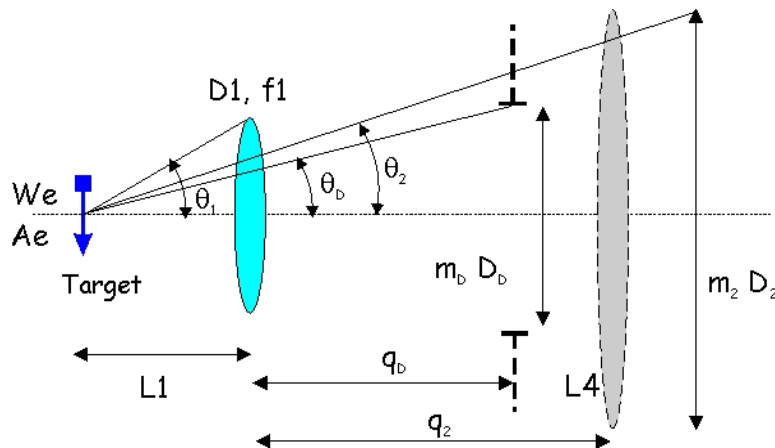


Fig. 2.13: Come la sorgente vede il sistema ottico di Fig 2.12

L'elemento (L_1 , L_2 o D) che sottende l'angolo minore rappresenta lo stop di apertura ed è quello che limita l'ammontare di energia che il sistema ottico è in grado di raccogliere dalla scena (in Fig. 2.13 è θ_D , ovvero il diaframma rappresenta lo stop di apertura).

L'immagine dello stop di apertura fatta dal sistema che lo precede è detta pupilla d'ingresso (da essa passa l'energia in ingresso al sistema per ogni punto del campo di vista). L'immagine dello stop di apertura fatta dal sistema che lo segue è detta pupilla d'uscita (anche da essa passa tutta l'energia che verrà a cadere sul piano focale per ogni punto del campo di vista).

Per un telescopio astronomico la distanza della pupilla d'uscita dal piano focale del telescopio è (vedi Fig. 2.14).

$$\delta = \frac{m^2 k}{m + k - 1} = \frac{m^2 (1 + \beta)}{m^2 + \beta}$$

mentre il diametro è definito dall'ingrandimento del sistema $m = q/D_{M1M2}$.

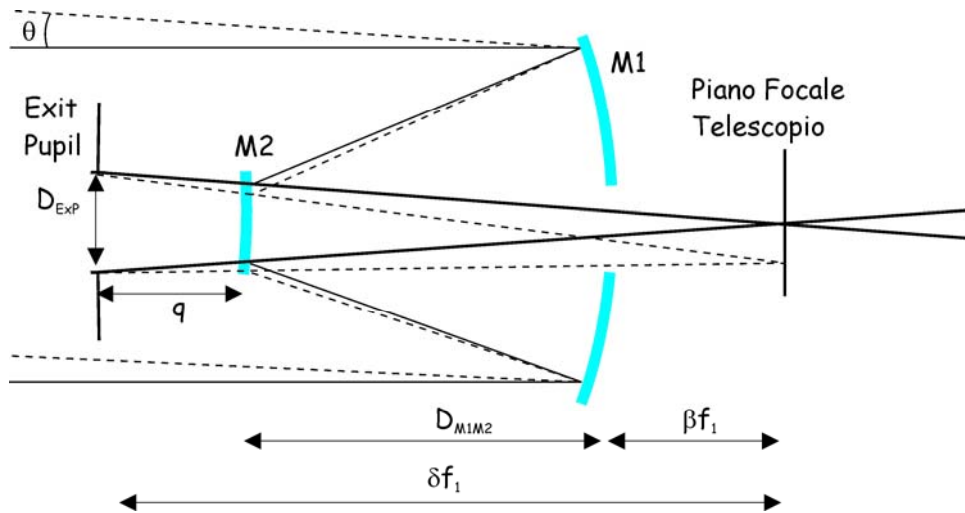


Fig. 2.14: Pupilla d'uscita di un telescopio astronomico.

Esercizio 2.8

Calcolare il diametro della pupilla d'uscita del TNG sapendo che la distanza fra M_1 e M_2 è 5933 mm.

Soluzione

Lo stop d'apertura è lo specchio primario ($D_1 = 3500$ mm). L'immagine di esso fatta da M_2 ($f_2 = -2208$ mm) è ad una distanza da M_2 pari a $1/q = 1/f_2 - 1/p = 1/(-2208) - 1/5933 \Rightarrow q = -1609.15$ mm ed essendo negativa è virtuale e giace oltre il secondario, come si vede in Fig. 2.14. La distanza fra il piano focale del telescopio e la pupilla d'uscita è $f_{EXP} = q + D_{M1M2} + \beta f_1 = 1609.15 + 5933 + 2900 = 10442$. Oppure, $\delta = 1.3563$ e $\delta f_1 = 10442$ mm. La magnificazione della pupilla d'ingresso operata dal secondario è $m = -1609.15/5933 = -0.27$ e la dimensione della pupilla d'uscita è quindi $D_{EXPup} = 3500 \cdot 0.27 = 949.2$ mm.

Esercizio 2.9

Trovare gli angoli solidi sottesi dalla pupilla d'uscita del telescopio e dal secondario ($D_{M2} = 805$ mm) per l'immagine in asse al piano focale del TNG.

Soluzione

La pupilla d'uscita sottende un angolo solido $\Omega_{EXP} = A_{EXP} / f_{EXP}^2 = \pi \cdot 318.8^2 / 10442^2 = 6.5 \cdot 10^{-3}$ sr. Per il secondario $\Omega_{M2} = A_{M2} / d_{PF-M2}^2 = \pi \cdot 418^2 / 8833^2 = 7.0 \cdot 10^{-3}$ sr.

Esercizio 2.10

Si faccia una immagine reale in luce collimata e di diametro 50 mm della pupilla d'ingresso del TNG (apertura focale $F/11$, $f_{TEL} = 38500$ mm, $D_{M1} = 3500$ mm)

Soluzione

Per fare una immagine della pupilla in luce collimata usiamo un collimatore di focale f_{COLL} posto ad una distanza $d = f_{COLL}$ dal fuoco del telescopio. Siccome l'apertura del fascio al piano focale è $F/11$, per avere un fascio collimato di 50 mm la focale del collimatore deve essere $f_{COLL} = 50 \cdot 11 = 550$ mm.

