# Lezioni di Analisi Matematica 3

## corso di Laurea in Fisica

## a.a. 2005-'06

G. Molteni

M. Vignati

CAPITOLO 4

# La misura di Lebesgue

Nei corsi di Analisi Matematica del primo anno di studi universitari viene solitamente introdotta una nozione di integrale per funzioni reali di una variabile reale basata sulla teoria elaborata da Riemann alla metà del XIX secolo. Essa può essere estesa a funzioni di più variabili consentendo quindi di definire gli integrali multipli. Alla base di questa costruzione sta la teoria della misura secondo Peano-Jordan che assegna ad una opportuna classe di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ una "misura" che riprende i concetti geometrici di lunghezza di un intervallo ($n = 1$), area di un rettangolo ($n = 2$), volume di un parallelepipede ($n = 3$).

L'integrale (multiplo) di Riemann, e la misura di Peano-Jordan a partire dalla quale viene costruito, sono duttili strumenti che permettono di risolvere un'ampia gamma di problemi di calcolo, tuttavia risentono di alcune limitazioni strutturali che ne impediscono l'utilizzo in molte situazioni; ad esempio non tutti i sottoinsiemi aperti né tutti i compatti di $\mathbb{R}^n$ possono essere "misurati" ed inoltre questa teoria è particolarmente debole nei confronti del passaggio al limite sotto il segno di integrale.
La teoria della misura e dell'integrazione sviluppata da Lebesgue agli albori del XX secolo (la teoria risale infatti al 1902) rimedia a questi inconvenienti: a fronte di un processo costruttivo un po' più complicato, infatti, si ottengono risultati decisamente più generali e validi, tra l'altro, per una classe di funzioni più ampia di quelle integrabili secondo la teoria di Riemann.

In questo capitolo ci occupiamo della costruzione della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$.

## 4.1. Definizione e proprietà della misura esterna

Un *intervallo (n-dimensionale)* di $\mathbb{R}^n$ è un sottoinsieme $I$ della forma

$$I := [a_1, b_1] \times \ \dots \ \times [a_n, b_n] = \{\boldsymbol{x} : \ a_i \le x_i \le b_i \ , \ i = 1, 2, \dots, n\}$$

dove $a_i < b_i$ per ogni $i$. (Per $n = 1$ corrisponde ad un segmento chiuso, per $n = 2$ ad un rettangolo, ...) L'intervallo $I$ si ottiene come unione $I^\circ \cup \partial I$ del suo interno

$$I^\circ = (a_1, b_1) \times \ \dots \ \times (a_n, b_n) = \{\boldsymbol{x} : \ a_i < x_i < b_i \ , \ i = 1, 2, \dots, n\} \ ,$$

che è un insieme aperto, e della sua frontiera $\partial I$, che è unione di $2n$ sottoinsiemi appartenenti agli iperpiani $x_i = a_i$ oppure $x_i = b_i$.

Il *volume (n-dimensionale)* di $I$ è definito come prodotto delle lunghezze dei suoi spigoli, $v(I) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$, è un numero positivo e chiaramente non cambia se l'intervallo viene traslato.

**Lemma 4.1** *Sia $I$ un intervallo, e sia $\varepsilon$ un arbitrario numero positivo. Allora, è possibile trovare due intervalli $H$ e $J$ tali che*

$$H \subset I^\circ \subset I \subset J^\circ \quad e \quad v(J) - \varepsilon < v(I) < v(H) + \varepsilon \ . \tag{4.1}$$

**Dim.** Poiché il volume di un intervallo non cambia con le traslazioni, pensiamo che $I$ abbia centro nell'origine e quindi abbia la forma $I = [-b_1, b_1] \times \ \cdots \ \times [-b_n, b_n]$ con $b_i > 0$ per ogni $i$. Per ogni $\lambda > 1$ l'intervallo

$$J = [-\lambda b_1, \lambda b_1] \times \cdots \times [-\lambda b_n, \lambda b_n]$$

ha volume $v(J) = \lambda^n v(I)$, e chiaramente $I \subset J^\circ$, perché $[-b_i, b_i] \subset (-\lambda b_i, \lambda b_i)$ per ogni $i$. È sufficiente usare $\lambda < (1 + \frac{\varepsilon}{v(I)})^{1/n}$ per ottenere $v(J) - \varepsilon < v(I)$. In modo analogo, l'intervallo $H$ può essere costruito "contraendo" $I$, cioè utilizzando un opportuno $\lambda < 1$. ■

Sia ora $E$ un sottoinsieme *qualsiasi* di $\mathbb{R}^n$, e sia $\mathcal{R}(E) = \{I_k\}_{k \in \boldsymbol{K}}$, $\boldsymbol{K} \subseteq \mathbb{N}$, un suo *ricoprimento* (mediante intervalli), cioè *una collezione al più numerabile* di intervalli la cui unione contiene $E$ (Vd. Fig. 4.1). Ad $\mathcal{R}(E)$ viene associato il numero[1]

$$V(\mathcal{R}(E)) = \sum_{I_k \in \mathcal{R}(E)} v(I_k) \tag{4.2}$$

[1]Qui e nel seguito, usiamo il termine "numero" per indicare un qualsiasi elemento dell'insieme $\overline{\mathbb{R}}$ costituito da tutti i numeri reali e dai due simboli $+\infty$ e $-\infty$.

che indica la somma dei volumi di tutti gli intervalli del ricoprimento.

