

Michele Tuttafesta

Appunti di Fisica

(Ultimo aggiornamento: 25 Luglio 2004)

Copyright

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.1 or any later version published by the Free Software Foundation; with the Invariant Sections being just "l'autore" with the front-Cover Text being:

"Appunti di Fisica - Michele Tuttafesta"

and anything before this section, following the title itself. There are no Back-Cover Texts. A copy in of the license is included in the Appendix entitled "GNU Free Documentation License".

L'azienda OS3

Open Source Software Solutions (OS3) è un'azienda di sviluppo informatico con sede a Novara. Geograficamente, l'attività di OS3 si estende prevalentemente al nord Italia, specialmente in Piemonte e Lombardia. Per la realizzazione di particolari progetti, tuttavia, i nostri consulenti ed esperti estendono il raggio delle loro attività fino al Lazio.

Da un punto di vista tecnico e informatico, l'attività principale di OS3 è incentrata nello sviluppo di applicazioni middleware ed ad hoc per i propri clienti, anche se il reparto di Ricerca e Sviluppo (R&D) di OS3 è sempre alla ricerca di nuove soluzioni software e sperimenta le ultimissime tecnologie rilasciate nel mondo Open Source.

Come si può facilmente intuire dal nome stesso, OS3 è molto attenta al mondo del software libero e dell'Open Source e supporta attivamente ed economicamente alcuni progetti Open Source italiani.

Inoltre, grazie al forte team di sviluppatori presenti in OS3, l'azienda è stata in grado di realizzare progetti rilasciati attualmente con licenze aperte come GPL o LGPL.

Per maggiori informazioni sulle attività dell'azienda e sugli ultimi prodotti realizzati consultate il sito internet dell'azienda:

<http://www.os3.it>

Progetto EDU di OS3

Cos'è il Progetto EDU

EDU e la divulgazione

Scopo principale del Progetto EDU è di mettere a disposizione del più vasto pubblico possibile libri di contenuto scientifico ed umanistico che abbiano contenuti didattici e che possano essere utilizzati come veri e propri libri di testo nelle scuole medie e superiori.

EDU e il modello del *Software Libero*

I libri del progetto EDU sono creati e distribuiti seguendo una filosofia molto nota, ormai, nell'ambito informatico, che si è pensato di estendere anche ai libri di vario contenuto culturale. Tale filosofia è la filosofia di distribuzione libera del software della *Free Software Foundation*. I prodotti *free* sono messi a disposizione gratuitamente in ogni loro parte e sono dunque utilizzabili gratuitamente da chiunque ne abbia bisogno.

La licenza di distribuzione di EDU

La distribuzione di beni *free software* è gratuita, ma con ciò non significa che non sia regolamentata.

I prodotti *free software* sono infatti sempre accompagnati da una licenza d'uso che ne regola i termini di utilizzo.

Chi scarica ed usa prodotti *free software* implicitamente accetta questa licenza.

La licenza di utilizzo di tutti i libri disponibili nel progetto EDU è la licenza **FDL (Free Documentation License)** scaricabile dal sito *www.gnu.org* ed interamente riportata alla fine di ogni libro.

I perchè del Progetto EDU

Costi dei libri di testo

Come chiunque abbia un figlio da mandare a scuola sa, il costo dei libri di testo incide in maniera consistente sul bilancio familiare.

La presenza di libri di testo gratuiti, scaricabili liberamente via internet, aiuta decisamente le famiglie.

Consultazione di parti di libro e fotocopie

Uno dei problemi più grossi che si incontrano nel corso di studi è quello di dover integrare con varie parti di altri libri il proprio libro di testo principale.

Infatti, in linea teorica, una persona dovrebbe acquistare tutto il libro di appoggio anche se poi ne utilizzerà solo una parte, con evidente spreco di risorse economiche.

I libri del progetto EDU, distribuiti sotto licenza FDL, possono invece essere fotocopiati liberamente in ogni loro parte, rendendo così possibile ed immediata qualsiasi tipo di integrazione si renda necessaria per comprendere meglio un argomento.

Nuove edizioni delle case editrici

Spesso, per evitare il fenomeno della compra-vendita di libri usati, le case editrici pubblicano nuove versioni e ristampe di libri i cui contenuti non sono sostanzialmente cambiati: ciò fa sì che lo studente non possa utilizzare un libro usato della vecchia edizione perchè quella adottata dal professore è differente.

I libri sotto licenza FDL del Progetto EDU sono, invece, disponibili gratuitamente sia nelle vecchie che nelle nuove versioni. In tal modo, inoltre, comprare un libro usato non si rende più necessario.

Contributi esterni al progetto EDU

Per rendere più veloce ed efficiente il servizio di aggiornamento e correzione dei libri pubblicati per il Progetto EDU è previsto che contenuti esterni, non solo siano accettati, ma siano addirittura i benvenuti ed incoraggiati.

Per contribuire con un proprio libro di testo da distribuire sotto licenza FDL o per segnalare errori riscontrati nei testi già distribuiti basta mandare una mail all'indirizzo:

edu@os3.it

Ogni nuovo libro e correzione verranno esaminati e, se ritenuti validi, pubblicati sul sito internet mantenendo inalterato il nome dell'autore originale del lavoro.

Sito ufficiale del Progetto EDU

Il sito ufficiale del *Progetto EDU* dove è possibile scaricare tutte le ultime versioni dei libri resi disponibili è il seguente:

<http://edu.os3.it>

Consultate il sito per conoscere l'esistenza di eventuali mailing-list di discussione legate ad un singolo libro.

Per contattarci direttamente scrivete all'indirizzo di e-mail:

edu@os3.it

Indice

1	Grandezze fisiche e misura	8
1.1	Il metodo sperimentale	8
1.2	Cosa è una grandezza fisica?	9
1.3	Analisi dimensionale	9
1.4	Notazione scientifica e ordine di grandezza	10
1.5	Presentazione di una misura	10
1.6	Cifre significative	11
1.7	Misure dirette	11
1.8	Misure indirette	11
1.9	Misure ripetute	12
2	I vettori	13
2.1	Richiami di matematica	13
2.2	Cosa è un vettore?	13
2.3	Funzioni goniometriche	14
2.4	Algebra dei vettori	15
2.5	Rappresentazione cartesiana dei vettori	17
2.5.1	Componente vettoriale e scalare di un vettore lungo una retta orientata	17
2.5.2	Scomposizione di un vettore lungo due rette orientate	17
2.5.3	Rappresentazione cartesiana nel piano	18
2.5.4	Rappresentazione cartesiana nello spazio	19
3	Le forze e l'equilibrio	21
3.1	Cosa è una forza?	21
3.2	Unità di misura della forza	21
4	I principi della dinamica	22
5	Campo, lavoro ed energia	23
5.1	Cosa è il campo in Fisica?	23
5.2	Lavoro	23
5.2.1	Lavoro di una forza variabile lungo un percorso rettilineo: il lavoro come area	24
5.3	Energia cinetica	25
5.4	Energia potenziale	25
5.5	Esempi di campi di forza conservativi e relative energie potenziali	26
5.5.1	Campo di forza costante	26
5.5.2	Campo di forza centrale	27
5.6	Conservazione dell'energia	30

Capitolo 1

Grandezze fisiche e misura

1.1 Il metodo sperimentale

Galileo Galilei (Pisa 1564 - Arcetri 1642)

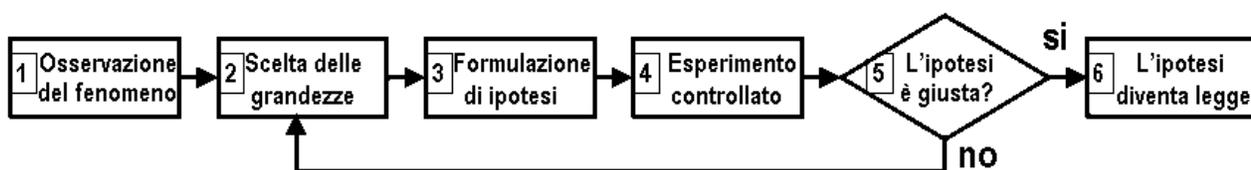


Figura 1.1: Diagramma di flusso del metodo sperimentale

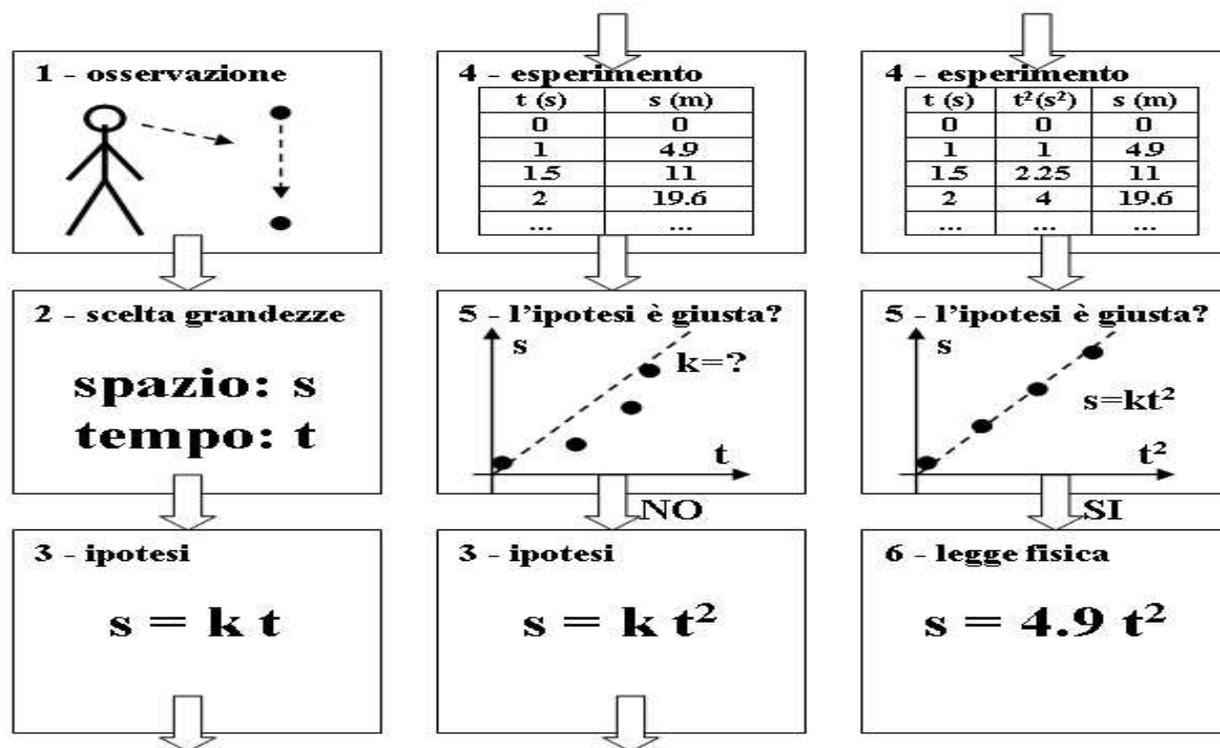


Figura 1.2: Esempio di applicazione del metodo sperimentale: caduta dei gravi

1.2 Cosa è una grandezza fisica?

Definizione 1.1 (fondamentale) Una grandezza fisica è un qualunque oggetto naturale percepito direttamente o indirettamente dai nostri sensi e che può essere misurato, ovvero tradotto in numeri.

Definizione 1.2 (definizione operativa) Una grandezza fisica si definisce operativamente stabilendo: un criterio di uguaglianza, un criterio di somma ed una unità di misura.

Grandezza fondamentale	Unità di misura	Simbolo della unità di misura	Simbolo dimensionale
lunghezza	metro	m	L
massa	chilogrammo	Kg	M
tempo	secondo	s	T
intensità di corrente	ampere	A	i, A
temperatura	kelvin	K	K
intensità luminosa	candela	cd	l, cd
quantità di sostanza	mole	mol	m, mol

Tabella 1.1: Il Sistema Internazionale (SI) delle unità di misura

Multipli		Sottomultipli	
tera (T)	10^{12}	deci (d)	10^{-1}
giga (G)	10^9	centi (c)	10^{-2}
mega (M)	10^6	milli (m)	10^{-3}
chilo (K)	10^3	micro (μ)	10^{-6}
etto (h)	10^2	nano (n)	10^{-9}
deca (da)	10^1	pico (p)	10^{-12}

Tabella 1.2: Prefissi per multipli e sottomultipli delle unità di misura

1.3 Analisi dimensionale

Definizione 1.3 (dimensione di una grandezza fisica) Per ciascuna delle grandezze fondamentali si introduce un'etichetta di riconoscimento, detto simbolo dimensionale (Tabella 1.1), che, racchiusa fra parentesi quadre, indica la cosiddetta dimensione della grandezza stessa.

