

**Lezioni di Analisi Matematica 3**  
**corso di Laurea in Fisica**  
**a.a. 2005-'06**

G. Molteni

M. Vignati

VERSIONE PRELIMINARE 26.9.05

## Curve e superfici orientabili: lavoro, flusso e teoremi di Gauss, Green e Stokes

### 10.1. Orientabilità

D'ora in poi ci occuperemo di curve e superfici in  $\mathbb{R}^3$  e formuleremo solo per tali oggetti i principali teoremi. In seguito mostreremo come sfruttando l'inclusione  $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  si possano dedurre da essi gli analoghi teoremi in  $\mathbb{R}^2$ .

Sia data una curva regolare di  $\mathbb{R}^3$  che chiamiamo  $\gamma$ ; per definizione di varietà (vd. Def. 9.4) sappiamo di poter disporre di una mappa  $\Phi$  di parametrizzazione, definita in un segmento chiuso  $[a, b]$  ed a valori in  $\mathbb{R}^3$  di classe  $\mathcal{C}^1$  e con  $\Phi'(t) \neq 0$  per ogni  $t \in (a, b)$ . Ricordiamo che  $\Phi$  di classe  $\mathcal{C}^1$  nel chiuso  $[a, b]$  significa, per definizione, che di fatto  $\Phi$  è la restrizione ad  $[a, b]$  di una mappa  $\tilde{\Phi}$  definita in un aperto contenente  $[a, b]$  di classe  $\mathcal{C}^1$  in tale aperto. Per definizione di spazio tangente il vettore  $\Phi'(t)$  è un vettore appartenente a  $T_{\Phi(t)}\gamma$  per ogni  $t \in (a, b)$ . Purtroppo esso non può essere canonicamente associato a  $\gamma$  in quanto non è invariante rispetto ad un cambiamento di coordinate ammissibile: infatti, sia  $\phi : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un cambiamento ammissibile di coordinate, quindi una mappa di classe  $\mathcal{C}^1$  definita in un aperto  $\phi(A) \supseteq [a, b]$ , invertibile con inversa  $\mathcal{C}^1$ . Allora  $\Phi \circ \phi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una seconda parametrizzazione il cui sostegno è ancora  $\gamma$  e nel medesimo punto  $\mathbf{p} \in \gamma$ ,  $\mathbf{p} = \Phi(t_0) = (\Phi \circ \phi)(u_0)$  (dove  $u_0$  è quel valore per cui  $\phi(u_0) = t_0$ ), si ottengono i due vettori tangenti  $\Phi'(t_0)$  e  $\Phi'(t_0)\phi'(u_0)$ . Come si vede i due vettori sono proporzionali e tuttavia sono distinti. Proprio perché proporzionali, però, essi condividono la direzione. Ciò suggerisce di associare al punto  $\mathbf{p}$  non tanto il vettore  $\Phi'(t_0)$ , quanto il *versore*

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{p}) := \frac{\Phi'(t_0)}{\|\Phi'(t_0)\|}.$$

È importante osservare che  $\boldsymbol{\tau}$  è ben definito in tutti i punti di  $\gamma^\circ$  poiché per ipotesi possiamo assumere che  $\Phi'(t_0)$  non è nullo in ogni punto di  $(a, b)$ . Osserviamo,

tuttavia, che tale versore non può essere ancora pensato come intrinseco alla curva poiché utilizzando parametrizzazioni diverse si possono ancora produrre versori distinti, poiché

$$\frac{(\Phi \circ \phi)'(u_0)}{\|(\Phi \circ \phi)'(u_0)\|} = \frac{\Phi'(t_0)}{\|\Phi'(t_0)\|} \cdot \frac{\phi'(u_0)}{|\phi(u_0)|} = \frac{\Phi'(t_0)}{\|\Phi'(t_0)\|} \cdot \operatorname{sgn}(\phi'(u_0)).$$