Adesso il fascio è collimato e di diametro 50 mm. La distanza fra il collimatore e la pupilla di uscita del telescopio è $p = \delta f_1 + f_{COLL} = 10442 + 550 = 10992$ mm. L'immagine di D_{EXPup} si forma ad una distanza dal collimatore seguendo la regola geometrica $1/p + 1/q = 1/f_{COLL}$: $1/10992 + 1/q = 1/550$ da cui $q = 579$ mm. La magnificazione è $m = 579/10992 = 0.053$ ed il diametro dell'immagine di D_{EXPup} (che è la pupilla d'ingresso del collimatore) è: $D_{pup} = m \cdot D_{EXPup} = 33.80$ mm. (< 50 mm = dimensione del fascio collimato). In sostanza, la luce collimata in un anello circolare di diametro minimo = 33.80 mm e diametro massimo = 50 mm proviene solo dalle ottiche del telescopio. Essa può essere eliminata inserendo uno stop di apertura nella pupilla di uscita del collimatore ($q = 579$ mm) che abbia dimensione pari alla dimensione della pupilla di uscita del collimatore ($D_{pup} = 33.80$ mm).

2.4.1. Cold Stop

L'angolo solido sotteso dallo specchio secondario al piano focale di un telescopio classico è maggiore di quello sotteso dal primario. Il risultato in termini di contaminazione termica può essere anche di notevole portata. Come si vede dalla seguente in Fig. 2.15, la radiazione termica proveniente dal secondario, che è a temperatura ambiente, entra nel fascio collimato e contribuisce come rumore alla radiazione rivelata. Per ovviare questo si usa porre uno stop di apertura sulla pupilla re-immaginata del telescopio. Ovviamente questo stop emette a sua volta radiazione termica e quindi se fosse a temperatura ambiente il problema non verrebbe risolto. In genere quindi si raffredda lo stop (assieme a tutto lo strumento) e per questa ragione è chiamato stop freddo (*cold stop*).

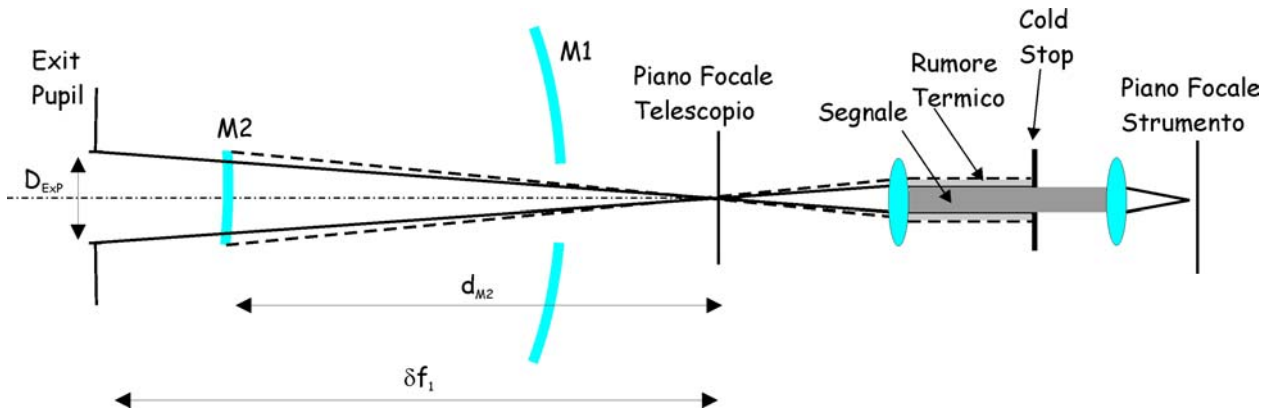


Fig. 2.15: Cold Stop.

3. Prestazioni di un sistema ottico

3.1 Rapporto segnale-rumore

Il rapporto segnale rumore (SNR – *signal to noise ratio*) è uno dei principali parametri di caratterizzazione delle prestazioni di un sistema ottico. Abbiamo già visto come il segnale sia determinato dalla radianza spettrale della sorgente (l'oggetto in Fig. 2.1). Il rumore che contribuisce alla radianza che inciderà sul rivelatore può essere costituito da:

1. Il rumore di fondo (*background noise*),
2. Il rumore generato dal sistema di rivelazione (intrinseco al rivelatore ed al suo sistema di lettura).

Il rumore di fondo è costituito principalmente da:

1. La fluttuazione statistica nella radianza sorgente,
2. L'emissione del mezzo interposto fra l'oggetto ed il sistema ottico (ad es. l'atmosfera),
3. L'emissione termica del sistema ottico stesso,
4. La luce diffusa che incide sul piano focale ma che non proviene dal cammino ottico di interesse (*stray light*),

Inoltre nel calcolo della radianza che un sistema ottico è in grado di concentrare al suo piano focale bisogna tenere conto delle seguenti deviazioni dal modello basilare:

1. Trasmissione del mezzo interposto fra sorgente e rivelatore (es. l'atmosfera),
2. Trasmissione delle ottiche,
3. L'efficienza del rivelatore.

Il flusso raccolto al piano focale da un sistema per un oggetto all'infinito vale:

$$\Phi = W(\lambda, T) \cdot \tau_{ATM} \cdot \tau_{OPT} \cdot QE_{DET} \cdot \Delta\lambda \cdot A_T \cdot \Omega_{ENP} \Leftrightarrow \Phi = W(\lambda, T) \cdot \tau_{ATM} \cdot \tau_{OPT} \cdot QE_{DET} \cdot \Delta\lambda \cdot \Gamma$$

$W(\lambda, T)$ è la radianza angolare spettrale (funzione di Planck), misurata in $[\text{Watt m}^{-2} \text{sr}^{-1} \mu\text{m}^{-1}]$, *etendue* del sistema ottico, QE_{DET} efficienza quantica del rivelatore (considerando ad es. un rivelatore a stato solido), τ_{ATM} e τ_{OPT} , rispettivamente, le trasmissività dell'atmosfera e delle ottiche, $\Delta\lambda$ la banda spettrale passante (limitata ad es. da un filtro). La relazione su scritta vale anche per il rumore di fondo (termico) come spiegato al paragrafo 3.2.

La $W(\lambda, T)$ è stata descritta estensivamente nel paragrafo 1.4.1. Γ è stato descritto nel paragrafo 2.4. $\Delta\lambda$ rappresenta l'integrale fra λ_1 e λ_2 della $W(\lambda, T)$, con λ_1 e λ_2 lunghezze d'onda minima e massima del filtro passa banda. L'efficienza quantica del rivelatore QE non la tratteremo in questi appunti, comunque si può considerare un valore fra 0.6 e 0.9 a seconda del rivelatore utilizzato e della lunghezza d'onda (o della banda spettrale passante) di interesse. Invece, daremo alcuni cenni sulle quantità τ_{ATM} e τ_{OPT} e sul rumore intrinseco (statistico) associato alla $W(\lambda, T)$.