Le dimensioni di una grandezza derivata si ricavano dalla relazione che lega questa alle grandezze fondamentali.

Esempi: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow [v] = \frac{[L]}{[T]}$; $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow [a] = \frac{[L]/[T]}{[T]} = \frac{[L]}{[T]^2}$; $\nu = \frac{1}{T} \Rightarrow [\nu] = \frac{1}{[T]} = [T]^{-1}$

Se due grandezze fisiche hanno le stesse dimensioni si dicono **omogenee**.

Alcune grandezze fisiche, tipicamente quelle definite come rapporto fra due grandezze omogenee sono prive di dimensioni; si parla in questo caso di grandezze fisiche **adimensionali**.

Esempi: Gli **angoli**, che nel SI si misurano in radianti, simbolo rad, sono grandezze adimensionali. Le **funzioni goniometriche**: sen, cos, tg, ecc., sono grandezze definite come rapporto tra due segmenti, pertanto sono adimensionali.

Regole pratiche per l'analisi dimensionale

Le dimensioni vengono trattate proprio come quantità algebriche nel calcolo letterale.

1. I numeri puri, gli angoli e tutte le grandezze adimensionali si possono sostituire con un 1 nell'analisi dimensionale.
2. Le grandezze fisiche possono essere sommate o sottratte solo se hanno le stesse dimensioni, ovvero solo se sono omogenee.
3. I due membri di un'uguaglianza devono avere le stesse dimensioni.
4. Se non vi è possibilità di equivoco, in un'analisi dimensionale possono omettersi le parentesi quadre per alleggerire la notazione.

Esempio: sapendo che $[F] = \frac{[M][L]}{[T]^2}$ e $[q_1] = [q_2] = [i][T]$, determinare le dimensioni della costante dielettrica del vuoto ϵ_0 che compare nella legge di Coulomb $F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

$$\frac{ML}{T^2} = \frac{i^2 T^2}{\epsilon_0 L^2} \Rightarrow \epsilon_0 = \frac{T^2}{ML} \cdot \frac{i^2 T^2}{L^2} = \frac{i^2 T^4}{ML^3}$$

1.4 Notazione scientifica e ordine di grandezza

Definizione 1.4 (notazione scientifica) *Un numero x si dice espresso in notazione scientifica se viene scritto nella forma $x = a \cdot 10^b$, dove a è un numero con una sola cifra diversa da zero prima del punto decimale, mentre b è un numero intero.*

x	notazione scientifica	equivalente elettronico
0.0025	$2.5 \cdot 10^{-3}$	2.5E-3
-562.5	$-5.625 \cdot 10^2$	-5.625E+2
23.54	$2.354 \cdot 10^1$	2.354E+1
-0.07	$-7 \cdot 10^{-2}$	-7E-2

Definizione 1.5 (ordine di grandezza) *L'ordine di grandezza di un numero x , $ODG(x)$, è l'esponente della potenza di 10 più vicina al numero.*

Regola pratica: scrivendo x in notazione scientifica, $x = a \cdot 10^b \Rightarrow ODG(x) = \begin{cases} b & |a| < 5 \\ b + 1 & |a| \geq 5 \end{cases}$

x	notazione scientifica	$ a $	$ODG(x)$
0.0025	$2.5 \cdot 10^{-3}$	2	-3
-562.5	$-5.625 \cdot 10^2$	5	$2 + 1 = 3$
23.54	$2.354 \cdot 10^1$	2	1
-0.07	$-7 \cdot 10^{-2}$	7	$-2 + 1 = -1$

1.5 Presentazione di una misura

La misura x di una grandezza fisica viene presentata alla comunità scientifica sempre nella forma $x = \bar{x} \pm \epsilon_x$.

\bar{x} rappresenta il valore di riferimento della misura e si chiama valore medio di x .

ϵ_x rappresenta una stima dell'incertezza sulla misura e si chiama errore assoluto su x

Si definisce errore relativo su x la grandezza $\epsilon_{rx} = \frac{\epsilon_x}{\bar{x}}$

La determinazione di \bar{x} e di ϵ_x varia a seconda del tipo e del metodo di misura.

1.6 Cifre significative

Supponendo che $x = 109 \pm 0.25$ cm, allora possiamo affermare che la misura x varia per incertezza da un minimo di $109 - 0.25 = 108.75$ cm ad un massimo di $109 + 0.25 = 109.25$ cm.

Notiamo che la misura x presenta un numero di cifre “certe”, cioè che non variano considerando l’incertezza, corrispondenti alle prime due 1 e 0; dalla terza cifra compresa in poi i valori numerici sono “incerti”.

Se avessimo operato in Km i numeri sarebbero stati $x = 0.00109 \pm 0.0000025$ Km con 0.0010875 Km $< x < 0.0010925$ Km; trascurando convenzionalmente gli zeri a sinistra, le cifre certe e quelle incerte sarebbero state in questo caso le stesse di prima.

Leggendo il valore numerico di una misura da sinistra a destra, si da la seguente

Definizione 1.6 (cifre significative) *Le cifre significative di una misura sono il numero di cifre certe più la prima cifra incerta, trascurando nel conteggio tutti gli eventuali zeri a sinistra.*

Osservazione: se la misura è espressa in notazione scientifica $a \cdot 10^b$ il computo delle cifre significative può farsi solo sul coefficiente a .

Osservazione: se una misura viene fornita senza specificare l’errore ma, anche in maniera sottintesa, con il corretto numero di cifre significative, allora si può certamente affermare quali sono le cifre certe e quale l’unica incerta: l’ultima a destra del numero.

1.7 Misure dirette

Definizione 1.7 (misura diretta) *La misura di una grandezza fisica si dice diretta se viene effettuata leggendo direttamente il valore numerico sullo strumento di misura.*

Definizione 1.8 (sensibilità) *La sensibilità di uno strumento di misura è la variazione minima della grandezza fisica che può essere apprezzata dallo strumento.*

In questo tipo di misura:

\bar{x} = valore numerico letto sullo strumento.

ϵ_x = metà della sensibilità dello strumento.

1.8 Misure indirette

Definizione 1.9 (misura indiretta) *La misura di una grandezza fisica si dice indiretta se viene effettuata attraverso il calcolo di una espressione matematica.*

In questo tipo di misura bisogna distinguere due casi ai fini della determinazione del valore medio e dell’errore.

1. Conoscendo solo le cifre significative delle grandezze presenti nell’espressione.

Si stabiliscono alcune regole di arrotondamento in modo da ottenere la misura indiretta con il corretto numero di cifre significative.

- (a) Nel caso di somme algebriche il risultato deve essere arrotondato con un numero di cifre decimali pari al minor numero di cifre decimali presenti in ciascun addendo.

- (b) Nei casi di prodotto, rapporto, potenza, il risultato deve essere arrotondato con un numero di cifre significative pari al minor numero di cifre significative presenti nelle misure con le quali si opera.
2. Conoscendo esattamente gli errori delle grandezze presenti nell'espressione.

Il valore medio si calcola dall'espressione assegnando i valori medi alle grandezze in essa presenti.

- (a) L'errore assoluto di una somma algebrica è uguale alla somma degli errori assoluti degli addendi.
- (b) L'errore relativo di un prodotto o di un rapporto è uguale alla somma degli errori relativi dei singoli termini.
- (c) L'errore relativo di una potenza è uguale al prodotto dell'esponente per l'errore relativo della base.

In ogni caso l'errore così determinato si arrotonda alla fine ad una o al massimo due cifre significative.

1.9 Misure ripetute

Definizione 1.10 (misura ripetuta) *La misura di una grandezza fisica si dice ripetuta se viene effettuata più volte nelle stesse condizioni generali.*

Il metodo della misura ripetuta può essere applicato sia ad una misura diretta che ad una indiretta. La misura viene in questo caso considerata come una variabile aleatoria della quale è possibile estrarre un campione finito di valori; concordemente le variazioni nei valori trovati devono poter essere attribuiti a fattori casuali ed imprevedibili.

Indicando con x_i la i -esima misura su n totali

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \epsilon_x = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

L'espressione di ϵ_x è detta in statistica "scarto quadratico medio" o "deviazione standard" e si indica convenzionalmente con la lettera σ .

Proprietà 1.1 (misure di grandezze gaussiane) *Se una misura è ripetuta un numero molto grande di volte con variazioni piccole e casuali nei valori riscontrati, la distribuzione dei suddetti valori, rappresentata mediante un istogramma, tende ad assumere sempre il profilo della seguente curva normale o curva di Gauss: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$.*

In particolare si dimostra che esiste una probabilità del 68.3% che il valore di una generica misura cada nell'intervallo di estremi $\bar{x} - \sigma$ ed $\bar{x} + \sigma$, del 99.7% fra $\bar{x} - 3\sigma$ ed $\bar{x} + 3\sigma$.

Teorema 1.1 (del limite centrale) *Data una popolazione infinita, qualunque sia la distribuzione del fenomeno x della popolazione, se la media μ_x e la deviazione standard σ_x sono finiti, la variabile casuale \bar{x} si approssima, al crescere della numerosità n dei campioni stessi, ad una variabile gaussiana con media $\mu_{\bar{x}} = \mu_x$ e deviazione standard $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$.*

Se la popolazione non è infinita ma costituita da un numero N di elementi, allora al crescere di n ed N si ha $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$.

Capitolo 2

I vettori

2.1 Richiami di matematica

Definizione 2.1 (segmento orientato) *Un segmento orientato è un segmento di estremi A e B nel quale si sia assegnato un ordine e quindi si possa distinguere un punto iniziale ed uno finale. A tal fine si sceglie il simbolo \overrightarrow{AB} convenendo di considerare A come punto iniziale e B come quello finale.*

Definizione 2.2 (segmenti orientati paralleli) *Due segmenti orientati \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} si dicono paralleli ($\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$), o collineari, se le rette alle quali essi appartengono sono parallele.*

Definizione 2.3 (segmenti orientati concordi, opposti) *Due segmenti orientati \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} si dicono concordi ($\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$), o aventi lo stesso verso, se sono paralleli e le semirette $[AB$ e $[CD$ appartengono al medesimo semipiano tra i due individuati dalla retta AC . Se sono paralleli ma le semirette indicate appartengono ciascuna ad un semipiano diverso allora i due segmenti orientati si dicono opposti ($\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$), o aventi verso opposto.*

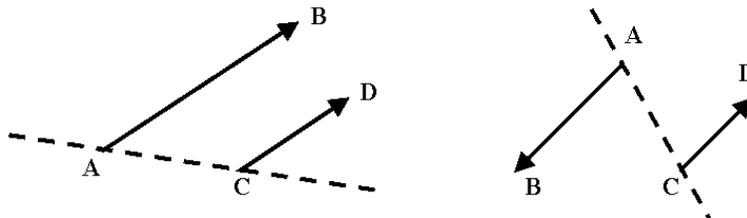


Figura 2.1: Segmenti orientati concordi ed opposti

Definizione 2.4 (segmenti orientati equipollenti) *Due segmenti orientati \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} si dicono equipollenti se e solo se $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD} \wedge \overline{AB} = \overline{CD}$.*

2.2 Cosa è un vettore?

Definizione 2.5 (vettore) *Si dice vettore una qualsiasi grandezza rappresentabile con un segmento orientato di retta od uno ad esso equipollente; definibile quindi attraverso tre parametri:*

1. *Modulo o intensità* = lunghezza del segmento
2. *Direzione* = retta su cui giace il segmento o una ad essa parallela
3. *Verso* = orientazione del segmento

Indicando un vettore con la notazione \vec{v} ed il corrispondente insieme di vettori equipollenti ad un dato segmento orientato \overrightarrow{AB} con $\{\overrightarrow{AB}\}$, si avrà quindi $\vec{v} = \{\overrightarrow{AB}\}$. Se non vi è possibilità di equivoco spesso si usa scrivere $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ per esprimere implicitamente lo stesso concetto. Il modulo di un vettore $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ viene generalmente indicato con uno dei seguenti simboli: $|\vec{v}|$, $|\overrightarrow{AB}|$, v , \overline{AB}

Definizione 2.6 (vettore applicato) *Si dice vettore applicato un vettore al quale viene esplicitamente associato un dato punto iniziale, detto anche punto di applicazione.*

Definizione 2.7 (scalari e vettori) *Una grandezza fisica si dice vettoriale, o semplicemente vettore, se è rappresentabile con un vettore; si dice scalare se invece è rappresentabile con un numero.*

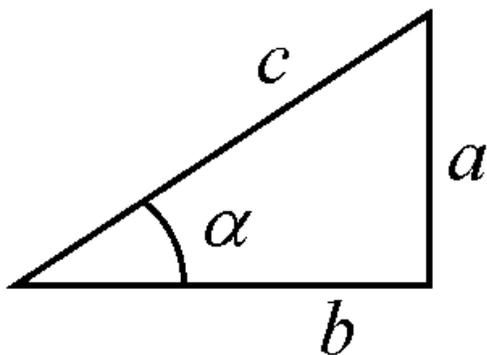
Esempi di grandezze fisiche scalari sono: lunghezza, massa, tempo, temperatura, pressione, volume, ecc.