Non si può dunque pensare a  $\tau$  come ad un vettore associato alla sola curva  $\gamma$  a meno di decidere di considerare come ammissibili solo cambiamenti di variabile  $\phi$  per i quali  $\phi'$  risulti sempre positivo, ovvero a meno di utilizzare non la relazione di equivalenza  $\sim$  bensì la più restrittiva relazione  $\overset{\circ}{\sim}$  introdotta nel Cap 8 (Def. 8.8). In altre parole, abbiamo scoperto che data una curva  $\gamma$  (e quindi data in realtà una sua parametrizzazione), possiamo associare un vettore  $\tau(\mathbf{p})$  in ogni punto  $\mathbf{p}$  di  $\gamma^\circ$  in modo  $\overset{\circ}{\sim}$ invariante.

Osserviamo che a seguito della definizione precedente il medesimo insieme  $\gamma$  supporta due distinte famiglie di vettori tangenti  $\tau$ : la prima legata ad una data parametrizzazione  $\Phi$  e la seconda legata ad una parametrizzazione  $\tilde{\Phi}$  che pur equivalente alla precedente (relazione  $\sim$ ) non sia strettamente equivalente (relazione  $\overset{\circ}{\sim}$ ) ad essa.

**Esempio 10.1** L'insieme  $x^2 + y^2 = 1$  è il sostegno sia della parametrizzazione

$$\Phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Phi(\vartheta) = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)^T,$$

sia della parametrizzazione

$$\tilde{\Phi} : [-3\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \tilde{\Phi}(\vartheta) = (\sin \vartheta, \cos \vartheta)^T.$$

Il versore che in un punto  $\mathbf{p}$  del sostegno viene associato tramite la prima parametrizzazione è  $\tau(\mathbf{p}) = (-\sin \vartheta_0, \cos \vartheta_0)^T$ , dove  $\vartheta_0$  è l'angolo tale che  $\mathbf{p} = (\cos \vartheta_0, \sin \vartheta_0)^T$ .

Nel medesimo punto  $\mathbf{p}$ , il versore che viene associato tramite la seconda parametrizzazione è  $\tilde{\tau}(\mathbf{p}) = (\cos \tilde{\vartheta}_0, -\sin \tilde{\vartheta}_0)^T$ , dove  $\tilde{\vartheta}_0$  è l'angolo tale che  $\mathbf{p} = (\sin \tilde{\vartheta}_0, \cos \tilde{\vartheta}_0)^T$ . Dato che  $\vartheta_0 = \pi/2 - \tilde{\vartheta}_0$ , si ha  $\tau(\mathbf{p}) = -\tilde{\tau}(\mathbf{p})$ . ■

Come abbiamo visto, l'orientazione può essere introdotta a priori solo in  $\gamma^\circ$  poiché solo in tale insieme siamo sicuri che  $\Phi'$  non sia il vettore nullo. Ciò porta alla seguente definizione.

**Def. 10.1** Una curva regolare  $\gamma$  è detta *orientabile* quando la funzione  $\tau$  può essere estesa per continuità a tutto  $\gamma$ .

**Esempio 10.2** L'insieme  $x^2 + y^2 = 1$  con parametrizzazione

$$\Phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Phi(\vartheta) = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)^T,$$

è una curva orientabile. L'insieme  $x^2 + y^2 = 1$  con parametrizzazione

$$\tilde{\Phi} : [-3\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad \tilde{\Phi}(\vartheta) = (\sin \vartheta, \cos \vartheta)^T,$$