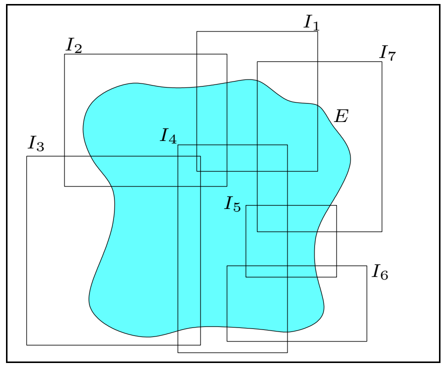


FIGURA 4.1*: un ricoprimento di* $E$.

**Def.** La *misura esterna (di Lebesgue)* di un insieme $E$ è definita come

$$m^*(E) := \inf_{\mathcal{R}(E)} V(\mathcal{R}(E)) \; . \tag{4.3}$$

In realtà, la notazione $m^*$ è un po' ambigua, perché non viene indicata la dipendenza dalla dimensione $n$; avremo cura di esplicitare questa dipendenza (peraltro già presente nella nozione di volume) quando sarà importante distinguere tra diverse dimensioni, scrivendo $m_n^*$.

Ovviamente, dalla definizione segue che $0 \le m^*(E) \le +\infty$ per ogni insieme $E$. Inoltre, $m^*$ è, come il volume, invariante rispetto alle traslazioni. Tra le altre proprietà più semplici della misura esterna, segnaliamo

**Proposizione 4.1** *La misura esterna di un intervallo* $I$ *coincide con il suo volume, cioè*

$$m^*(I) = v(I) \; .$$

**Dim.** Tra i possibili ricoprimenti di $I$ c'è quello che contiene $I$ come unico elemento, e questo mostra che $m^*(I) \le v(I)$. Sia ora $\varepsilon > 0$, e sia $\mathcal{R}(I) = \{I_k\}_k$ un ricoprimento di $I$. Seguendo il precedente Lemma 4.1, ad ogni $I_k$ associamo un intervallo $J_k$ in modo che, per ogni $k$,

$$I_k \subset J_k^\circ \quad \text{e} \quad v(J_k) - \varepsilon 2^{-k} < v(I_k) \; .$$

Allora $I \subset \cup_k I_k \subset \cup_k J_k^\circ$, anzi, esiste un intero $N$ tale che

$$I \subset \cup_{k=1}^N J_k^\circ$$

per la compattezza di $I$. Ora

$$v(I) \leq \sum_{k=1}^{N} v(J_k) < \sum_{k=1}^{N} (v(I_k) + \varepsilon 2^{-k}) \leq \sum_k (v(I_k) + \varepsilon 2^{-k}) \leq V(\mathcal{R}(I)) + \varepsilon \, .$$

Passando all'estremo inferiore sui ricoprimenti $\mathcal{R}$ abbiamo perciò ottenuto

$$m^*(I) \leq v(I) < m^*(I) + \varepsilon \, ,$$

da cui la tesi. ■

**Proposizione 4.2 (monotonìa della misura esterna)** *Se $D \subset E$, allora si ha $m^*(D) \leq m^*(E)$.*

**Dim.** ogni ricoprimento di $E$ è anche un ricoprimento di $D$. ■

**Proposizione 4.3 (subadditività numerabile della misura esterna)** *Per ogni collezione numerabile $\{E_k\}_k$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ si ha*

$$m^*(\cup_k E_k) \leq \sum_k m^*(E_k) \, . \tag{4.4}$$

**Dim.** la tesi è ovvia nel caso in cui qualche $E_k$ abbia misura esterna infinita. In caso contrario, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ troviamo un ricoprimento $\mathcal{R}(E_k) = \{I_j^{(k)}\}_j$ che soddisfa $V(\mathcal{R}(E_k)) < m^*(E_k) + \varepsilon 2^{-k}$. Allora la collezione $\mathcal{R} = \{I_j^{(k)}\}_{k,j}$ è un ricoprimento al più numerabile di $\cup_k E_k$, quindi

$$m^*(\cup_k E_k) \leq \sum_{k,j} v(I_j^{(k)}).$$

Tutti gli addendi coinvolti sono positivi quindi possiamo esprimere la serie doppia come serie iterata (vd. Par 1.10 del Cap. 1), ottenendo

$$\begin{aligned} m^*(\cup_k E_k) &\leq \sum_k (\sum_j v(I_j^{(k)})) \\ &= \sum_k V(\mathcal{R}(E_k)) < \sum_k (m^*(E_k) + \varepsilon 2^{-k}) \\ &= \varepsilon + \sum_k m^*(E_k) \, . \end{aligned}$$

La tesi segue dall'arbitrarietà di $\varepsilon$. ■

**Oss. 4.1** Poiché un singolo punto ha misura esterna nulla, dalla (4.4) segue che ogni insieme costituito da al più un'infinità numerabile di punti ha misura esterna nulla. Nel Par. 1 della Sez. 5 presenteremo l'esempio di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ (il ternario di Cantor) che ha misura esterna (1-dimensionale) nulla e potenza del continuo.