Esempi di grandezze fisiche vettoriali sono: spostamento, velocità, accelerazione, ecc.

Un esempio, probabilmente l'unico significativo, di grandezza fisica rappresentabile con un vettore applicato è la forza.

2.3 Funzioni goniometriche

Definizione 2.8 (definizioni geometriche) *Dato il triangolo rettangolo abc , se α è l'angolo acuto opposto ad a si definiscono le seguenti funzioni goniometriche di α .*



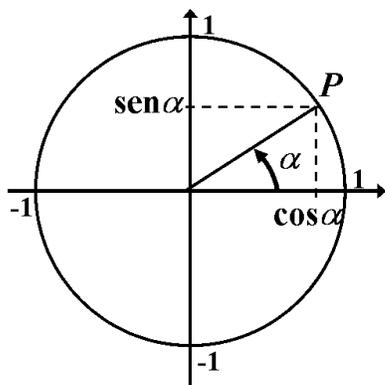
$$\text{seno di } \alpha = \text{sen } \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\text{coseno di } \alpha = \text{cos } \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\text{tangente di } \alpha = \text{tg } \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$$

Per $\alpha > 90^\circ$ le definizioni geometriche perdono significato e possono pertanto generalizzarsi attraverso le seguenti

Definizione 2.9 (definizioni analitiche) *Data una circonferenza di raggio 1 e centro nell'origine di un sistema cartesiano, detta circonferenza goniometrica; sia P il punto della circonferenza goniometrica corrispondente ad un angolo orientato al centro α , si definiscono le seguenti funzioni goniometriche di α .*



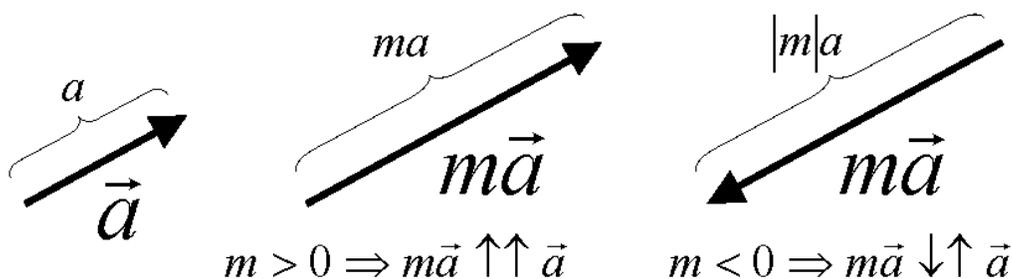
$\text{sen } \alpha = \text{ordinata di } P$

$\text{cos } \alpha = \text{ascissa di } P$

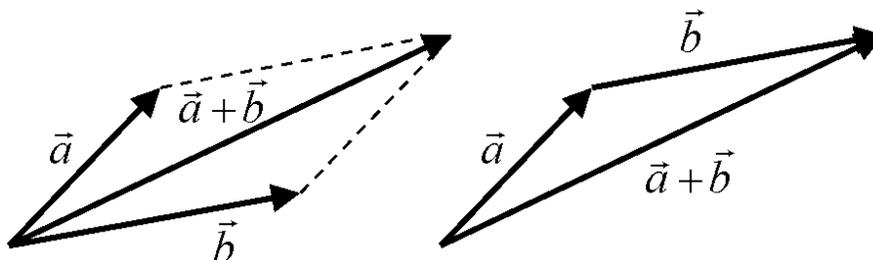
$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$$

2.4 Algebra dei vettori

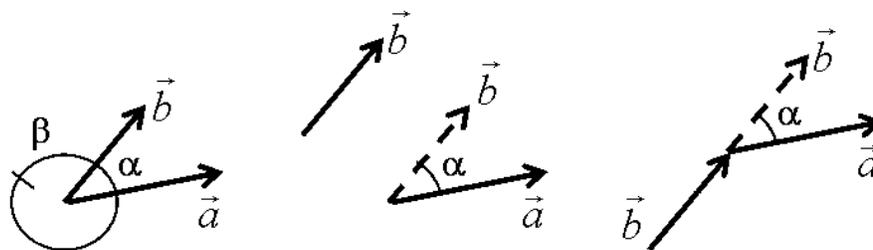
Prodotto di uno scalare per un vettore



Somma di vettori - regola del parallelogramma



Definizione 2.10 (angolo compreso) *L'angolo compreso fra due vettori è l'angolo minore individuato dai due vettori, trasladando opportunamente uno di essi in modo da far coincidere i loro punti iniziali.*



$\alpha = \text{angolo compreso}; \beta = \text{angolo non compreso}$

Prodotto scalare

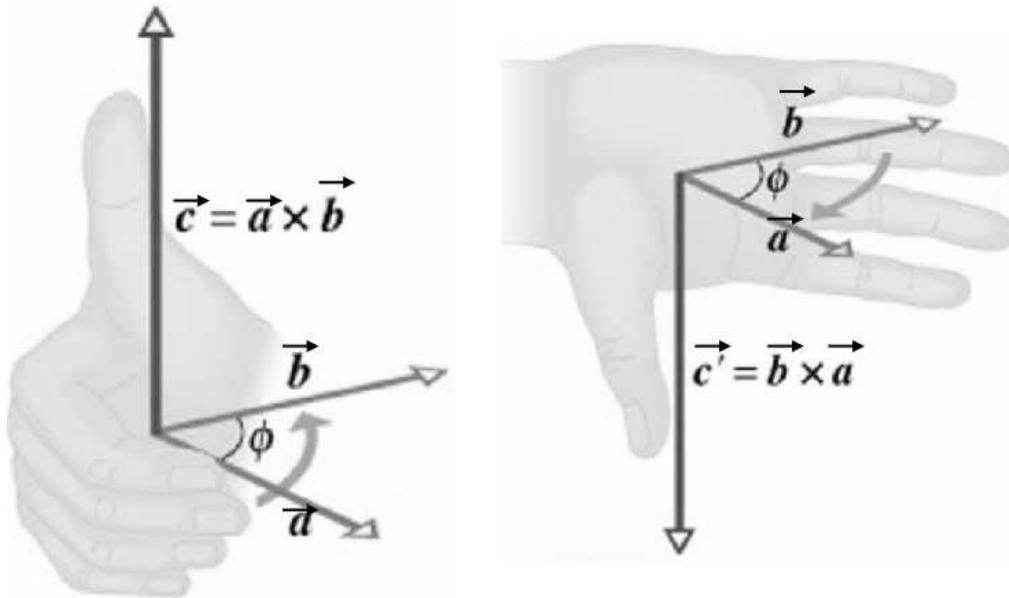
È il prodotto fra due vettori \vec{a} e \vec{b} , si indica col simbolo $\vec{a} \cdot \vec{b}$, e da come risultato uno scalare, definito come prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo compreso α .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$$

Prodotto vettoriale

E' il prodotto fra due vettori \vec{a} e \vec{b} , si indica col simbolo $\vec{a} \times \vec{b}$, e da come risultato un vettore avente:

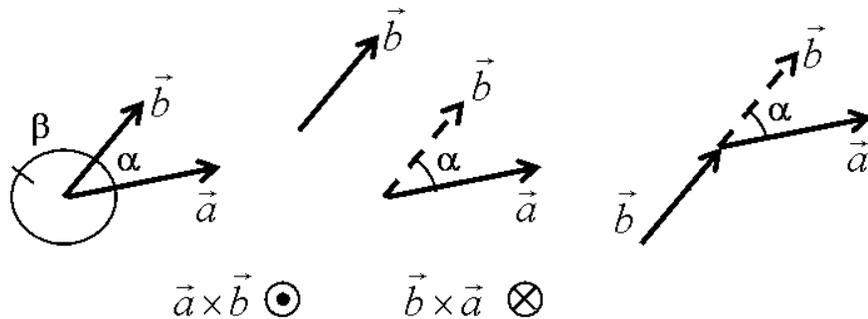
1. modulo = $ab \sin \alpha$, dove α è l'angolo compreso;
2. direzione perpendicolare al piano individuato dai due vettori;
3. verso dato dalla regola della mano destra: col palmo della mano destra aperta, pollice a 90° rispetto all'indice, si immagina di spostare il primo vettore del prodotto sul secondo seguendo l'angolo compreso (cioè quello minore), il pollice indicherà così il verso del vettore prodotto vettoriale.



Dalla definizione di prodotto vettoriale discende immediatamente che $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, cioè il prodotto vettoriale è anticommutativo.

Notazione per vettori entranti e uscenti dal foglio

Se i vettori \vec{a} e \vec{b} sono nel piano del foglio, per rappresentare il prodotto vettoriale $\vec{a} \times \vec{b}$, che è un vettore perpendicolare ad esso, si utilizzano i simboli \odot e \otimes per indicare vettori perpendicolari al foglio con verso rispettivamente uscente ed entrante.



Proprietà 2.1 (notevoli dell'algebra dei vettori) Siano m, n scalari e $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vettori; si dimostrano le seguenti proprietà.

Prodotto scalare - vettore	
$(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$	
$(mn)\vec{a} = m(n\vec{a})$	
$m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$	

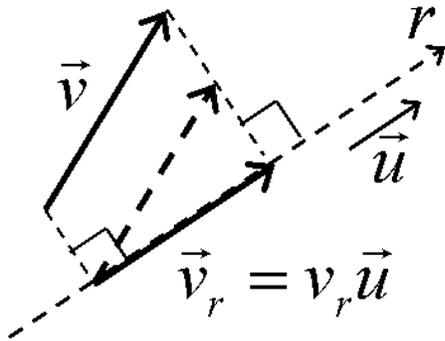
Prodotto scalare	Prodotto vettoriale
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$	$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
$(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = m(\vec{a} \cdot \vec{b})$	$(m\vec{a}) \times \vec{b} = m(\vec{a} \times \vec{b})$
$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$	$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

2.5 Rappresentazione cartesiana dei vettori

Definizione 2.11 (versore di una retta orientata) Il versore di una retta orientata è un vettore di modulo unitario avente la stessa direzione e verso della retta.

2.5.1 Componente vettoriale e scalare di un vettore lungo una retta orientata

Definizione 2.12 (componente vettoriale) La componente vettoriale di un vettore rispetto ad una retta orientata è il vettore che si ottiene come proiezione ortogonale del vettore dato sulla retta stessa (ovvero moltiplicando il versore della retta per il prodotto scalare del vettore dato con il versore stesso).



r = retta orientata

\vec{u} = versore di r

\vec{v}_r = componente vettoriale di \vec{v} lungo $r =$
 $= (\vec{v} \cdot \vec{u}) \vec{u}$

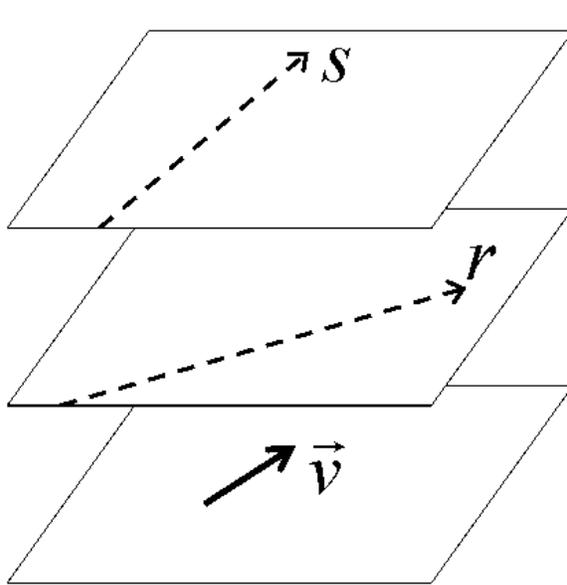
v_r = componente scalare di \vec{v} lungo $r =$
 $= \vec{v} \cdot \vec{u}$

Definizione 2.13 (componente scalare) La componente scalare, detta anche **componente cartesiana**, di un vettore rispetto ad una retta orientata è lo scalare con cui bisogna moltiplicare il versore della retta per ottenere la relativa componente vettoriale (ovvero il prodotto scalare del vettore dato con il versore della retta).