3.2 Rumore

Chiamiamo *segnale* la radiazione dell'oggetto che si vuole identificare mediante una tecnica di rivelazione e *rumore* ogni altra distribuzione di flusso radiante esterno all'apparato di rilevazione e che interferisce con il processo di rivelazione dell'oggetto, che chiameremo *target*. Un oggetto può essere definito come *target* oppure come *background*, a seconda del punto di vista dell'osservatore. Ad esempio, il motore caldo di una automobile può essere il *target* da essere identificato oppure può essere considerato come *rumore di background* se si vuole identificare il contorno del cofano della stessa automobile.

In questo senso quindi l'oggetto da identificare ed il rumore di fondo ad esso associato possono essere descritti dalle medesime leggi. La potenza radiante sia dal target che dal fondo viene descritta dalle leggi di corpo nero.

3.2.1 Fluttuazione statistica della sorgente

La più basilare sorgente di rumore è data dalla natura quantistica della luce. I fotoni arrivano sullo strumento che deve misurarli in maniera stocastica (temporalmente e spazialmente). La probabilità di arrivo è descritta dalla statistica di Poisson, la cui distribuzione possiede una deviazione standard pari a $n^{1/2}$ (n numero medio di fotoni coinvolti nella misura per unità di tempo). In questo modo il segnale risulterà fluttuante attorno al suo valore medio con una statistica descritta appunto dalla probabilità Poissoniana. C'è ancora da accennare al fatto che per alte densità fotoniche, la statistica che meglio descrive la fluttuazione è quella di Bose-Einstein. Comunque questa prende il sopravvento su quella di Poisson solamente (in termini pratici) alle lunghezze d'onda radio e per l'infrarosso si può considerare questa ultima come la statistica appropriata.

3.2.2 Emissione del cielo

La radiazione emessa dall'atmosfera è di particolare importanza per applicazioni astronomiche. Tale emissione rappresenta una causa di *rumore* per queste applicazioni. Nell'infrarosso tale emissione è causata principalmente dallo scattering della radiazione solare e dall'emissione stessa da parte dei costituenti dell'atmosfera.

I valori dell'emissione per scattering della luce solare possono variare anche di molto a seconda delle condizioni atmosferiche.

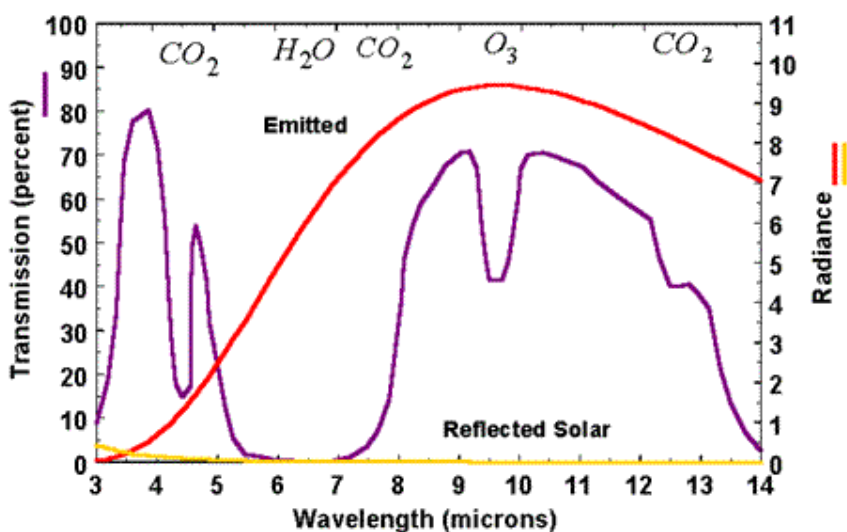


Fig. 3.1: Emissione e scattering solare atmosferici.

Sono state sviluppate alcune tecniche per ridurre il rumore dovuto all'emissione atmosferica che si basano sulla sottrazione di quest'ultimo alla misura. Una di queste consiste nell'osservare in veloce successione

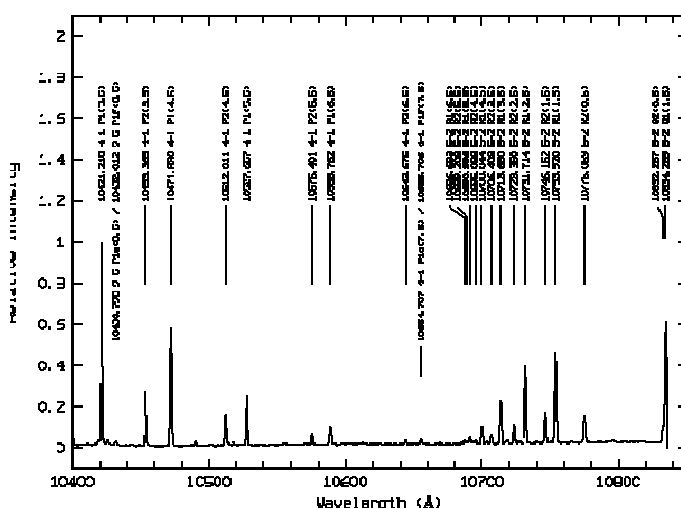


Fig. 3.2: Emissione da parte delle righe OH atmosferiche nel NIR.

(qualche secondo) la sorgente e il cielo vicino, mediante uno spostamento veloce del puntamento dello strumento (tecnica chiamata *chopping*). Sottraendo le due immagini si ottiene la misura del flusso dovuto alla sorgente. Il disturbo maggiore a questa tecnica è dato dal forte contributo all'emissione atmosferica nel vicino IR da parte delle molecole OH. Questo contributo risulta particolarmente fastidioso poiché è altamente variabile temporalmente, con frequenza che può essere superiore a quella di *chopping*. Dato che

questo problema è particolarmente assillante per osservazioni astronomiche, è importante conoscere la posizione spettrale di tali righe OH.

3.3 Trasmissione del mezzo

Consideriamo la trasmissione dell'atmosfera e quella delle ottiche nell'IR.