**Oss. 4.2** Per definire la misura esterna in $\mathbb{R}^n$ abbiamo utilizzato intervalli con spigoli paralleli agli assi coordinati. È possibile dimostrare che il risultato è invariante rispetto alle rotazioni di $\mathbb{R}^n$. Così, i risultati visti e quelli che verranno dimostrati nel corso del capitolo sono indipendenti da rototraslazioni. Rispetto alle dilatazioni, invece, la misura esterna ($n$-dimensionale) è *positivamente omogenea* di grado $n$ ; questo significa che per ogni $\lambda > 0$ il dilatato

$$\lambda E := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = \lambda \boldsymbol{x},\, \boldsymbol{x} \in E\}$$

dell'insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ha misura esterna $m_n^*(\lambda E) = \lambda^n m_n^*(E)$.

**Oss. 4.3** Ogni segmento in $\mathbb{R}^2$ ha misura esterna (2-dimensionale) nulla. Infatti, il segmento $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$ può essere ricoperto con l'intervallo $I_\varepsilon := [0,1] \times [0,\varepsilon]$ per ogni $\varepsilon > 0$, e $v(I_\varepsilon) = \varepsilon$, per cui $m_2^*(S) = 0$. Ogni altro segmento di $\mathbb{R}^2$ può essere ottenuto da $S$ con opportune rototraslazioni e dilatazioni, e possiamo perciò ragionare come nell'osservazione precedente. Grazie alla subadditività numerabile, segue allora che ogni retta in $\mathbb{R}^2$ ha misura esterna (2-dimensionale) nulla.

Lo stesso tipo di ragionamento ci porta a concludere che ogni iperpiano di $\mathbb{R}^n$ ha misura esterna $n$-dimensionale nulla.

Tra i motivi che nel prossimo paragrafo ci porteranno ad abbandonare la misura esterna c'è anche il fatto che in alcuni casi la (4.4) può essere una disuguaglianza stretta pur avendo a che fare con insiemi a due a due disgiunti (vd. Par. 3, Sez. 5). Questo inconveniente relativo alla misura esterna si presenta con insiemi "patologici"; possiamo però mostrare che se gli insiemi in questione sono in qualche modo "ben separati", l'additività vale. Infatti:

**Proposizione 4.4** *Se $d(D, E) > 0$, allora $m^*(D \cup E) = m^*(D) + m^*(E)$.*

**Dim.** Fissato un arbitrario $\varepsilon > 0$, troviamo un ricoprimento $\{I_k\}$ di $D \cup E$ per il quale $\sum_k v(I_k) < m^*(D \cup E) + \varepsilon$, e, al più suddividendo gli $I_k$ in vari sottointervalli, possiamo pensare che tutti abbiano diametro inferiore a $d(D,E)>0$. Perciò, la collezione $\{I_k\}$ viene divisa in due famiglie distinte $\{J_k^D\}$ e $\{J_k^E\}$, che ricoprono $D$ ed $E$ separatamente. Così

$$m^*(D)+m^*(E)\le\sum_k v(J_k^D)+\sum_k v(J_k^E)=\sum_k v(I_k)<m^*(D\cup E)+\varepsilon\ ;$$

combinando con (4.4) otteniamo la tesi. ■

Conviene notare che la condizione $d(D,E)>0$ è certamente verificata se gli insiemi in questione sono compatti e disgiunti. Inoltre, questo risultato è chiaramente estendibile ad un qualsiasi numero finito di insiemi.

Gli insiemi aperti di $\mathbb{R}^n$ svolgono un importante ruolo nel determinare la misura esterna di un insieme generico $E$, approssimandolo dall'esterno, come si vede con

**Teorema 4.1** *Per ogni* $E\in\mathbb{R}^n$ *e per ogni* $\varepsilon>0$ *esiste un insieme aperto* $G\supseteq E$ *tale che*

$$m^*(G)-\varepsilon<m^*(E)\le m^*(G) \tag{4.5}$$

**Dim.** Per la (4.2) troviamo un ricoprimento $\mathcal{R}(E)=\{I_k\}_k$ che approssima $m^*(E)$ per meno di $\varepsilon/2$. Ad ogni intervallo $I_k$, per il Lemma 4.1, associamo un intervallo $J_k$ che soddisfa $I_k\subset\overset{\circ}{J}_k$ e anche $v(J_k)<v(I_k)+\varepsilon 2^{-k-1}$. Così, $E$ è contenuto nell'insieme aperto $G:=\cup_k\overset{\circ}{J}_k$, e per la (4.4)

$$m^*(G)\le\sum_k v(J_k)<\sum_k(V(I_k)+\varepsilon\,2^{-k-1})<V(\mathcal{R}(E))+\frac{\varepsilon}{2}\le m^*(E)+\varepsilon\ .$$

La seconda disuguaglianza è ovvia, perché $E\subset G$. ■

**Oss. 4.4** Quest'ultimo risultato dice che la misura esterna di un generico $E$ può essere ottenuta come

$$m^*(E)=\inf_G m^*(G) \tag{4.6}$$

dove l'estremo inferiore è calcolato su tutti gli insiemi aperti $G$ che contengono $E$.