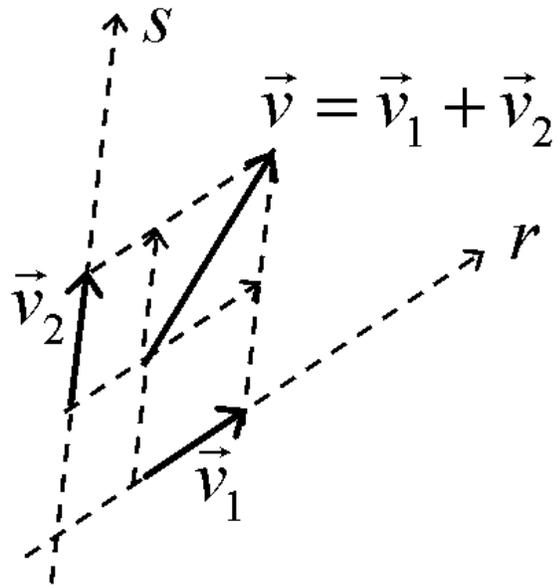
Nota: quando si parla di componente (non specificando se scalare o vettoriale) di un vettore rispetto ad una retta, generalmente ci si riferisce alla componente scalare.

2.5.2 Scomposizione di un vettore lungo due rette orientate

Proprietà 2.2 (scomposizione generica nel piano) Date due rette orientate non parallele fra loro ed un vettore, appartenenti rispettivamente a tre piani paralleli o coincidenti, allora il vettore dato può esprimersi come somma di due vettori, paralleli rispettivamente a ciascuna delle due rette ed ottenibili attraverso la regola del parallelogramma.



**Visione tridimensionale
dei tre piani paralleli**



**Visione di pianta
(come in trasparenza)**

2.5.3 Rappresentazione cartesiana nel piano

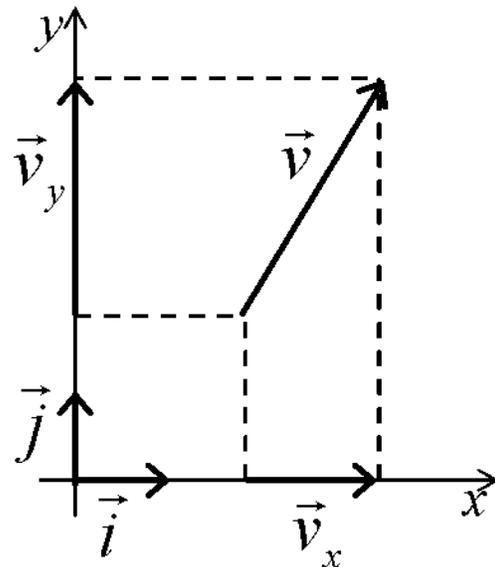
Proprietà 2.3 (scomposizione cartesiana nel piano) *Un vettore appartenente ad un piano cartesiano può esprimersi come somma delle sue componenti vettoriali lungo gli assi coordinati.*

È convenzione internazionale indicare i versori degli assi x e y rispettivamente con \vec{i} e \vec{j} .

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

Se non vi è possibilità di equivoco è consentita anche la seguente notazione.

$$\vec{v} = (v_x, v_y)$$



Attraverso la rappresentazione cartesiana è particolarmente agevole eseguire le operazioni dell'algebra dei vettori.

Somma

$$\vec{a} + \vec{b} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + b_x \vec{i} + b_y \vec{j} = (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j}$$

ovvero

$$(a_x, a_y) + (b_x, b_y) = (a_x + b_x, a_y + b_y)$$

Prodotto scalare

Considerando che $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ e $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j}) = a_x b_x \overbrace{\vec{i} \cdot \vec{i}}^{=1} + a_x b_y \overbrace{\vec{i} \cdot \vec{j}}^{=0} + a_y b_x \overbrace{\vec{j} \cdot \vec{i}}^{=0} + a_y b_y \overbrace{\vec{j} \cdot \vec{j}}^{=1}$$

Quindi

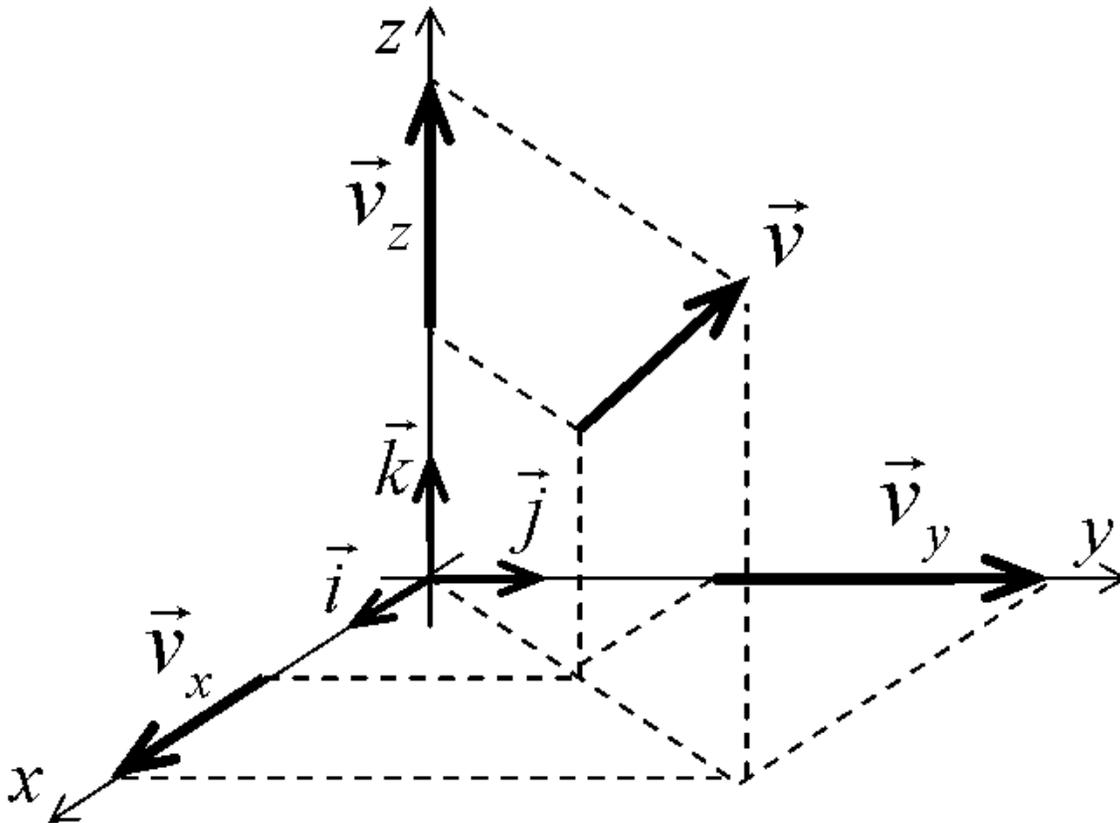
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x, a_y) \cdot (b_x, b_y) = a_x b_x + a_y b_y \quad (2.1)$$

2.5.4 Rappresentazione cartesiana nello spazio

Proprietà 2.4 (scomposizione cartesiana nello spazio) *Un vettore appartenente ad uno spazio cartesiano può esprimersi come somma delle sue componenti vettoriali lungo gli assi coordinati.*

È convenzione internazionale indicare i versori degli assi x, y, z rispettivamente con $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = (v_x, v_y, v_z)$$



Si estendono facilmente allo spazio i risultati ottenuti nel piano riguardo all'algebra dei vettori.

Somma

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

Prodotto scalare

Considerando che $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ e $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$, analogamente alla 2.1 si ottiene

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x, a_y, a_z) \cdot (b_x, b_y, b_z) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Prodotto vettoriale

È semplice valutare i prodotti vettoriali fra i versori \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , per cui si ottiene

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x \overbrace{\vec{i} \times \vec{i}}^{=0} + a_x b_y \overbrace{\vec{i} \times \vec{j}}^{=\vec{k}} + a_x b_z \overbrace{\vec{i} \times \vec{k}}^{=-\vec{j}} + \\ &+ a_y b_x \overbrace{\vec{j} \times \vec{i}}^{=-\vec{k}} + a_y b_y \overbrace{\vec{j} \times \vec{j}}^{=0} + a_y b_z \overbrace{\vec{j} \times \vec{k}}^{=\vec{i}} + \\ &+ a_z b_x \overbrace{\vec{k} \times \vec{i}}^{=\vec{j}} + a_z b_y \overbrace{\vec{k} \times \vec{j}}{=-\vec{i}} + a_z b_z \overbrace{\vec{k} \times \vec{k}}^{=0} = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Lo stesso risultato si ottiene col seguente determinante simbolico

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = (\dots 2.2)$$

Se \vec{a} e \vec{b} sono nel piano xy allora $a_z = b_z = 0$ e quindi la 2.2 si semplifica come segue

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \quad (2.3)$$

Risultato schematizzato nella figura 2.2

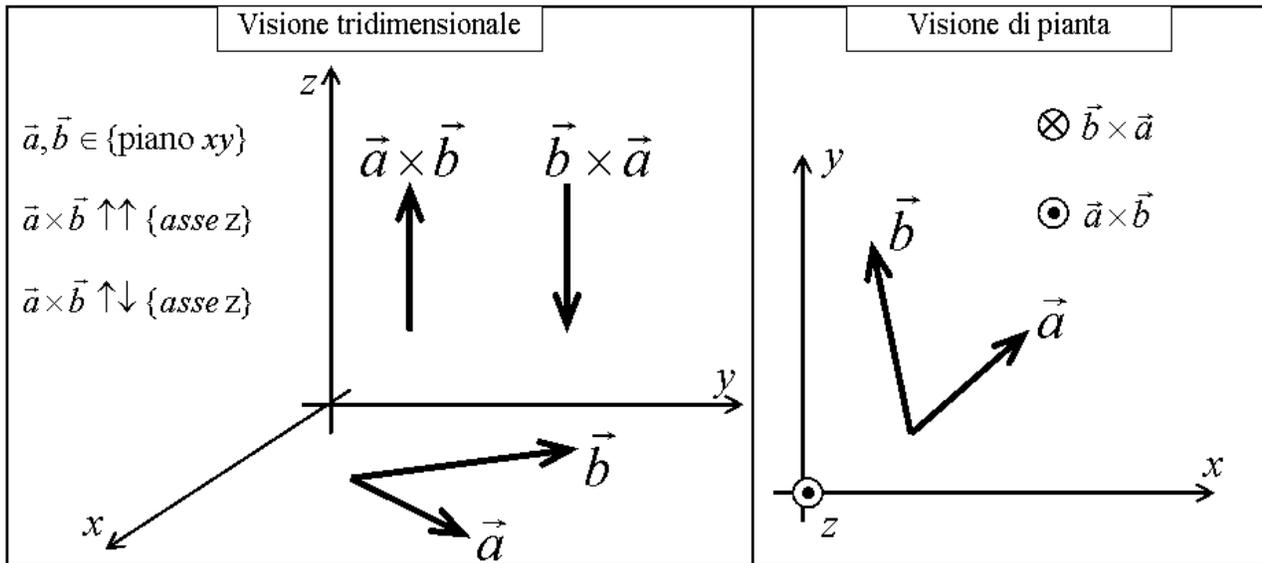


Figura 2.2: Prodotto vettoriale di due vettori appartenenti al piano xy

Capitolo 3

Le forze e l'equilibrio

3.1 Cosa è una forza?

Le seguenti definizioni di forza sono equivalenti.

Definizione 3.1 (statica) *Una forza è una qualsiasi causa in grado di provocare la deformazione di un corpo materiale.*

Definizione 3.2 (dinamica) *Una forza è una qualsiasi causa in grado di far variare la velocità di un punto materiale.*

3.2 Unità di misura della forza

Definizione 3.3 (unità di misura della forza) *Nel sistema SI l'unità di misura della forza è il Newton, simbolo N , definito come la forza in grado di produrre un'accelerazione di 1 m/s^2 ad un corpo di massa 1 Kg .*

Da un punto di vista statico 1 N equivale a circa $1/10$ della forza con cui la Terra attrae un corpo di massa 1 Kg .

Capitolo 4

I princìpi della dinamica

4.1 (Primo principio della dinamica) (Principio d'inerzia).