3.3.1 Trasmissione atmosferica (τ_{ATM})

Come si vede dalla seguente Fig. 3.3 l'atmosfera possiede alcune finestre alle cui lunghezze d'onda è possibile osservare nell'IR. Inoltre, è possibile vedere che esiste un'ampia finestra da cui è possibile osservare nel radio, mentre si vede che essa è opaca nelle regioni dell'estremo UV e dei raggi X soffici.

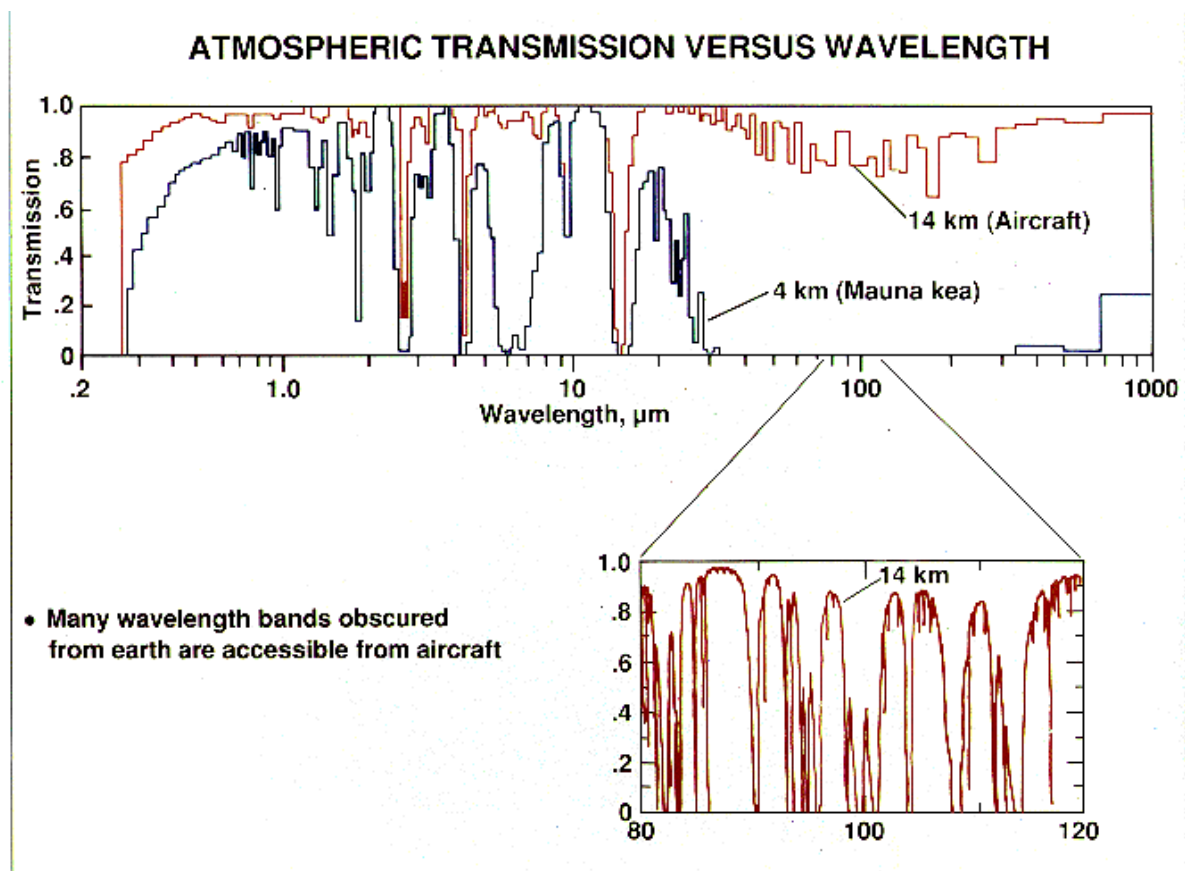


Fig. 3.3: Trasmissione dell'atmosfera nel IR

3.3.2 Trasmissione delle ottiche (τ_{OPT})

I materiali ottici utilizzabili nell'IR sono ovviamente diversi a quelli che utilizzati solitamente nel visibile. Nella tabella sottostante sono riportate le bande di trasmissioni dei vetri più comunemente utilizzati nell'IR, ordinati per intervalli spettrali.

Transmission range < 5 μm	
Fused Silica (IR Grade) (SiO ₂)	0.25-3.5
Lithium Fluoride (LiF)	0.12-5
5 μm < Transmission range < 10 μm	
Calcium Fluoride (CaF ₂)	0.13-7
Magnesium Fluoride (MgF ₂)	0.12-7
Silicon (Si)	1.2-7
10 μm < Transmission range < 20 μm	
Barium Fluoride (BaF ₂)	0.15 – 12.5
AMTIR-1	1 – 14
Cleartran™ (ZnS, Multi-spectral)	0.4-12
Gallium Arsenide (GaAs)	2-15
Germanium (Ge)	2-14
Potassium Chloride (KCl)	0.21-20
Sodium Chloride (NaCl)	0.2-20
Zinc Selenide (ZnSe)	0.6-16
Zinc Sulfide (ZnS) - Regular Grade	3-12
Transmission range > 20 μm	
Cadmium Telluride (CdTe)	1-25
Cesium Bromide (CsBr)	0.22-55
Cesium Iodide (CsI)	0.25-55
Potassium Bromide (KBr)	0.23-25
Thallium Bromoiodide (KRS-5)	0.6-40

La principale fonte di perdita per trasmissione è data dalla riflessione alla superficie delle lenti. In pratica il coefficiente r definito nel paragrafo 1.4 ha valori non trascurabili, dipendenti dalla differenza di indice di rifrazione fra i due mezzi. Per radiazione ad incidenza normale il coefficiente r segue la *relazione di Fresnel*:

$$r = \left(\frac{n - 1}{n + 1} \right)^2$$

che rimane una buona approssimazione fino ad angoli di incidenza di 45 gradi. Trascurando l'assorbimento il coefficiente di trasmissione t vale:

$$t = 1 - r = \frac{4n}{(n + 1)^2}$$

Materiali ad alto indice di rifrazione producono notevoli perdite per riflessione e devono essere opportunamente trattati con *coating* antiriflettenti. Ad esempio uno obiettivo zoom per visibile formato da dieci lenti (venti superfici) in BK7 ($n = 1.5$) produce una $\tau_{OPT} = 44\%$. Questa è una trasmissività comparabile con quella di una singola lente in germanio ($n = 4$): 41%. Nella Fig. 3.4 è mostrato il concetto di un *coating* antiriflettente (*layer coating* o *AR-coating*). Affinché la differenza di fase sia corretta per produrre interferenza distruttiva fra il materiale di indice di rifrazione n_0 e n_F e costruttiva nell'interfaccia fra n_F e n_S (F = film, S = substrato) deve essere rispettata la condizione:

$$n_F = \sqrt{n_S n_0}$$

in questo modo il film sottile (AR-coating) deve avere spessore t_F tale che:

$$n_F t_F = \lambda / 4$$

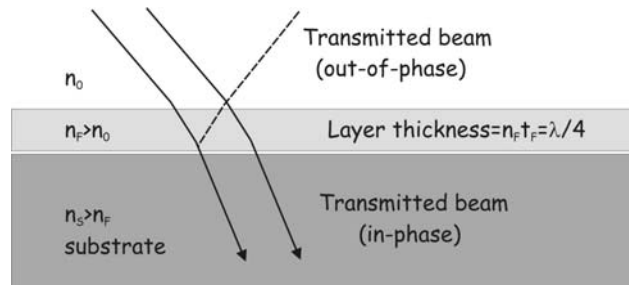


Fig. 3.4: Layer coating.

3.4 Rivelazione della radiazione IR

Tipicamente un rivelatore di radiazione converte l'energia radiante che incide su di esso in un segnale elettrico che può essere misurato con un apparato di misura.

I più comuni rivelatori di radiazione IR possono essere essenzialmente divisi in due gruppi distinti: i rivelatori termici e i rivelatori di fotoni.

3.4.1 Rivelatori termici

Un tipico rivelatore termico assorbe l'energia radiante, la quale causa un cambiamento delle proprietà elettriche del materiale di cui esso è composto. La risposta (corrente elettrica o differenza di potenziale) varia al variare della temperatura della sorgente osservata e può essere amplificata e misurata in vari modi.

Tipici rivelatori termici sono: termocoppie, termopile, bolometri, piroelettrici, e altri.

La caratteristica principale e positiva di questo tipo di rivelatori è che essi possiedono una risposta costante a tutte le lunghezze d'onda. Questo permette di ottenere rivelatori stabili che possono operare in un grande intervallo di temperatura ed inoltre facilitano le operazioni di calibrazione della misura, che non necessita dei sofisticati metodi di trattamento del segnale che si hanno in altri rivelatori. Un altro aspetto positivo e non trascurabile di questo tipo di rivelatori è che essi possono operare senza essere raffreddati.

Le controindicazioni più comuni sono la loro relativa lentezza nella risposta (dell'ordine dei millisecondi) e la loro bassa efficienza, che può essere anche due ordini di grandezza minore rispetto a quella dei rivelatori di fotoni.

3.4.2 Rivelatori di fotoni

Un rivelatore di fotoni sfrutta l'effetto foto conduttivo che è di tipo quantistico (*photon- or quantum-detectors*): i fotoni incidenti producono delle cariche libere (elettroni) che passano nella banda di conduzione del materiale. Questo effetto cambia le caratteristiche elettriche del materiali e tali elettroni possono essere letti con una apposita elettronica, detta elettronica di lettura (*read-out electronics*). Nel visibile i tipici rivelatori di questo tipo sono i Charge Couple Device (CCD).

Questi tipi di rivelatori sono più veloci nella risposta rispetto a quelli termici, con tempi di reazione dell'ordine dei microsecondi. La loro sensibilità è inoltre notevolmente superiore a quest'ultimi, come già menzionato. Questi rivelatori devono essere raffreddati poiché la temperatura ambiente è sufficiente a creare un gran numero di salti elettronici nella banda di conduzione, i quali producono un notevole rumore (rumore termico o *thermal noise*) che può rendere impossibile la misura.

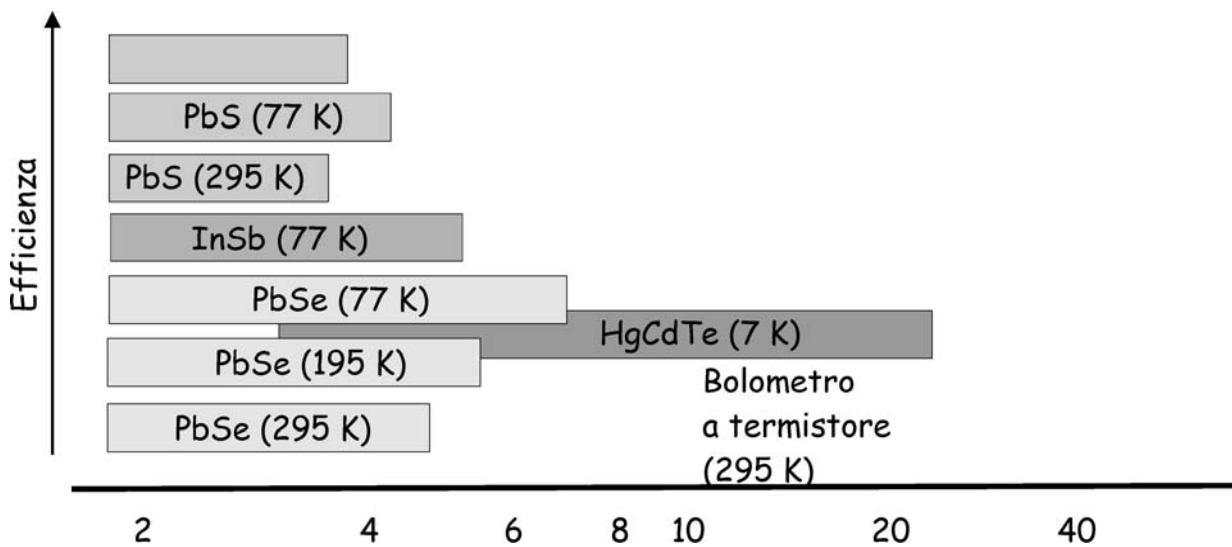
A seconda delle prestazioni di cui si hanno bisogno si possono utilizzare dei raffreddatori termoelettrici mono- o multi-stadio (*Peltier*), oppure dei speciali contenitori sotto vuoto che vengono riempiti con azoto o con elio liquidi (*Dewars*). Ultimamente si possono raggiungere temperature criogeniche comparabili con

quelle di questi due gas anche mediante degli apparati detti *cryo-cooler*, che sono sostanzialmente dei frigoriferi ad alta efficienza.

I tipi più comuni di materiale che si usa nell'IR per costruire questo tipo di rivelatori sono PbS (solfuro di piombo), PbSe (seleniuro di piombo), InSb (antimoniuro d'indio), HgCdTe (mercurio cadmio tellurio).