### 4.2. Gli insiemi misurabili secondo Lebesgue

Nella sezione precedente abbiamo associato ad un qualsiasi sottoinsieme $E$ di $\mathbb{R}^n$ il numero $m^*(E) \in [0, +\infty]$. Come preannunciato, questa completa generalità sulla scelta degli insiemi porta ad alcuni inconvenienti. Per lo sviluppo della teoria dell'integrazione risulta più conveniente selezionare alcuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, che vengono detti "misurabili" e proseguire con lo studio delle proprietà di $m^*$ ristretta solo a questi insiemi.

**Def.** Diciamo che un sottoinsieme $E$ è *misurabile (secondo Lebesgue)* se per ogni $\varepsilon > 0$ è possibile trovare un insieme aperto $G$ che lo contiene e tale che la misura esterna della loro differenza sia inferiore ad $\varepsilon$, ovvero

$$E \subseteq G \quad \text{e} \quad m^*(G \setminus E) < \varepsilon \,. \tag{4.7}$$

Con il simbolo $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ indichiamo la *classe degli insiemi misurabili.*

**Oss. 4.5** Alcune osservazioni.

- **a.** Un primo fatto che possiamo notare è che la classe $\mathcal{M}$ non è vuota, perché contiene certamente tutti gli insiemi aperti; infatti, se $E$ è aperto possiamo usare $G = E$ nella (4.7).
- **b.** Inoltre, ad $\mathcal{M}$ appartengono anche tutti gli insiemi di misura esterna nulla; infatti, se $m^*(E) = 0$ troviamo, grazie al Teor. 4.1, un aperto $G \supseteq E$ per il quale $\varepsilon > m^*(G) \geq m^*(G \setminus E)$.
- **c.** La (4.5) e la (4.7), per quanto simili, sono affermazioni ben diverse. Infatti, dalla subadditività di $m^*$ deduciamo che $m^*(G) \leq m^*(E) + m^*(G \setminus E)$ e così che da (4.7) segue immediatamente la (4.5). Non è invece vero il contrario poiché la (4.5) afferma che $m^*(G) \leq m^*(E) + \varepsilon$, ma da questo non possiamo dedurre $m^*(G \setminus E) < \varepsilon$.
- **d.** In seguito (vd. Sez 5, Par. 2) saremo in grado di costruire almeno un sottoinsieme non misurabile di $\mathbb{R}$ e potremo così verificare che $\mathcal{M}$ non contiene ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, per alcun $n$.

Proseguiamo il paragrafo descrivendo altre proprietà di $\mathcal{M}$.

**Teorema 4.2** *Se $E_k \in \mathcal{M}$ per $k \in \mathbb{N}$, allora $\cup_k E_k \in \mathcal{M}$. (In altre parole, la classe $\mathcal{M}$ è chiusa rispetto all'unione numerabile).*

**Dim.** Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $k$ immergiamo $E_k$ in un aperto $G_k$ in modo che $m^*(G_k \setminus E_k) < \varepsilon 2^{-k}$; allora $E := \cup_k E_k$ è contenuto nell'aperto $\cup_k G_k$, inoltre $G \setminus E \subseteq \cup_k (G_k \setminus E_k)$ e per la Prop. 4.3

$$m^*(G \setminus E) \leq m^*(\cup_k (G_k \setminus E_k)) \leq \sum_k m^*(G_k \setminus E_k) < \sum_k \varepsilon 2^{-k} = \varepsilon,$$

da cui segue la misurabilità di $\cup_k E_k$. ■

La dimostrazione del prossimo risultato è lunga ed articolata: ci limitiamo ad enunciarlo.

**Teorema 4.3** *Se $E \in \mathcal{M}$, anche $E^c := \mathbb{R}^n \setminus E \in \mathcal{M}$. (In altre parole, la classe $\mathcal{M}$ è chiusa rispetto al passaggio al complementare).*

**Corollario 4.1**

*i. Se $E_k \in \mathcal{M}$ per $k \in \mathbb{N}$, allora $\cap_k E_k \in \mathcal{M}$;*
*ii. Se $D, E \in \mathcal{M}$, allora $D \setminus E \in \mathcal{M}$.*

*(In altre parole, la classe $\mathcal{M}$ è chiusa rispetto all'intersezione numerabile e alla differenza).*

**Dim.** Abbiamo $\cap_k E_k = (\cup_k E_k^c)^c$ , per cui è sufficiente applicare i due teoremi precedenti. Per la seconda parte osserviamo che $D \setminus E = D \cap E^c$. ■

In (4.7) si è scelto di definire la misurabilità di un insieme utilizzando gli aperti che lo contengono; in quella sede avremmo anche potuto decidere di utilizzare invece gli insiemi chiusi contenuti nell'insieme. Infatti

**Corollario 4.2** *Un sottoinsieme $E$ di $\mathbb{R}^n$ è misurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme chiuso $F$ contenuto in $E$ e tale che la misura esterna della loro differenza sia inferiore ad $\varepsilon$, ovvero*

$$F \subseteq E \quad e \quad m^*(E \setminus F) < \varepsilon \,. \tag{4.7'}$$

**Dim.** Fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora, per il Teor. 4.3 e per (4.7)

$$E \in \mathcal{M} \iff E^c \in \mathcal{M} \iff \exists G \text{ aperto: } E^c \subseteq G \,,\ m^*(G \setminus E^c) < \varepsilon \,.$$