Esiste in natura un sistema di riferimento, detto inerziale (p.es. quello solidale con le stelle fisse), nel quale un corpo non soggetto a forze oppure soggetto ad un sistema di forze che si fanno equilibrio, persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

Applicando le regole della cinematica, si dimostra la seguente

Proprietà 4.1 (dei sistemi inerziali) *Ogni sistema di riferimento che trasli con moto rettilineo uniforme rispetto ad un sistema di riferimento inerziale, è anch'esso inerziale.*

Un sistema di riferimento solidale con la Terra può essere considerato con buona approssimazione inerziale.

Un sistema di riferimento che si muove con accelerazione diversa da zero rispetto ad un sistema inerziale, non è inerziale: auto in fase di partenza o in fase di arresto, ascensore in fase di partenza o in fase di arresto, seggiolino di una giostra che gira, ecc..

4.2 (Secondo principio della dinamica) .

In un riferimento inerziale, un sistema di forze applicate ad un punto materiale produce un'accelerazione concorde e proporzionale alla risultante del sistema stesso.

Definizione 4.1 (formale del secondo principio della dinamica) *Detta \vec{F} la risultante del sistema di forze applicate ad un punto materiale che subisce l'accelerazione \vec{a} , si ottiene la relazione*

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

dove la costante di proporzionalità m è chiamata massa inerziale del punto materiale ed è univocamente associata ad esso.

4.3 (Terzo principio della dinamica) .

In un riferimento inerziale, ad ogni azione corrisponde una reazione uguale in modulo ma di verso opposto.

Capitolo 5

Campo, lavoro ed energia

5.1 Cosa è il campo in Fisica?

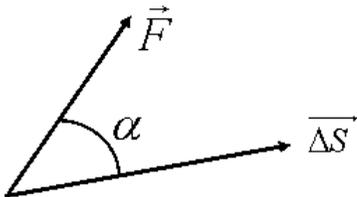
Definizione 5.1 (campo) *Si dice campo una qualunque regione di spazio nella quale una data grandezza è definita in ogni punto appartenente alla regione stessa.*

Si parla di campi scalari se la corrispondente grandezza fisica è scalare: campo di temperatura, di pressione, di densità, ecc..

Si parla di campi vettoriali se la corrispondente grandezza fisica è vettoriale: campo di velocità (in un fluido), campo elettrico, campo magnetico, campo di forza, ecc..

5.2 Lavoro

Definizione 5.2 (lavoro elementare) *Il lavoro elementare (L) è il prodotto scalare di una forza costante (\vec{F}), applicata ad un punto materiale che subisce uno spostamento rettilineo ($\vec{\Delta S}$), per lo spostamento stesso.*

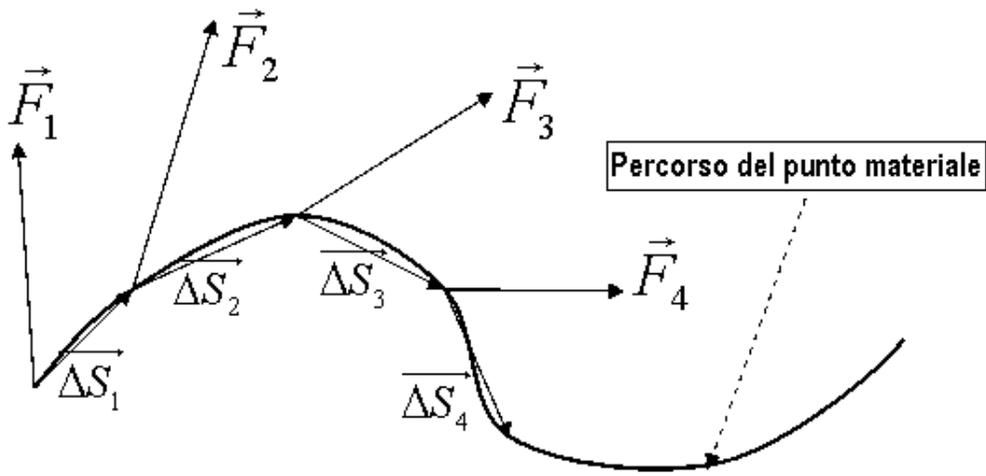


$$L = \vec{F} \cdot \vec{\Delta S}$$

$$L = F \cdot \Delta S \cdot \cos \alpha$$

Dalla definizione data discende che nel SI il lavoro si misura in $N \cdot m$, unità che prende il nome di Joule, simbolo J .

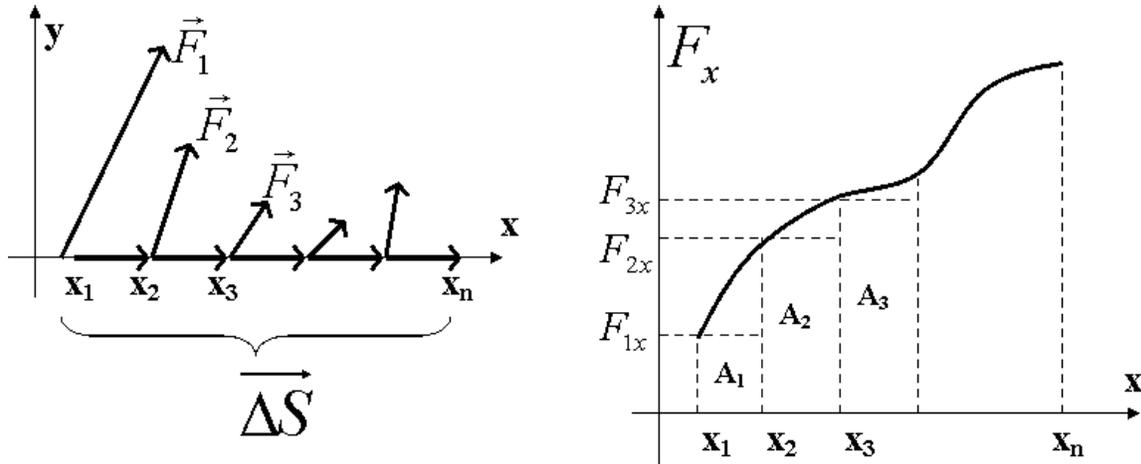
Definizione 5.3 (lavoro lungo un percorso) *Se un punto materiale si muove seguendo un percorso curvilineo e la forza ad esso applicata varia lungo tale percorso, allora il lavoro compiuto dalla forza lungo il percorso si definisce come somma dei lavori elementari calcolati su una poligonale che approssima opportunamente il percorso stesso.*



$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \dots = \vec{F}_1 \cdot \overrightarrow{\Delta S}_1 + \vec{F}_2 \cdot \overrightarrow{\Delta S}_2 + \vec{F}_3 \cdot \overrightarrow{\Delta S}_3 + \dots$$

5.2.1 Lavoro di una forza variabile lungo un percorso rettilineo: il lavoro come area

Come esempio notevole di applicazione della definizione generale di lavoro, consideriamo una forza variabile $\vec{F} = (F_x, F_y)$ applicata ad un punto materiale che si muove lungo un percorso rettilineo e che per semplicità supponiamo parallelo all'asse x .

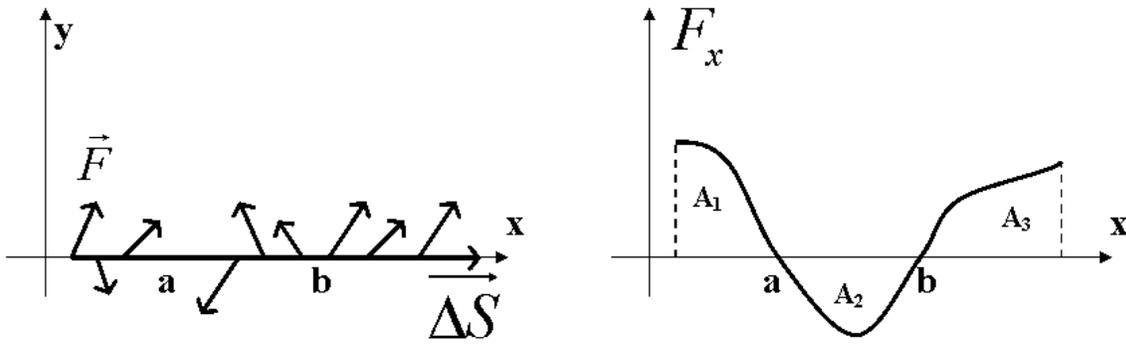


In prima approssimazione possiamo supporre la forza costante lungo ciascuno dei tratti $\overrightarrow{x_1x_2}$, $\overrightarrow{x_2x_3}$, ... con i rispettivi vettori \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , ... Il lavoro può quindi essere espresso come segue

$$L = \vec{F}_1 \cdot \overrightarrow{x_1x_2} + \vec{F}_2 \cdot \overrightarrow{x_2x_3} + \dots = F_{1x}(x_2 - x_1) + F_{2x}(x_3 - x_2) + \dots = A_1 + A_2 + \dots \quad (5.1)$$

cioè come somma delle aree dei rettangoli individuati in figura, compresi fra il grafico della componente x della forza e l'asse x .

La conoscenza precisa della dipendenza di F_x dalla posizione x (il grafico di cui sopra) consente di far convergere con precisione arbitraria il calcolo approssimato del lavoro appena svolto, riducendo arbitrariamente la lunghezza dei tratti $\overrightarrow{x_i x_{i+1}}$ ed ottenendo il seguente unico risultato rigoroso, di riferimento per definizione.



$$L = A_1 - A_2 + A_3 = \text{area compresa fra il grafico di } F_x \text{ e l'asse } x \quad (5.2)$$

Da notare che le aree calcolate al di sotto dell'asse x vanno considerate negative nel loro contributo al lavoro totale; ciò si comprende facilmente osservando che la 5.2 è una estrapolazione della 5.1 dove, se la F_x è negativa, le aree dei relativi rettangolini risultano negative.

5.3 Energia cinetica

Definizione 5.4 (energia cinetica di un punto materiale) *L'energia cinetica di un punto materiale di massa m e velocità v è una grandezza fisica scalare associata ad esso, definita dalla relazione*

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Definizione 5.5 (energia cinetica di un sistema di punti materiali) *L'energia cinetica di un sistema di punti materiali è definita come somma delle energie cinetiche dei singoli punti.*

$$E_c = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \dots$$

Teorema 5.1 (del lavoro e dell'energia cinetica) *Il lavoro compiuto da un sistema di forze applicato ad un sistema di punti materiali è uguale alla variazione di energia cinetica determinata sul sistema di punti stesso.*

$$L = \Delta E_c = E_{cf} - E_{ci}$$

5.4 Energia potenziale

Definizione 5.6 (campo di forza conservativo) *Se il lavoro fatto dalle forze di un campo lungo un percorso che unisce due punti fissi non dipende dalla forma del percorso, solo eventualmente dalle coordinate degli estremi, allora il campo di forza si dice conservativo.*

Definizione 5.7 (energia potenziale di un punto materiale) *L'energia potenziale di un punto materiale all'interno di un campo di forza conservativo è una grandezza fisica scalare, generalmente indicata con U , associata al punto in ogni sua posizione all'interno del campo e definita in modo tale che*

$$L = U_i - U_f = -\Delta U$$

cioè il lavoro fatto dalle forze del campo applicate al punto materiale che si sposta da una posizione iniziale (i) ad una finale (f) (lungo un percorso qualsiasi) è uguale a meno la variazione di energia potenziale associata alle suddette posizioni.

Nota: l'espressione matematica dell'energia potenziale varia a seconda di come è definito il campo di forza conservativo.

Definizione 5.8 (energia potenziale di un sistema di punti materiali) *L'energia potenziale di un sistema di punti materiali all'interno di un campo di forza conservativo è definita come somma delle energie potenziali dei singoli punti.*

5.5 Esempi di campi di forza conservativi e relative energie potenziali

Per stabilire se un campo di forza è conservativo bisogna calcolare il lavoro lungo un percorso generico che unisce due punti fissi arbitrari.

Se attraverso opportune considerazioni è possibile stabilire che, tenendo fissi gli estremi del percorso, l'espressione matematica del lavoro non varia qualunque sia il profilo del percorso stesso, allora è dimostrabile che tale espressione sarà esprimibile come differenza di due espressioni formalmente identiche $f(P_i)$ e $f(P_f)$: una dipendente dalle coordinate del punto iniziale e l'altra da quelle del punto finale.

$$L = f(P_i) - f(P_f) \quad (5.3)$$

L'energia potenziale avrà pertanto per definizione la seguente espressione

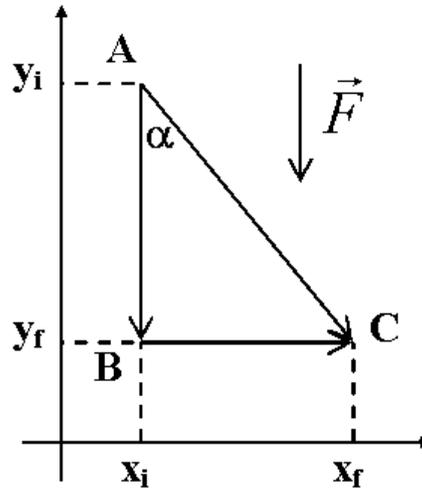
$$U = f(P) + C$$

dove P è il generico punto del campo (rappresentante le coordinate generiche di P_i o P_f che compaiono nella 5.3) e C uno scalare assegnabile, in tutta arbitrarietà, con un valore fisso convenzionale.