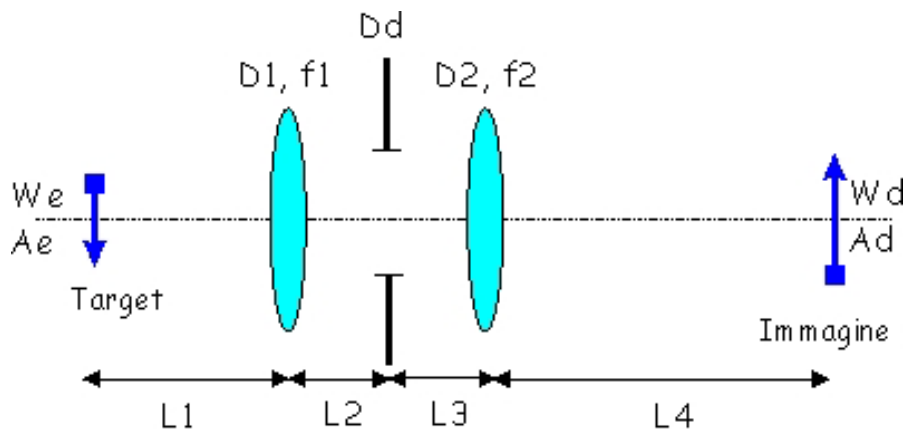
Quando una serie di questi rivelatori sono posti in una matrice (come i pixel in un CCD) essi prendono il nome di FPA (*focal plane array*). Un vantaggio ovvio nell'operare sugli FPA anziché su di un singolo rivelatore con un meccanismo di *scanning* (rivelazione *scanners*) è quello di poter ottenere informazione spaziale senza appunto avere parti in movimento (rivelazione *stareers*), e in maniera simultanea su tutto il campo di vista. Operando con FPA invece che con singoli rivelatori più *scanning* è necessario avere un migliore sistema ottico per la correzione delle aberrazioni fuori campo, le quali sono assenti nei ultimi.

Con l'avvento e la diffusione degli FPA lo studio dell'ottica e della criogenia nei sistemi IR rivestono un maggiore peso rispetto ai sistemi precedentemente utilizzati.



3.4.3 Calcolo del rapporto segnale-rumore per un sistema ottico reale

Consideriamo di avere a disposizione un filtro ideale di banda passante $\Delta\lambda = 0.1 \mu\text{m}$ con trasmissione 1 all'interno di questo intervallo e 0 al di fuori di esso.



Sia $T = 300 \text{ [K]}$, $D_1 = 2 \text{ [cm]}$, $f_1 = 10 \text{ [cm]}$, $D_2 = 2 \text{ [cm]}$, $f_2 = 20 \text{ [cm]}$, $D_D = 1 \text{ [cm]}$, $A_d = 0.5 \text{ [cm}^2\text{]}$.
 $L_1 = 10 \text{ [cm]}$, $L_2 = L_3 = 5 \text{ [cm]}$, $L_4 = 20 \text{ [cm]}$.
 Consideriamo di fare la misura a tre λ diverse = $\lambda_1 = 1 \text{ [}\mu\text{m]}$, $\lambda_2 = 3 \text{ [}\mu\text{m]}$ e $\lambda_3 = 12 \text{ [}\mu\text{m]}$.

Considerando la radianza di Plank, abbiamo che

$$W(1\mu\text{m}, 300\text{K}) = 8.83 \cdot 10^{-14} [\text{Watt m}^{-2} \text{sr}^{-1} \mu\text{m}^{-1}].$$

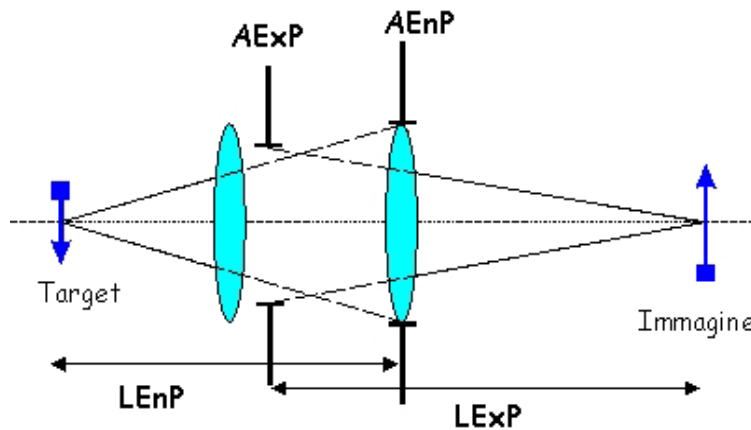
$$W(3\mu\text{m}, 300\text{K}) = 2.8 \cdot 10^{-2} [\text{Watt m}^{-2} \text{sr}^{-1} \mu\text{m}^{-1}].$$

$$W(12\mu\text{m}, 300\text{K}) = 4.5 [\text{Watt m}^{-2} \text{sr}^{-1} \mu\text{m}^{-1}].$$

Si calcolano dimensioni e posizioni delle pupille con le relazioni.

$q_{\text{EnP}} = -10$ [cm] (da cui $L_{\text{EnP}} = 20$ [cm]), $m_{\text{EnP}} = 2$ (da cui $D_{\text{EnP}} = 2$ [cm]), $q_{\text{Exp}} = -6.67$ [cm] ($L_{\text{Exp}} = 26.67$ [cm]), $m_{\text{Exp}}, 1.33$ ($D_{\text{Exp}} = 1.33$ [cm])

La magnificazione del sistema ottico invertito (rivelatore \equiv oggetto, target \equiv immagine) è $m^{-1} = (D_{\text{Exp}}/D_{\text{EnP}}) = 1.5$ e quindi l'area della superficie emittente vista dal rivelatore è: $A_e = m^{-1} A_d = 0.75$ [cm²].