L'insieme $F = G^c$ è chiuso, contenuto in $E$, e poiché $G \setminus E^c = E \setminus F$ abbiamo la tesi. ■

## 4.3. Digressione sulla nozione di $\sigma$-algebra

Sia $X$ un insieme non vuoto e sia $\Sigma$ una collezione non vuota di suoi sottoinsiemi. Si dice che $\Sigma$ è una *$\sigma$-algebra* (di sottoinsiemi di $X$) se $\Sigma$ è chiusa rispetto all'unione numerabile e rispetto al passaggio al complementare, ovvero se

$$E_k \in \Sigma,\ k \in \mathbb{N} \implies \cup_k E \in \Sigma;$$
$$E \in \Sigma \implies E^c \in \Sigma\,.$$

Se questo accade, allora $\Sigma$ contiene necessariamente sia $X$ che l'insieme vuoto $\varnothing$, è chiusa rispetto all'intersezione numerabile e rispetto alla differenza.
Ovviamente è una $\sigma$-algebra la collezione $\mathcal{P}(X)$ di tutti i sottoinsiemi di $X$, ma spesso si è interessati alla seguente situazione: partendo da una collezione $\Omega$ di sottoinsiemi di $X$, costruire la "più piccola" $\sigma$-algebra $\Sigma$ che contiene tutti gli elementi presenti in $\Omega$. Si può dimostrare che questo processo è possibile e dà luogo a quella che viene chiamata la *$\sigma$-algebra generata da* $\Omega$. (Indicativamente, la si ottiene come intersezione di tutte le $\sigma$-algebre che contengono gli elementi di $\Omega$).

Torniamo al caso che ci interessa, in cui $X = \mathbb{R}^n$; abbiamo dimostrato nella sezione precedente che $\mathcal{M}$ è una $\sigma$-algebra. Inoltre, se $\Omega$ è la collezione di tutti gli insiemi aperti, la $\sigma$-algebra generata da $\Omega$ prende il nome di *$\sigma$-algebra di Borel*, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, ed i suoi elementi sono detti *insiemi boreliani*. Così conosciamo almeno tre $\sigma$-algebre di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \quad , \quad \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \quad , \quad \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

L'Oss. 4.5**d** afferma che $\mathcal{M}$ è strettamente contenuta in $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, mentre l'Oss.4.5**a** afferma che $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$; è possibile dimostrare (ma non lo facciamo in queste note) che esiste almeno un insieme misurabile secondo Lebesgue che non è boreliano, per cui valgono le inclusioni strette

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\,.$$

## 4.4. La misura di Lebesgue

La misura di Lebesgue $n$-dimensionale è definita come la restrizione della misura esterna $m^*$ alla classe $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ degli insiemi misurabili. In altre parole, se

$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ chiamiamo *misura (di Lebesgue) di* $E$ la sua misura esterna:

$$m(E) := m^*(E)\ . \tag{4.8}$$

Della funzione $m : \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \to [0,+\infty]$ conosciamo già alcune proprietà, quali l'invarianza rispetto alle traslazioni, la monotonìa e la subadditività numerabile (vd. Prop. 4.2 e 4.3). Tuttavia, la principale proprietà di $m$ che ci serve per sviluppare la teoria dell'integrazione e che non è valida per la misura esterna è la seguente:

**Teorema 4.4 (additività numerabile della misura)** *Per ogni collezione numerabile* $\{E_k\}_k$ *di sottoinsiemi mutuamente disgiunti di* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *si ha*

$$m(\cup_k E_k) = \sum_k m(E_k)\ . \tag{4.9}$$

**Dim.** Iniziamo con il caso in cui tutti gli $E_k$ sono limitati. Fissato $\varepsilon > 0$, a causa della subadditività di $m$ è sufficiente mostrare che

$$\sum_k m(E_k) \le m(\cup_k E_k) + \varepsilon\ .$$

Grazie al Cor. 4.2 troviamo, per ogni $k$, un chiuso $F_k \subseteq E_k$ con $m(E_k \setminus F_k) < \varepsilon 2^{-k}$. Gli insiemi $F_k$ sono chiusi e limitati, perciò compatti, e inoltre sono mutuamente disgiunti e quindi sono ben separati. Per la Prop. 4.4 la misura è additiva per ogni collezione finita degli $F_k$, e quindi

$$\begin{aligned}
\sum_k m(E_k) &\le \sum_k (m(F_k) + m(E_k \setminus F_k)) \le \sum_k (m(F_k) + \varepsilon 2^{-k}) \\
&= \varepsilon + \sum_k m(F_k) = \varepsilon + \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^N m(F_k) \\
&= \varepsilon + \lim_{N\to+\infty} m(\cup_{k=1}^N F_k) \le \varepsilon + \lim_{N\to+\infty} m(\cup_{k=1}^N E_k) \\
&\le \varepsilon + m(\cup_k E_k)\ .
\end{aligned}$$

Se invece non tutti gli $E_k$ sono limitati, utilizziamo i cubi chiusi $Q_j$ di centro $\mathbf{0}$ e lato $2j$ per ottenere $\mathbb{R}^n$ come unione disgiunta $\cup_{j=1}^{+\infty} A_j$ degli insiemi misurabili $A_1 = Q_1$ e $A_j = Q_j \setminus Q_{j-1}$ ($j \ge 2$). Allora gli insiemi $E_{k,j} := E_k \cap A_j$ sono misurabili, mutuamente disgiunti e limitati, per cui

$$m(\cup_k E_k) = m(\cup_{k,j} E_{k,j}) = \sum_{k,j} m(E_{k,j}) = \sum_k (\sum_j m(E_{k,j})) = \sum_k m(E_k)\ .$$