5.5.1 Campo di forza costante

In un campo di forza costante il vettore forza ha lo stesso modulo, direzione e verso in ogni punto.

Consideriamo per semplicità un riferimento cartesiano con l'asse y opposto al vettore forza del campo. Supponiamo che un punto materiale si sposti da una posizione A ad una posizione C seguendo due possibili percorsi rappresentati in figura rispettivamente da $AB+BC$ (AB verticale, BC orizzontale) e AC . Dimostriamo che il lavoro fatto dalle forze del campo lungo i suddetti percorsi non varia, infatti



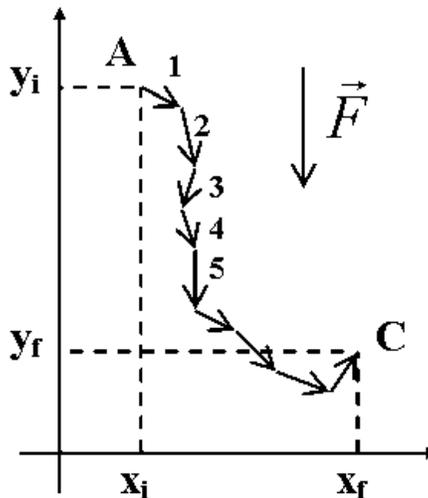
$$L_{AB+BC} = L_{AB} + L_{BC} = \vec{F} \cdot \vec{AB} + \vec{F} \cdot \vec{BC} = F\overline{AB} + 0 = F(y_i - y_f) = Fy_i - Fy_f$$

$$L_{AC} = \vec{F} \cdot \vec{AC} = F\overline{AC} \cos \alpha = F\overline{AB} = F(y_i - y_f) = Fy_i - Fy_f = L_{AB+BC} \quad c.v.d. \quad (5.4)$$

Un qualsiasi percorso che unisca i punti A e C sopracitati, può essere sempre opportunamente approssimato con precisione arbitraria per mezzo di una poligonale: percorso costituito da tratti rettilinei contigui, numerati in figura con 1, 2, 3, ecc..

Lungo ciascuno di essi può applicarsi il risultato espresso dalla 5.4, ottenendo per il lavoro lungo la poligonale, con ovvio significato dei simboli:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \dots = \\ = F(y_{1i} - y_{1f}) + F(y_{2i} - y_{2f}) + F(y_{3i} - y_{3f}) + \dots$$



Poiché $y_{1f} = y_{2i}$, $y_{2f} = y_{3i}$, $y_{3f} = y_{4i}$ e così via, allora l'ultima espressione trovata può semplificarsi ricavando infine:

$$L = F(y_{1i} - y_{nf}) = Fy_A - Fy_C$$

dove y_{1i} è l'ordinata del primo punto della poligonale, cioè A , mentre y_{nf} è l'ordinata dell'ultimo punto della poligonale, cioè C .

In conclusione abbiamo dimostrato che il lavoro lungo una generica poligonale (e quindi lungo un generico percorso) dipende solo dalle coordinate dei suoi estremi, pertanto il campo di forza costante è conservativo e l'espressione della sua energia potenziale è

$$U = Fy + C$$

Il campo di forza gravitazionale in prossimità della superficie terrestre è con buona approssimazione costante con $F = mg$, quindi, ponendo convenzionalmente $C = 0$, si ottiene in questo esempio reale di campo di forza costante

$$U = mgy$$

5.5.2 Campo di forza centrale

In un campo di forza centrale il vettore forza è in ogni punto parallelo (concorde o discorde) a semirette orientate uscenti da un punto fisso O , detto centro del campo; a tali semirette si dà il nome di linee di forza o assi radiali. Inoltre il modulo della forza dipende solo dalla distanza del suo punto di applicazione dal centro del campo: in riferimento alla figura 5.1, la componente scalare F_r di \vec{F} lungo il relativo asse radiale, di versore \vec{u} , dipende solo da $\vec{r} = \vec{OP}$.

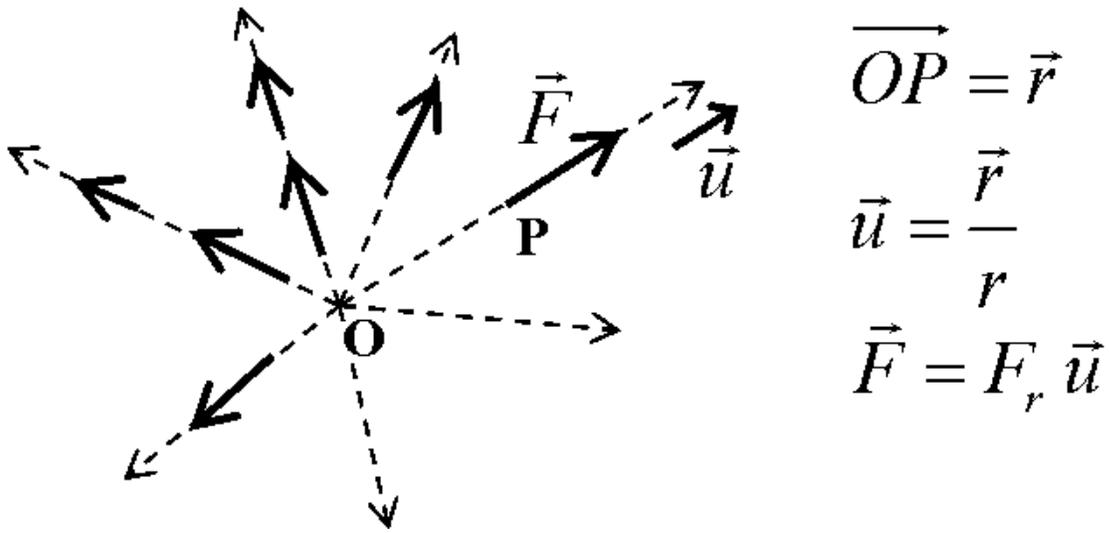


Figura 5.1: Campo di forza centrale

In riferimento alla figura 5.2(a), consideriamo uno spostamento rettilineo $\overrightarrow{\Delta S}$ che unisca due punti del campo opportunamente vicini fra loro P_i e P_f ; tali da poter considerare con precisione arbitraria \vec{F} : costante lungo $\overrightarrow{\Delta S}$, perpendicolare a $\overrightarrow{P_i P}$ e parallela a $\overrightarrow{P P_f}$.

Il lavoro lungo $\overrightarrow{\Delta S}$ è quindi elementare e può essere calcolato come segue.

$$L = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta S} = \vec{F} \cdot (\overrightarrow{P_i P} + \overrightarrow{P P_f}) = \overbrace{\vec{F} \cdot \overrightarrow{P_i P}}^{=0} + \vec{F} \cdot \overrightarrow{P P_f} = F_r(r_f - r_i) \quad (5.5)$$

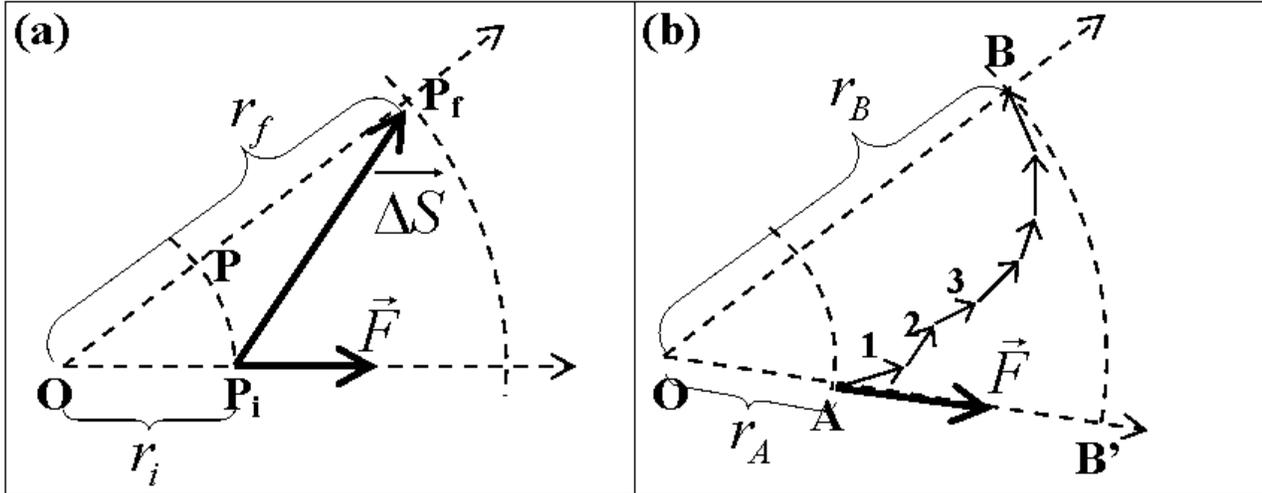


Figura 5.2: Calcolo del lavoro in un campo centrale

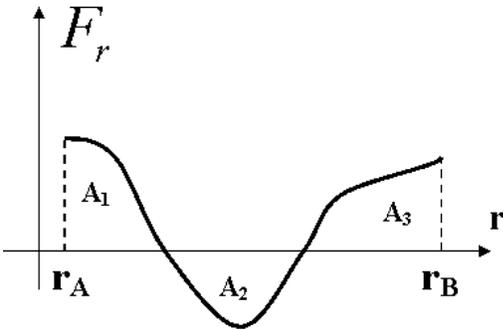
Un qualsiasi percorso che unisca due punti generici del campo A e B , vedi figura 5.2(b), può essere sempre opportunamente approssimato con precisione arbitraria per mezzo di una poligonale.

Lungo ciascuno dei tratti della poligonale può applicarsi il risultato espresso dalla 5.5, ottenendo per il lavoro lungo tutta la poligonale, con ovvio significato dei simboli:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \dots = F_{r1}(r_{1f} - r_{1i}) + F_{r2}(r_{2f} - r_{2i}) + F_{r3}(r_{3f} - r_{3i}) + \dots \quad (5.6)$$

Il risultato 5.6 esprime formalmente lo stesso significato del lavoro di una forza variabile calcolato lungo un percorso rettilineo, dato dalla 5.1; lo stesso lavoro che avremmo calcolato lungo il percorso rettilineo $\overrightarrow{AB'}$ (definendo $\overline{OB} = \overline{OB'}$), **indipendentemente quindi dalla forma della poligonale di estremi A e B**, questo perché F_r dipende solo da r (e non ad esempio dal particolare asse radiale sul quale consideriamo il percorso rettilineo).

Da quest'ultima osservazione conclusiva possiamo pertanto affermare che un campo di forza centrale è conservativo.

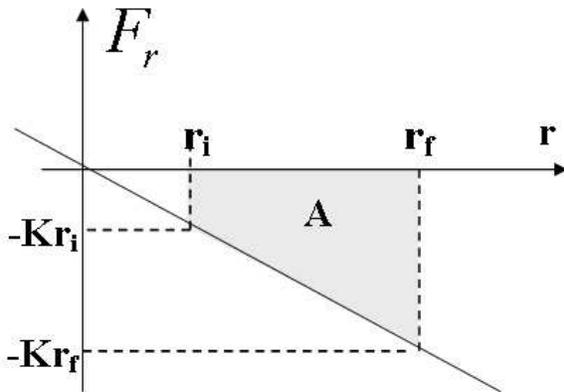


Conoscendo in maniera precisa l'espressione di F_r in funzione di r , fra r_A e r_B , la 5.6 può essere calcolata esattamente, come area compresa fra il grafico di F_r e l'asse r .

$$L = A_1 - A_2 + A_3$$

Vediamo a tal proposito alcuni esempi notevoli riscontrabili in casi reali.