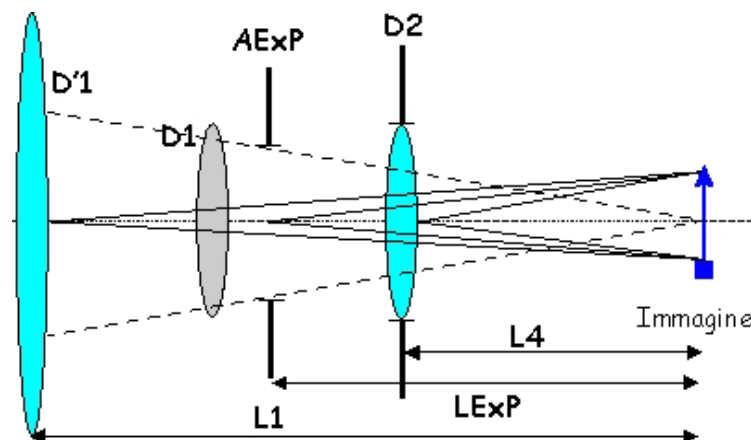
L'angolo solido che il sistema raccoglie è: $A_{\text{enP}}/L_{\text{enP}}^2 = 3.14/20^2 = 7.8 \cdot 10^{-3}$ [sr], quindi l'energia raccolta per unità di tempo dal rivelatore [Watt] è:

$$\Phi_e(1\mu\text{m}, 300\text{K}) = 8.83 \cdot 10^{-14} [\text{Watt m}^{-2} \text{sr}^{-1} \mu\text{m}^{-1}] \cdot 0.1 [\mu\text{m}] \cdot 7.8 \cdot 10^{-3} [\text{sr}] \cdot 0.75 \cdot 10^{-4} [\text{m}^2] = 5.16 \cdot 10^{-21} [\mu\text{Watt}]$$

$$\Phi_e(3\mu\text{m}, 300\text{K}) = 2.8 \cdot 10^{-2} [\text{Watt} \cdot \text{m}^{-2} \text{sr}^{-1} \mu\text{m}^{-1}] \cdot 0.1 [\mu\text{m}] \cdot 7.8 \cdot 10^{-3} [\text{sr}] \cdot 0.75 \cdot 10^{-4} [\text{m}^2] = 1.64 \cdot 10^{-9} [\mu\text{Watt}]$$

$$\Phi_e(12\mu\text{m}, 300\text{K}) = 4.5 [\text{Watt} \cdot \text{m}^{-2} \text{sr}^{-1} \mu\text{m}^{-1}] \cdot 0.1 [\mu\text{m}] \cdot 7.8 \cdot 10^{-3} [\text{sr}] \cdot 0.75 \cdot 10^{-4} [\text{m}^2] = 2.63 \cdot 10^{-7} [\mu\text{Watt}]$$

Dobbiamo considerare che anche le lenti emettono. Consideriamo che le emissività delle lenti siano $\epsilon_{L1} = \epsilon_{L2} = 0.1$, mentre l'emissività del diaframma degli altri componenti meccanici costituenti il sistema ottico sia trascurabile. Occorre fare l'immagine di tutti gli elementi ottici che precedono il rivelatore. Ogni elemento ottico deve essere immaginato rispetto a tutte le ottiche che lo seguono.



L'immagine di L_2 rispetto alle ottiche che lo seguono coincide con se stesso. Invece, AS e L_1 sono visti dal rivelatore attraverso D_2 , l'immagine di AS è la pupilla d'uscita con i parametri già calcolati. In questo caso,

dato che AS coincide con il diaframma del sistema ottico e rimanendo nell'ipotesi di trascurabilità di emissione delle parti meccaniche, esso non è considerato nel calcolo dell' emissione delle ottiche.

L'immagine di L₁ tramite L₂ ha i seguenti parametri: q_{L1} = -20 [cm] (L₁ = 20+20 = 40 [cm]) e m_{L1} = 2 (D₁' = 2 D₁ = 4 [cm]). Non tutta l'energia che emette L₁ cade sul rivelatore perché una parte è vignettata dallo stop di apertura (AS).

Questo accade quando l'immagine di un elemento ottico che, rispetto al rivelatore è oltre la pupilla di uscita, ha dimensione maggiore della dimensione della pupilla di uscita stessa.

L'angolo solido dell'immagine di L₁ è: $\Omega(A_{L1}) = A_{L1}'/L_1^2 = 12.57 \text{ [cm}^2\text{]}/40 \text{ [cm}^2\text{]} = 7.85 \cdot 10^{-3} \text{ [sr]}$, però ne viene vista la parte che passa per AS (vedi linea tratteggiata in figura sopra) il cui valore è $\Omega_{\text{Exp}} = A_{\text{Exp}}/L_{\text{Exp}}^2 = 1.95 \cdot 10^{-3} \text{ [sr]}$:

Per il fatto che $\Omega_{\text{Exp}}/\Omega(A_{L1}) < 1$, l'immagine di L₁ che emette sul rivelatore non ha area A_{L1}' ma area Ae(L₁) a cui corrisponde un angolo solido pari ad Ω_{Exp} . Quest'area si calcola nel seguente modo: $Ae(L_1) = AL_1 \cdot \Omega_{\text{Exp}}/\Omega(A_{L1}) = 12.57 \text{ [cm}^2\text{]} (1.9 \cdot 10^{-3} \text{ [sr]}) / 7.85 \cdot 10^{-3} \text{ [sr]} = 3.04 \text{ [cm}^2\text{]}$

L'immagine di L₂ che emette sul rivelatore ha un'area pari ad A_{L2} = 3.14 [cm²]

Gli angoli solidi sotto cui il rivelatore raccoglie l'energia da L₂ e L₁ sono:

$$\Omega_{L2} = Ad/L_4^2 = 0.5 \text{ [cm}^2\text{]} / 20^2 \text{ [cm}^2\text{]} = 1.25 \cdot 10^{-3} \text{ [sr]}$$

$$\Omega_{L1} = Ad/L_1^2 = 0.5 \text{ [cm}^2\text{]} / 40^2 \text{ [cm}^2\text{]} = 3.12 \cdot 10^{-4} \text{ [sr]}$$

Quindi l'energia che raccoglie il rivelatore dagli elementi ottici vale:

$$\Phi_{L2}(1\mu\text{m}, 300\text{K}) = \varepsilon_{L2} (8.83 \cdot 10^{-14} \text{ [Watt m}^{-2} \text{ sr}^{-1} \mu\text{m}^{-1}] \cdot 0.1 \text{ [\mu m]} \cdot 1.25 \cdot 10^{-3} \text{ [sr]} \cdot 3.14 \cdot 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]}) = 0.1 (3.46 \cdot 10^{-21} \text{ [Watt]}) = 3.46 \cdot 10^{-22} \text{ [\mu Watt]}$$

$$\Phi_{L1}(1\mu\text{m}, 300\text{K}) = \varepsilon_{L1} (8.83 \cdot 10^{-14} \text{ [Watt m}^{-2} \text{ sr}^{-1} \mu\text{m}^{-1}] \cdot 0.1 \text{ [\mu m]} \cdot 3.12 \cdot 10^{-4} \text{ [sr]} \cdot 3.04 \cdot 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]}) = 0.1 (8.38 \cdot 10^{-22} \text{ [Watt]}) = 8.38 \cdot 10^{-23} \text{ [\mu Watt]}$$