Si noti che la trasformazione della serie doppia in serie iterata è resa possibile dalla non negatività di tutti gli addendi coinvolti (vd. Par 1.10 del Cap. 1). ■

**Corollario 4.3** *Se $D, E \in \mathcal{M}$, con $D \subseteq E$ e $m(D) < +\infty$, allora $m(E \setminus D) = m(E) - m(D)$.*

**Oss. 4.6** Con qualche manipolazione in più è possibile dimostrare che la (4.9) rimane valida anche se gli insiemi $\{E_k\}$ non sono proprio mutuamente disgiunti, ma le loro mutue intersezioni hanno misura nulla, cioè se $m(E_j \cap E_k) = 0$ per ogni $j \neq k$. È questo il caso, ad esempio, di intervalli $I_k$ che hanno gli interni mutuamente disgiunti ma condividono, anche solo parzialmente, una o più facce. Questo fatto avrà molta importanza nei prossimi capitoli: tutta la teoria dell'integrazione si basa sulla possibilità di trascurare il contributo dato dagli insiemi di misura nulla al valore di un integrale.

Per enunciare il prossimo risultato abbiamo bisogno di qualche notazione. Se $\{E_k\}$ è una collezione al più numerabile di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ (non importa se misurabili o no) con la scrittura $E_k \nearrow \cup_k E_k$ intendiamo che $E_k \subseteq E_{k+1}$ per ogni $k$, mentre con la scrittura $E_k \searrow \cap_k E_k$ intendiamo che $E_k \supseteq E_{k+1}$ per ogni $k$, e nei due casi diciamo che la famiglia $\{E_k\}$ *cresce verso* $\cup_k E_k$, oppure *decresce verso* $\cap_k E_k$ .
Il seguente teorema garantisce che la misura di Lebesgue rispetta una sorta di continuità, relativamente a queste famiglie monotòne di insiemi.

**Teorema 4.5** *Sia $\{E_k\}$ una famiglia numerabile di insiemi misurabili; allora:*

*i. se $E_k \nearrow \cup_k E_k$ si ha $\lim_{k\to+\infty} m(E_k) = m(\cup_k E_k)$;*
*ii. se $E_k \searrow \cap_k E_k$ ed $E_1$ ha misura finita, allora $\lim_{k\to+\infty} m(E_k) = m(\cap_k E_k)$.*

**Dim.**
i. Se qualche $E_k$ ha misura infinita l'affermazione è certamente vera per cui possiamo supporre che ogni $E_k$ abbia misura finita. In tal caso osserviamo che

$$\cup_k E_k = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1) \cup \ldots (E_k \setminus E_{k-1}) \cup \ldots$$

dove gli insiemi sottoposti ad unione sono tutti disgiunti. Per il Teor. 4.4 ed il Cor. 4.3 abbiamo

$$
\begin{aligned}
m(\cup_k E_k) &= m(E_1) + \sum_{n=2}^{\infty} m(E_n \setminus E_{n-1}) = m(E_1) + \lim_{k\to\infty} \sum_{n=2}^{k} m(E_n \setminus E_{n-1}) \\
&= m(E_1) + \lim_{k\to\infty} \sum_{n=2}^{k} \big(m(E_n) - m(E_{n-1})\big) = \lim_{k\to+\infty} m(E_k)\ .
\end{aligned}
$$

ii. Dalla monotonìa decrescente di $E_k$ segue che $(E_1 \setminus E_k) \nearrow (E_1 \setminus (\cap_k E_k))$, quindi dal punto i. segue che

$$
m(E_1 \setminus (\cap_k E_k)) = \lim_{k\to\infty} m(E_1 \setminus E_k).
$$

La dimostrazione si conclude osservando che l'ipotesi che $m(E_1) < +\infty$ implica che $m(E_1 \setminus (\cap_k E_k)) = m(E_1) - m(\cap_k E_k)$ e che $m(E_1 \setminus E_k) = m(E_1) - m(E_k)$. ■

**Oss. 4.7** Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $E_k := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\| \geq k\}$. Chiaramente $E_k \supseteq E_{k+1}$ per ogni $k$, tuttavia $\lim_{k\to+\infty} m(E_k) = +\infty \neq 0 = m(\emptyset) = m(\cap_k E_k)$; questo esempio mostra che l'ipotesi che la misura di $E_1$ sia finita e contenuta nel teorema precedente è essenziale per la validità della tesi.