$F_r = -Kr$ con $K > 0$: forza elastica



$$L = A = -\left(\frac{Kr_f \cdot r_f}{2} - \frac{Kr_i \cdot r_i}{2}\right) = \frac{Kr_i^2}{2} - \frac{Kr_f^2}{2}$$

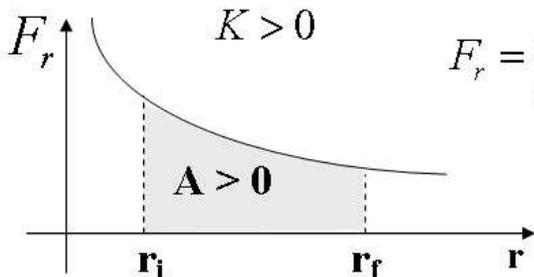
L'energia potenziale elastica avrà quindi la seguente espressione

$$U = \frac{1}{2}Kr^2 + C$$

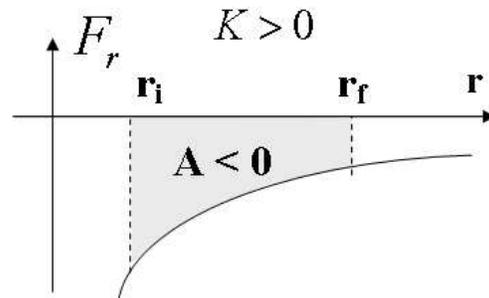
Dove si pone convenzionalmente

$$U(r = 0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$F_r = \frac{K}{r^2}$: forza gravitazionale ($K = Gm_1m_2$), forza di Coulomb ($K = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}$)



$$F_r = \frac{K}{r^2}$$



Indipendentemente dal segno di K , la determinazione del lavoro va effettuata attraverso un semplice calcolo integrale.

$$L = \int_{r_i}^{r_f} \frac{K}{r^2} dr = \left[-\frac{K}{r} \right]_{r_i}^{r_f} = \frac{K}{r_i} - \frac{K}{r_f}$$

L'energia potenziale per un campo di forza centrale proporzionale all'inverso del quadrato della distanza dal centro avrà quindi la seguente espressione

$$U = \frac{K}{r} + C$$

Dove si pone convenzionalmente $U(r \rightarrow \infty) = 0 \Rightarrow C = 0$

5.6 Conservazione dell'energia

Definizione 5.9 (energia meccanica) *La somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale associate ad un sistema fisico si definisce energia meccanica e si indica generalmente con la lettera E .*

$$E = E_c + U$$

Teorema 5.2 (conservazione dell'energia meccanica) *In un campo di forza conservativo l'energia meccanica di un sistema fisico si conserva, cioè rimane costante durante qualunque movimento del sistema stesso.*

$$\Delta E = 0 \quad \text{ovvero} \quad E_f = E_i$$

$$\begin{aligned} \underline{Dim} \quad & \begin{cases} L = \Delta E_c \\ L = -\Delta U \end{cases} \Rightarrow \Delta E_c = \Delta U \\ & \Rightarrow E_{cf} - E_{ci} = U_i - U_f \\ & \Rightarrow \underbrace{E_{cf} + U_f}_{E_f} = \underbrace{E_{ci} + U_i}_{E_i} \Rightarrow E_f = E_i \quad \text{c.v.d.} \end{aligned}$$

Osservazione. È possibile applicare la legge di conservazione dell'energia meccanica anche in presenza di forze non conservative purché queste compiano lavoro nullo, infatti

$$\begin{cases} L = (\vec{F}_c + \vec{F}_{nc}) \cdot \vec{\Delta S} = \Delta E_c & \text{sempre} \\ L = (\vec{F}_c + \vec{F}_{nc}) \cdot \vec{\Delta S} = \vec{F}_c \cdot \vec{\Delta S} + \vec{F}_{nc} \cdot \vec{\Delta S} = -\Delta U + \underbrace{\vec{F}_{nc} \cdot \vec{\Delta S}}_{=0 \text{ per ipotesi}} = -\Delta U \end{cases} \quad (5.7)$$

e queste ipotesi permettono di ottenere banalmente la stessa tesi del teorema di conservazione sopra dimostrato. Nel caso generale in cui L_{nc} abbia un valore qualsiasi, dalle 5.7 si ricava facilmente il seguente

Teorema 5.3 (generale di conservazione dell'energia meccanica) *In un campo di forza qualsiasi la variazione dell'energia meccanica di un sistema fisico è sempre uguale al lavoro fatto dalle forze non conservative del campo applicate al sistema stesso.*

$$\Delta E = L_{nc} \quad \text{ovvero} \quad E_f = E_i + L_{nc}$$

Appendice A

GNU Free Documentation License

Version 1.1, March 2000

*Copyright (C) 2000 Free Software Foundation, Inc.
59 Temple Place, Suite 330, Boston, MA 02111-1307 USA
Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies
of this license document, but changing it is not allowed.*

0. PREAMBLE

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other written document free in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondly, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of copyleft, which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. The Document, below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as you.

A Modified Version of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A Secondary Section is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall

directly within that overall subject. (For example, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The Invariant Sections are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License.

The Cover Texts are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License.

A Transparent copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, whose contents can be viewed and edited directly and straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup has been designed to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. A copy that is not Transparent is called Opaque.

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML designed for human modification. Opaque formats include PostScript, PDF, proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML produced by some word processors for output purposes only.

The Title Page means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, Title Page means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.

2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or non-commercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies of the Document numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the

publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a publicly-accessible computer-network location containing a complete Transparent copy of the Document, free of added material, which the general network-using public has access to download anonymously at no charge using public-standard network protocols. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission. B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has less than five). C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher. D. Preserve all the copyright notices of the Document. E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices. F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below. G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice. H. Include an unaltered copy of this License. I. Preserve the section entitled History, and its title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section entitled History in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence. J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on.

These may be placed in the History section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission. K. In any section entitled Acknowledgements or Dedications, preserve the section's title, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein. L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles. M. Delete any section entitled Endorsements. Such a section may not be included in the Modified Version. N. Do not retitle any existing section as Endorsements or to conflict in title with any Invariant Section.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section entitled Endorsements, provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties—for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections entitled History in the various original documents, forming one section entitled History; likewise combine any sections entitled Acknowledgements, and any sections entitled Dedications. You must delete all sections entitled Endorsements.

6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under

this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, does not as a whole count as a Modified Version of the Document, provided no compilation copyright is claimed for the compilation. Such a compilation is called an aggregate, and this License does not apply to the other self-contained works thus compiled with the Document, on account of their being thus compiled, if they are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one quarter of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that surround only the Document within the aggregate. Otherwise they must appear on covers around the whole aggregate.

8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License provided that you also include the original English version of this License. In case of a disagreement between the translation and the original English version of this License, the original English version will prevail.

9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See <http://www.gnu.org/copyleft/>.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License or any later version applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If

the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

Copyright (c) YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.1 or any later version published by the Free Software Foundation; with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST. A copy of the license is included in the section entitled GNU Free Documentation License. If you have no Invariant Sections, write with no Invariant Sections instead of saying which ones are invariant. If you have no Front-Cover Texts, write no Front-Cover Texts instead of Front-Cover Texts being LIST; likewise for Back-Cover Texts.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.

Questo documento è la traduzione non ufficiale (e quindi senza alcun valore legale) della GNU FDL. E' stata inserita al solo scopo di aiutare il lettore italiano nella comprensione del contenuto. Eventuali controversie legali saranno risolte esclusivamente in base alla versione originale di questo documento.

Versione 1.1, Marzo 2000

Copyright (C) 2000 Free Software Foundation, Inc. 59 Temple Place, Suite 330, Boston, MA 02111-1307 USA Chiunque può copiare e distribuire copie letterali di questo documento di licenza, ma non ne è permessa la modifica.

0. PREAMBOLO

Lo scopo di questa licenza è di rendere un manuale, un testo o altri documenti scritti liberi nel senso di assicurare a tutti la libertà effettiva di copiarli e redistribuirli, con o senza modifiche, a fini di lucro o no. In secondo luogo questa licenza prevede per autori ed editori il modo per ottenere il giusto riconoscimento del proprio lavoro, preservandoli dall'essere considerati responsabili per modifiche apportate da altri. Questa licenza è un copyleft: ciò vuol dire che i lavori che derivano dal documento originale devono essere ugualmente liberi. È il complemento alla GNU General Public License, che è una licenza di tipo copyleft pensata per il software libero. Abbiamo progettato questa licenza al fine di applicarla alla documentazione del software libero, perché il software libero ha bisogno di documentazione libera: un programma libero dovrebbe accompagnarsi a manuali che forniscano la stessa libertà del software. Ma questa licenza non è limitata alla documentazione del software; può essere utilizzata per ogni testo che tratti un qualsiasi argomento e al di là dell'avvenuta pubblicazione cartacea. Raccomandiamo principalmente questa licenza per opere che abbiano fini didattici o per manuali di consultazione.

1. APPLICABILITÀ E DEFINIZIONI

Questa licenza si applica a qualsiasi manuale o altra opera che contenga una nota messa dal detentore del copyright che dica che si può distribuire nei termini di questa licenza. Con Documento, in seguito ci si riferisce a qualsiasi manuale o opera. Ogni fruitore è un destinatario della licenza e viene indicato con voi. Una versione modificata di un documento è ogni opera contenente il documento stesso o parte di esso, sia riprodotto alla lettera che con modifiche, oppure traduzioni in un'altra lingua. Una sezione secondaria è un'appendice cui si fa riferimento o una premessa del documento e riguarda esclusivamente il rapporto dell'editore o dell'autore del documento con l'argomento generale del documento stesso (o argomenti affini) e non contiene nulla che possa essere compreso nell'argomento principale. (Per esempio, se il documento è in parte un manuale di matematica, una sezione secondaria non può contenere spiegazioni di matematica). Il rapporto con l'argomento può essere un tema collegato storicamente con il soggetto principale o con soggetti affini, o essere costituito da argomentazioni legali, commerciali, filosofiche, etiche o politiche pertinenti. Le sezioni non modificabili sono alcune sezioni secondarie i cui titoli sono esplicitamente dichiarati essere sezioni non modificabili, nella nota che indica che il documento è realizzato sotto questa licenza. I testi copertina sono dei brevi brani di testo che sono elencati nella nota che indica che il documento è realizzato sotto questa licenza. Una copia trasparente del documento indica una copia leggibile da un calcolatore, codificata in un formato le cui specifiche sono disponibili pubblicamente, i cui contenuti possono essere visti e modificati direttamente, ora e in futuro, con generici editor di testi o (per immagini composte da pixel) con generici editor di immagini o (per i disegni) con

qualche editor di disegni ampiamente diffuso, e la copia deve essere adatta al trattamento per la formattazione o per la conversione in una varietà di formati atti alla successiva formattazione. Una copia fatta in un altro formato di file trasparente il cui markup è stato progettato per intralciare o scoraggiare modifiche future da parte dei lettori non è trasparente. Una copia che non è trasparente è opaca. Esempi di formati adatti per copie trasparenti sono l'ASCII puro senza markup, il formato di input per Texinfo, il formato di input per LaTeX, SGML o XML accoppiati ad una DTD pubblica e disponibile, e semplice HTML conforme agli standard e progettato per essere modificato manualmente. Formati opachi sono PostScript, PDF, formati proprietari che possono essere letti e modificati solo con word processor proprietari, SGML o XML per cui non è in genere disponibile la DTD o gli strumenti per il trattamento, e HTML generato automaticamente da qualche word processor per il solo output. La pagina del titolo di un libro stampato indica la pagina del titolo stessa, più qualche pagina seguente per quanto necessario a contenere in modo leggibile, il materiale che la licenza prevede che compaia nella pagina del titolo. Per opere in formati in cui non sia contemplata esplicitamente la pagina del titolo, con pagina del titolo si intende il testo prossimo al titolo dell'opera, precedente l'inizio del corpo del testo.

2. COPIE ALLA LETTERA

Si può copiare e distribuire il documento con l'ausilio di qualsiasi mezzo, per fini di lucro e non, fornendo per tutte le copie questa licenza, le note sul copyright e l'avviso che questa licenza si applica al documento, e che non si aggiungono altre condizioni al di fuori di quelle della licenza stessa. Non si possono usare misure tecniche per impedire o controllare la lettura o la produzione di copie successive alle copie che si producono o distribuiscono. Però si possono ricavare compensi per le copie fornite. Se si distribuiscono un numero sufficiente di copie si devono seguire anche le condizioni della sezione 3. Si possono anche prestare copie e con le stesse condizioni sopra menzionate possono essere utilizzate in pubblico.