$$\Phi_{L2}(3\mu\text{m}, 300\text{K}) = \varepsilon_{L2} (2.80 \cdot 10^{-2} \text{ [Watt m}^{-2} \text{ sr}^{-1} \mu\text{m}^{-1}] \cdot 0.1 \text{ [\mu m]} \cdot 1.25 \cdot 10^{-3} \text{ [sr]} \cdot 3.14 \cdot 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]}) = 0.1 (1.10 \cdot 10^{-9} \text{ [Watt]}) = 1.10 \cdot 10^{-10} \text{ [\mu Watt]}$$

$$\Phi_{L1}(3\mu\text{m}, 300\text{K}) = \varepsilon_{L1} (2.80 \cdot 10^{-2} \text{ [Watt m}^{-2} \text{ sr}^{-1} \mu\text{m}^{-1}] \cdot 0.1 \text{ [\mu m]} \cdot 3.12 \cdot 10^{-4} \text{ [sr]} \cdot 3.04 \cdot 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]}) = 0.1 (2.65 \cdot 10^{-10} \text{ [Watt]}) = 2.65 \cdot 10^{-11} \text{ [\mu Watt]}$$

$$\Phi_{L2}(12\mu\text{m}, 300\text{K}) = \varepsilon_{L2} (4.5 \text{ [Watt m}^{-2} \text{ sr}^{-1} \mu\text{m}^{-1}] \cdot 0.1 \text{ [\mu m]} \cdot 1.25 \cdot 10^{-3} \text{ [sr]} \cdot 3.14 \cdot 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]}) = 0.1 (1.77 \cdot 10^{-7} \text{ [Watt]}) = 1.77 \cdot 10^{-8} \text{ [\mu Watt]}$$

$$\Phi_{L1}(12\mu\text{m}, 300\text{K}) = \varepsilon_{L1} (4.5 \text{ [Watt m}^{-2} \text{ sr}^{-1} \mu\text{m}^{-1}] \cdot 0.1 \text{ [\mu m]} \cdot 3.12 \cdot 10^{-4} \text{ [sr]} \cdot 3.04 \cdot 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]}) = 0.1 (4.27 \cdot 10^{-8} \text{ [Watt]}) = 4.27 \cdot 10^{-9} \text{ [\mu Watt]}$$

Come si vede il contributo di L₂ è un ordine di grandezza superiore a quello di L₁. Questo sia per la sua maggiore vicinanza al rivelatore, sia per la presenza di AS che vignetta L₁ (nella realtà questo è fittizio poiché a sua volta AS emette), sia perché l'immagine di L₁ viene formata distante dal rivelatore (questo diminuisce Ω_{L1}).

Esprese in fotoni/s queste quantità diventano $\Phi[\text{ph/s}] = \Phi \text{ [Watt]} / (1.9863 \cdot 10^{-19} \text{ Joule} \times 1/\lambda \text{ [m]})$ e sono mostrate nella seguente tabella riassuntiva:

λ	Φ_e	Φ_{L1}	Φ_{L2}
1 (μm)	5.16 10 ⁻²¹ [μWatt]	8.38 10 ⁻²³ [μWatt]	3.46 10 ⁻²² [μWatt]
1 (μm)	0.026 [ph/s]	4.22 10 ⁻⁴ [ph/s]	1.74 10 ⁻³ [ph/s]
3 (μm)	1.64 10 ⁻⁹ [μWatt]	2.65 10 ⁻¹¹ [μWatt]	1.10 10 ⁻¹⁰ [μWatt]
3 (μm)	2.48 10 ¹⁰ [ph/s]	4.00 10 ⁸ [ph/s]	1.66 10 ⁹ [ph/s]
12 (μm)	2.63 10 ⁻⁷ [μWatt]	4.27 10 ⁻⁹ [μWatt]	1.77 10 ⁻⁸ [μWatt]
12 (μm)	1.60 10 ¹³ [ph/s]	2.60 10 ¹¹ [ph/s]	1.07 10 ¹² [ph/s]

Il segnale della sorgente è: $S \text{ [ph]} = \Phi_e \tau_{\text{atm}} \tau_{\text{opt}} T_{\text{exp}}$

Il segnale delle ottiche è: $S_B \text{ [ph]} = (\Phi_{L1} \tau_{\text{opt}} + \Phi_{L2}) T_{\text{exp}}$

Il rumore in regime poissoniano è: $N \text{ [ph]} = \sqrt{S + S_B}$

Il rapporto segnale-rumore è: $S/N = S / \sqrt{S + S_B}$

Consideriamo che $T_{\text{exp}} = 1 \text{ [s]}$ e che $\tau_{\text{atm}} = \tau_{\text{opt}} = 1$ allora:

$$S(1 \text{ }\mu\text{m}) = 2.60 \cdot 10^{-2} \text{ [ph]}$$

$$S_B(1 \text{ }\mu\text{m}) = 2.16 \cdot 10^{-3} \text{ [ph]}$$

$$S(3 \text{ }\mu\text{m}) = 2.48 \cdot 10^{10} \text{ [ph]}$$

$$S_B(3 \text{ }\mu\text{m}) = 2.06 \cdot 10^9 \text{ [ph]}$$

$$S(12 \text{ }\mu\text{m}) = 1.60 \cdot 10^{13} \text{ [ph]}$$

$$S_B(12 \text{ }\mu\text{m}) = 1.33 \cdot 10^{12} \text{ [ph]}$$

$$N(1 \text{ }\mu\text{m}) = 1.70 \cdot 10^{-1} \text{ [ph]}$$

$$N(3 \text{ }\mu\text{m}) = 1.64 \cdot 10^5 \text{ [ph]}$$

$$N(12 \text{ }\mu\text{m}) = 4.16 \cdot 10^6 \text{ [ph]}$$

da cui:

$$S/N(1 \text{ }\mu\text{m}) = 1.53 \cdot 10^{-1} = (\text{senza } S_B = 1.61 \cdot 10^{-1})$$

$$S/N(3 \text{ }\mu\text{m}) = 1.51 \cdot 10^5 = (\text{senza } S_B = 1.57 \cdot 10^5)$$

$$S/N(12 \text{ }\mu\text{m}) = 3.85 \cdot 10^6 = (\text{senza } S_B = 4.00 \cdot 10^6)$$