### 4.5. Alcuni esempi notevoli

**1] L'insieme ternario di Cantor.** Si tratta di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che ha misura nulla e potenza del continuo. La sua esistenza quindi completa l'Oss. 4.1. Partendo dall'intervallo $C_0 := [0,1]$, lo dividiamo in tre parti uguali e scartiamo l'intervallo aperto centrale $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, rimanendo con l'insieme chiuso $C_1 := [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Al passo successivo, dividiamo ognuno degli intervalli che compongono $C_1$ in tre parti uguali, e scartiamo l'intervallo aperto centrale; rimaniamo con l'insieme $C_2$, unione di quattro intervalli chiusi e disgiunti, ognuno di lunghezza 1/9. Dopo $k$ passi abbiamo ottenuto l'insieme $C_k$, composto da $2^k$ intervalli chiusi e disgiunti, ognuno di ampiezza $3^{-k}$; così, $C_k$ ha misura $(2/3)^k$. Ovviamente i $C_k$ sono tutti inscatolati, per cui

$$
C_k \searrow \cap_{k=0}^{+\infty} C_k =: C
$$

e questo è detto *insieme di Cantor*, che è chiuso e che ha misura nulla per il Teor. 4.5 (vd. Fig. 4.2).

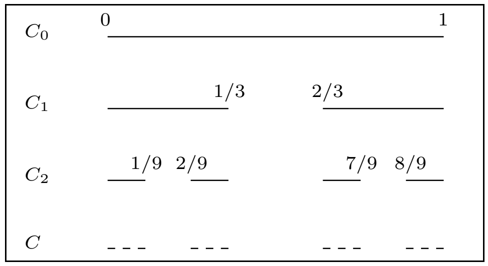


FIGURA 4.2.

Dalla costruzione è chiaro che i punti estremi di tutti i $2^k$ intervalli chiusi utilizzati per formare $C_k$ non vengono mai scartati, e quindi tutti questi punti, per ogni valore di $k$, appartengono a $C$. Inoltre, ogni $x \in C_k$ è avvicinabile a meno di $2^{-k}$ da un punto $x_k \neq x$ scelto tra questi punti estremi. Perciò, per ogni $x \in C$ è possibile trovare una $\{x_k\}$ composta da punti di $C$, tutti diversi da $x$, che converge ad $x$. Ne segue che $C$ è un insieme chiuso ed ogni suo punto è di accumulazione per $C$ (insiemi con questa proprietà sono anche detti *insiemi perfetti*). Ora dimostriamo che $C$ non può essere numerabile.
Se $C = \{y_k\}_{k=1}^{+\infty}$, consideriamo un punto $z_1 \in C$, $z_1 \neq y_1$ e costruiamo un cubo chiuso $Q_1$ centrato in $z_1$ e con lato così piccolo da avere $y_1 \notin Q_1$. L'insieme $Q_1 \cap C$ è un compatto non vuoto. Poiché $z_1$ è di accumulazione per $C$, troviamo almeno un punto $z_2 \in Q_1 \cap C$, e possiamo pensare che non si tratti del punto $y_2$. Ora scegliamo un cubo chiuso $Q_2$, centrato in $z_2$, e con lato così piccolo da avere $y_2 \notin Q_2$ e anche $Q_2 \subset Q_1$. L'insieme $Q_2 \cap C$ è un compatto non vuoto, contenuto in $Q_1 \cap C$. Iterando questa procedura, otteniamo una famiglia di insiemi compatti $Q_k \cap C$, non vuoti, tutti inscatolati, con la proprietà che $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\} \not\subset Q_k \cap C$. Sappiamo (dal corso di Analisi Matematica 1) che l'intersezione di compatti non vuoti ed inscatolati non può essere vuota, per cui $\cap_{k=1}^{+\infty}(Q_k \cap C)$ è un insieme non vuoto, che però non contiene alcuno dei punti di $C$; questa contraddizione ci permette di concludere che $C$ non può essere numerabile.

L'insieme di Cantor può anche essere descritto in un altro modo. Se $N$ è un intero maggiore di 1, ogni $x \in [0, 1]$ ammette una rappresentazione in base $N$

$$x = 0.c_1c_2 \cdots c_k \cdots := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_k}{N^k}$$

dove i $c_k$ sono interi che possono assumere solo i valori $0, 1, \dots, N-1$; questa rappresentazione è unica per tutti gli $x$ tranne che per i multipli interi delle potenze di $1/N$ che ne ammettono due (ad esempio, quando $N = 10$ abbiamo per il numero $x = 3/10$ la doppia possibilità $x = 0.3\overline{0} = 0.2\overline{9}$). Gli elementi di $C$ possono essere descritti come tutti e soli quei reali che ammettono una rappresentazione ternaria, cioè con $N = 3$ in cui i $c_k$ assumono solo i valori 0 o 2. Questa descrizione rende particolarmente semplice dimostrare che $C$ non è numerabile: esso è evidentemente in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle sequenze infinite di due simboli, che è noto essere un insieme con cardinalità pari alla potenza del continuo.