3. COPIARE IN NOTEVOLI QUANTITÀ

Se si pubblicano a mezzo stampa più di 100 copie del documento, e la nota della licenza indica che esistono uno o più testi copertina, si devono includere nelle copie, in modo chiaro e leggibile, tutti i testi copertina indicati: il testo della prima di copertina in prima di copertina e il testo di quarta di copertina in quarta di copertina. Ambedue devono identificare l'editore che pubblica il documento. La prima di copertina deve presentare il titolo completo con tutte le parole che lo compongono egualmente visibili ed evidenti. Si può aggiungere altro materiale alle copertine. Il copiare con modifiche limitate alle sole copertine, purché si preservino il titolo e le altre condizioni viste in precedenza, è considerato alla stregua di copiare alla lettera. Se il testo richiesto per le copertine è troppo voluminoso per essere riprodotto in modo leggibile, se ne può mettere una prima parte per quanto ragionevolmente può stare in copertina, e continuare nelle pagine immediatamente seguenti. Se si pubblicano o distribuiscono copie opache del documento in numero superiore a 100, si deve anche includere una copia trasparente leggibile da un calcolatore per ogni copia o menzionare per ogni copia opaca un indirizzo di una rete di calcolatori pubblicamente accessibile in cui vi sia una copia trasparente completa del documento, spogliato di materiale aggiuntivo, e a cui si possa accedere anonimamente e gratuitamente per scaricare il documento usando i protocolli standard e pubblici generalmente usati. Se si adotta l'ultima opzione, si deve prestare la giusta attenzione, nel momento in cui si inizia la distribuzione in quantità elevata di copie opache, ad assicurarsi che la copia trasparente rimanga accessibile all'indirizzo stabilito fino ad almeno un anno di distanza dall'ultima distribuzione (direttamente o attraverso rivenditori) di quell'edizione al pubblico. È caldamente consigliato, benché non obbligatorio, contattare l'autore del documento prima di

distribuirne un numero considerevole di copie, per metterlo in grado di fornire una versione aggiornata del documento.

4. MODIFICHE

Si possono copiare e distribuire versioni modificate del documento rispettando le condizioni delle precedenti sezioni 2 e 3, purché la versione modificata sia realizzata seguendo scrupolosamente questa stessa licenza, con la versione modificata che svolga il ruolo del documento, così da estendere la licenza sulla distribuzione e la modifica a chiunque ne possieda una copia. Inoltre nelle versioni modificate si deve:

A. Usare nella pagina del titolo (e nelle copertine se ce ne sono) un titolo diverso da quello del documento, e da quelli di versioni precedenti (che devono essere elencati nella sezione storia del documento ove presenti). Si può usare lo stesso titolo di una versione precedente se l'editore di quella versione originale ne ha dato il permesso. B. Elencare nella pagina del titolo, come autori, una o più persone o gruppi responsabili in qualità di autori delle modifiche nella versione modificata, insieme ad almeno cinque fra i principali autori del documento (tutti gli autori principali se sono meno di cinque). C. Dichiarare nella pagina del titolo il nome dell'editore della versione modificata in qualità di editore. D. Conservare tutte le note sul copyright del documento originale. E. Aggiungere un'appropriata licenza per le modifiche di seguito alle altre licenze sui copyright. F. Includere immediatamente dopo la nota di copyright, un avviso di licenza che dia pubblicamente il permesso di usare la versione modificata nei termini di questa licenza, nella forma mostrata nell'addendum alla fine di questo testo. G. Preservare in questo avviso di licenza l'intera lista di sezioni non modificabili e testi copertina richieste come previsto dalla licenza del documento. H. Includere una copia non modificata di questa licenza. I. Conservare la sezione intitolata Storia, e il suo titolo, e aggiungere a questa un elemento che riporti al minimo il titolo, l'anno, i nuovi autori, e gli editori della versione modificata come figurano nella pagina del titolo. Se non ci sono sezioni intitolate Storia nel documento, createne una che riporti il titolo, gli autori, gli editori del documento come figurano nella pagina del titolo, quindi aggiungete un elemento che descriva la versione modificata come detto in precedenza. J. Conservare l'indirizzo in rete riportato nel documento, se c'è, al fine del pubblico accesso ad una copia trasparente, e possibilmente l'indirizzo in rete per le precedenti versioni su cui ci si è basati. Questi possono essere collocati nella sezione Storia. Si può omettere un indirizzo di rete per un'opera pubblicata almeno quattro anni prima del documento stesso, o se l'originario editore della versione cui ci si riferisce ne dà il permesso. K. In ogni sezione di Ringraziamenti o Dediche, si conservino il titolo, il senso, il tono della sezione stessa. L. Si conservino inalterate le sezioni non modificabili del documento, nei propri testi e nei propri titoli. I numeri della sezione o equivalenti non sono considerati parte del titolo della sezione. M. Si cancelli ogni sezione intitolata Riconoscimenti. Solo questa sezione può non essere inclusa nella versione modificata. N. Non si modifichi il titolo di sezioni esistenti come miglioria o per creare confusione con i titoli di sezioni non modificabili.

Se la versione modificata comprende nuove sezioni di primaria importanza o appendici che ricadono in sezioni secondarie, e non contengono materiale copiato dal documento, si ha facoltà di rendere non modificabili quante sezioni si voglia. Per fare ciò si aggiunga il loro titolo alla lista delle sezioni immutabili nella nota di copyright della versione modificata. Questi titoli devono essere diversi dai titoli di ogni altra sezione. Si può aggiungere una sezione intitolata Riconoscimenti, a patto che non contenga altro che le approvazioni alla versione modificata prodotte da vari soggetti—per esempio, affermazioni di revisione o che il testo è stato approvato da una organizzazione come la definizione normativa di uno standard. Si può aggiungere un

brano fino a cinque parole come Testo Copertina, e un brano fino a 25 parole come Testo di Retro Copertina, alla fine dell'elenco dei Testi Copertina nella versione modificata. Solamente un brano del Testo Copertina e uno del Testo di Retro Copertina possono essere aggiunti (anche con adattamenti) da ciascuna persona o organizzazione. Se il documento include già un testo copertina per la stessa copertina, precedentemente aggiunto o adattato da voi o dalla stessa organizzazione nel nome della quale si agisce, non se ne può aggiungere un altro, ma si può rimpiazzare il vecchio ottenendo l'esplicita autorizzazione dall'editore precedente che aveva aggiunto il testo copertina. L'autore/i e l'editore/i del documento non ottengono da questa licenza il permesso di usare i propri nomi per pubblicizzare la versione modificata o rivendicare l'approvazione di ogni versione modificata.

5. UNIONE DI DOCUMENTI

Si può unire il documento con altri realizzati sotto questa licenza, seguendo i termini definiti nella precedente sezione 4 per le versioni modificate, a patto che si includa l'insieme di tutte le Sezioni Invarianti di tutti i documenti originali, senza modifiche, e si elenchino tutte come Sezioni Invarianti della sintesi di documenti nella licenza della stessa. Nella sintesi è necessaria una sola copia di questa licenza, e multiple sezioni invarianti possono essere rimpiazzate da una singola copia se identiche. Se ci sono multiple Sezioni Invarianti con lo stesso nome ma contenuti differenti, si renda unico il titolo di ciascuna sezione aggiungendovi alla fine e fra parentesi, il nome dell'autore o editore della sezione, se noti, o altrimenti un numero distintivo. Si facciano gli stessi aggiustamenti ai titoli delle sezioni nell'elenco delle Sezioni Invarianti nella nota di copyright della sintesi. Nella sintesi si devono unire le varie sezioni intitolate storia nei vari documenti originali di partenza per formare una unica sezione intitolata storia; allo stesso modo si unisca ogni sezione intitolata Ringraziamenti, e ogni sezione intitolata Dediche. Si devono eliminare tutte le sezioni intitolate Riconoscimenti.

6. RACCOLTE DI DOCUMENTI

Si può produrre una raccolta che consista del documento e di altri realizzati sotto questa licenza; e rimpiazzare le singole copie di questa licenza nei vari documenti con una sola inclusa nella raccolta, solamente se si seguono le regole fissate da questa licenza per le copie alla lettera come se si applicassero a ciascun documento. Si può estrarre un singolo documento da una raccolta e distribuirlo individualmente sotto questa licenza, solo se si inserisce una copia di questa licenza nel documento estratto e se si seguono tutte le altre regole fissate da questa licenza per le copie alla lettera del documento.

7. RACCOGLIERE INSIEME A LAVORI INDIPENDENTI

Una raccolta del documento o sue derivazioni con altri documenti o lavori separati o indipendenti, all'interno di o a formare un archivio o un supporto per la distribuzione, non è una versione modificata del documento nella sua interezza, se non ci sono copyright per l'intera raccolta. Ciascuna raccolta si chiama allora aggregato e questa licenza non si applica agli altri lavori contenuti in essa che ne sono parte, per il solo fatto di essere raccolti insieme, qualora non siano però loro stessi lavori derivati dal documento. Se le esigenze del Testo Copertina della sezione 3 sono applicabili a queste copie del documento allora, se il documento è inferiore ad un quarto dell'intero aggregato i Testi Copertina del documento possono essere piazzati in copertine che delimitano solo il documento all'interno dell'aggregato. Altrimenti devono apparire nella copertina dell'intero aggregato.

8. TRADUZIONI

La traduzione è considerata un tipo di modifica, e di conseguenza si possono distribuire traduzioni del documento seguendo i termini della sezione 4. Rimpiazzare sezioni non modificabili con traduzioni richiede un particolare permesso da parte dei detentori del diritto d'autore, ma si possono includere traduzioni di una o più sezioni non modificabili in aggiunta alle versioni originali di queste sezioni immutabili. Si può fornire una traduzione della presente licenza a patto che si includa anche l'originale versione inglese di questa licenza. In caso di discordanza fra la traduzione e l'originale inglese di questa licenza la versione originale inglese prevale sempre. **9. TERMINI**

Non si può applicare un'altra licenza al documento, copiarlo, modificarlo, o distribuirlo al di fuori dei termini espressamente previsti da questa licenza. Ogni altro tentativo di applicare un'altra licenza al documento, copiarlo, modificarlo, o distribuirlo è deprecato e pone fine automaticamente ai diritti previsti da questa licenza. Comunque, per quanti abbiano ricevuto copie o abbiano diritti coperti da questa licenza, essi non ne cessano se si rimane perfettamente coerenti con quanto previsto dalla stessa.

10. REVISIONI FUTURE DI QUESTA LICENZA

La Free Software Foundation può pubblicare nuove, rivedute versioni della Gnu Free Documentation License volta per volta. Qualche nuova versione potrebbe essere simile nello spirito alla versione attuale ma differire in dettagli per affrontare nuovi problemi e concetti. Si veda <http://www.gnu.org/copyleft>. Ad ogni versione della licenza viene dato un numero che distingue la versione stessa. Se il documento specifica che si riferisce ad una versione particolare della licenza contraddistinta dal numero o ogni versione successiva, si ha la possibilità di seguire termini e condizioni sia della versione specificata che di ogni versione successiva pubblicata (non come bozza) dalla Free Software Foundation. Se il documento non specifica un numero di versione particolare di questa licenza, si può scegliere ogni versione pubblicata (non come bozza) dalla Free Software Foundation. Come usare questa licenza per i vostri documenti Per applicare questa licenza ad un documento che si è scritto, si includa una copia della licenza nel documento e si inserisca il seguente avviso di copyright appena dopo la pagina del titolo: Copyright (c) ANNO VOSTRO NOME. È garantito il permesso di copiare, distribuire e/o modificare questo documento seguendo i termini della GNU Free Documentation License, Versione 1.1 o ogni versione successiva pubblicata dalla Free Software Foundation; con le Sezioni Non Modificabili ELENCARNE I TITOLI, con i Testi Copertina ELENCO, e con i Testi di Retro Copertina ELENCO. Una copia della licenza è acclusa nella sezione intitolata GNU Free Documentation License. Se non ci sono Sezioni non Modificabili, si scriva senza Sezioni non Modificabili invece di dire quali sono non modificabili. Se non c'è Testo Copertina, si scriva nessun Testo Copertina invece di il testo Copertina è ELENCO; e allo stesso modo si operi per il Testo di Retro Copertina. Se il vostro documento contiene esempi non banali di programma in codice sorgente si raccomanda di realizzare gli esempi contemporaneamente applicandovi anche una licenza di software libero di vostra scelta, come ad esempio la GNU General Public License, al fine di permetterne l'uso come software libero.

*La copia letterale e la distribuzione di questo articolo nella sua integrità sono permesse con qualsiasi mezzo, a condizione che questa nota sia riprodotta. Aggiornato: 20 Settembre 2000
Andrea Ferro, Leandro Noferini e Franco Vite.*