**2] In $\mathbb{R}$ esiste almeno un sottoinsieme non Lebesgue-misurabile.** Introduciamo tra i punti dell'intervallo $[0, 1)$ la seguente relazione

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}\ .$$

È facile verificare che si tratta di una relazione di equivalenza (è riflessiva, simmetrica e transitiva), quindi $[0, 1)$ può essere ripartito in classi di equivalenza. Ognuna di queste classi è numerabile (perché $\mathbb{Q}$ lo è) e la totalità di queste classi costituisce un insieme non numerabile (perché $[0, 1)$ non lo è). Costruiamo un insieme $E$ scegliendo un rappresentante da ogni classe di equivalenza, ed otteniamo così un insieme non numerabile. Ora dimostriamo che $E$ non è Lebesgue-misurabile.
Per ogni $r \in \mathbb{Q} \cap (-1, 1)$ consideriamo l'insieme $E_r := E + r$; ottenuto traslando $E$ della quantità $r$. Chiaramente $E_r \subset [r, r+1)$, e notiamo che se $r, s \in \mathbb{Q}$, $r \neq s$, gli insiemi $E_r$ ed $E_s$ non possono avere elementi in comune perché da ogni classe di equivalenza abbiamo scelto un solo rappresentante. Così, l'insieme $A := \cup_{r \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)} E_r$ è unione di un'infinità numerabile di insiemi disgiunti, ed è contenuto in $(-1, 2)$. D'altra parte, l'insieme $A$ contiene tutti i punti dell'intervallo $(0, 1)$. Infatti, ogni $x \in (0, 1)$ appartiene ad una della classi di equivalenza relative alla relazione $\sim$ e quindi $x \sim y$ per qualche $y \in E$, ovvero $x - y = r$ per qualche $r \in \mathbb{Q}$, con $r \in (-1, 1)$ perché $x, y \in [0, 1)$. Così $x \in E_r \subset A$.
Se l'insieme $E$ fosse misurabile lo sarebbero anche tutti gli $E_r$ ed avrebbero tutti la stessa misura; ma allora sarebbe misurabile anche $A$ e per il Teor. 4.4

$$m(A) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} m(E_r) = \begin{cases} +\infty & \text{se } m(E) > 0 \\ 0 & \text{se } m(E) = 0. \end{cases}$$

D'altra parte, da $(0,1) \subset A \subset (-1,2)$ seguirebbe $1 \leq m(A) \leq 3$ che evidentemente contraddice quanto affermato in precedenza, dimostrando così che $E$ non può essere misurabile.

È inoltre possibile dimostrare che il prodotto cartesiano di $E$ con se stesso $n$-volte è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ non misurabile.

3] **Non additività della misura esterna.** Gli stessi insiemi dell'esempio precedente possono essere utilizzati per dimostrare quanto a suo tempo affermato, ovvero la possibilità che nella (4.4) si abbia una disuguaglianza stretta anche se gli insiemi coinvolti sono mutuamente disgiunti. Infatti dalla monotonìa di $m^*$ e da (4.4) segue

$$(0,1) \subset A \implies 1 \leq m^*(A) = m^*(\cup_{r\in\mathbb{Q}\cap(-1,1)} E_r) \leq \sum_{r\in\mathbb{Q}\cap(-1,1)} m^*(E_r)$$

e poiché $m^*$ è invariante rispetto alle traslazioni tutti gli addendi $m^*(E_r)$ coincidono e devono essere positivi. Inoltre, $A \subset (-1,2)$ implica $m^*(A) \leq 3$ e quindi

$$m^*(\cup_{r\in\mathbb{Q}\cap(-1,1)} E_r) = m^*(A) \leq 3 < +\infty = \sum_{r\in\mathbb{Q}\cap(-1,1)} m^*(E_r) \ ,$$

che dimostra che la misura esterna non è numerabilmente additiva.

4] **Paradosso di Banach-Tarski.** Nel '24 Stefan Banach ed Alfred Tarski dimostrarono che è possibile decomporre una sfera di raggio unitario in sei pezzi che con rototraslazioni possono essere riassemblate, senza "sovrapposizioni" o "buchi", a formare due sfere distinte entrambe di raggio unitario. Questo risultato è evidentemente paradossale: la misura di Lebesgue è invariante per rototraslazioni e tuttavia la misura dell'insieme non è conservata! L'unica spiegazione possibile è che almeno uno dei pezzi in cui la sfera è stata divisa deve essere non misurabile. Non ci addentriamo nella dimostrazione di questo risultato limitandoci a ricordare che in seguito il risultato è stato raffinato (ora si sa che sono sufficienti cinque pezzi e che cinque è il numero minimo) ed esteso per esempio a tutte le sfere $n$-dimensionali. Un risultato simile ma ancora più sorprendente è stato dimostrato in anni molto più recenti: nel '90 Miklós Laczkovich ha mostrato infatti che è possibile decomporre il disco unitario in un numero finito di sottoinsiemi (di fatto $\leq 10^{50}$) che con sole traslazioni possono essere riassemblati a dare un quadrato di uguale area. Ancora una volta il risultato si spiega osservando che evidentemente almeno uno dei sottoinsiemi deve essere non misurabile. Al lettore interessato ad approfondire queste tematiche segnaliamo l'articolo originale [**1**] e due sue esposizioni successive, [**2**] e [**3**], nonché la chiara esposizione del paradosso di Banach-Tarski [**4**].

## Bibliografia

1. M. Laczkovich, *Equidecomposability and discrepancy; a solution of Tarski's circle-squaring problem*, J. Reine Angew. Math. **404** (1990), 77–117.
2. ______, *Paradoxical decompositions: a survey of recent results*, First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), Progr. Math., vol. 120, Birkhäuser, Basel, 1994, pp. 159–184.
3. ______, *Paradoxes in measure theory*, Handbook of measure theory, Vol. I, II, North-Holland, Amsterdam, 2002, pp. 83–123.
4. K. Stromberg, *The Banach-Tarski paradox*, Amer. Math. Monthly **86** (1979), no. 3, 151–161.