è una curva orientabile con orientazione opposta alla precedente. ■

Una concetto analogo può essere introdotto per le superfici regolari  $S$  di  $\mathbb{R}^3$  (vd. Def. 9.5). Al solito, sia  $\Phi$  una mappa di parametrizzazione, definita in un dominio-connesso  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ed a valori in  $\mathbb{R}^3$  di classe  $\mathcal{C}^1$  e con  $J\Phi$  di rango 2 in ogni punto di  $\overset{\circ}{D}$ . Per definizione di spazio tangente i vettori  $\partial_u \Phi(u, v)$  e  $\partial_v \Phi(u, v)$  sono entrambi vettori appartenenti a  $T_{\Phi(u, v)}\gamma$  per ogni  $(u, v) \in D$ . Essi sono anche linearmente indipendenti poiché per ipotesi il rango di  $(J\Phi)(u, v)$  è 2. Lo spazio ortogonale in  $\Phi(u, v)$  è quindi monodimensionale, generato da  $\partial_u \Phi(u, v) \wedge \partial_v \Phi(u, v)$ ; tale vettore è infatti non nullo e ortogonale sia a  $\partial_u \Phi(u, v)$  che ad  $\partial_v \Phi(u, v)$ . Purtroppo esso non può essere canonicamente associato a  $S$  in quanto non è invariante rispetto ad un cambiamento di coordinate ammissibile: infatti, sia  $\phi : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un cambiamento ammissibile di coordinate (quindi, una mappa di classe  $\mathcal{C}^1$  definita in un aperto  $\phi(A) \supseteq D$ , invertibile con inversa  $\mathcal{C}^1$ ); allora  $\Phi \circ \phi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una seconda parametrizzazione il cui sostegno è ancora  $S$  e nel medesimo punto  $\mathbf{p} \in S$ ,  $\mathbf{p} = \Phi(u_0, v_0) = (\Phi \circ \phi)(s_0, t_0)$ , si ottengono i due vettori ortogonali

$$\partial_u \Phi \wedge \partial_v \Phi \Big|_{(u_0, v_0)} \quad \text{e} \quad \partial_s (\Phi \circ \phi) \wedge \partial_t (\Phi \circ \phi) \Big|_{(s_0, t_0)}.$$

Indicando con  $s$  e  $t$  le variabili che sono gli argomenti di  $\phi$  ed usando la bilinearità e l'antisimmetria del prodotto vettore, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\partial_s(\Phi \circ \phi) \wedge \partial_t(\Phi \circ \phi) \Big|_{(s_0, t_0)} &= (\partial_u \Phi \partial_s \phi_1 + \partial_v \Phi \partial_s \phi_2) \wedge (\partial_u \Phi \partial_t \phi_1 + \partial_v \Phi \partial_t \phi_2) \\
&= (\partial_u \Phi \wedge \partial_u \Phi) \partial_s \phi_1 \partial_t \phi_1 + (\partial_u \Phi \wedge \partial_v \Phi) \partial_s \phi_1 \partial_t \phi_2 \\
&\quad + (\partial_v \Phi \wedge \partial_u \Phi) \partial_s \phi_2 \partial_t \phi_1 + (\partial_v \Phi \wedge \partial_v \Phi) \partial_s \phi_2 \partial_t \phi_2 \\
&= \partial_u \Phi \wedge \partial_v \Phi \cdot (\partial_s \phi_1 \partial_t \phi_2 - \partial_s \phi_2 \partial_t \phi_1) \\
&= \left[ (\partial_u \Phi) \wedge (\partial_v \Phi) \right] \Big|_{(u_0, v_0)} \cdot \det((J\phi)(s_0, t_0)).
\end{aligned}$$

Come si vede i due vettori ortogonali sono proporzionali ma distinti. Proprio perché proporzionali, però, essi condividono la direzione. Ciò suggerisce di associare al punto  $\mathbf{p}$  non tanto il vettore  $(\partial_u \Phi \wedge \partial_v \Phi)(u_0, v_0)$ , quanto il *versore*

$$\nu(\mathbf{p}) := \frac{\partial_u \Phi \wedge \partial_v \Phi \Big|_{(u_0, v_0)}}{\left\| \partial_u \Phi \wedge \partial_v \Phi \Big|_{(u_0, v_0)} \right\|}.$$

È importante osservare che  $\nu$  è ben definito in tutti i punti di  $S^\circ$  poiché per ipotesi  $\partial_u \Phi \wedge \partial_v \Phi(u_0, v_0)$  non è nullo in ogni punto di  $\overset{\circ}{D}$ . Osserviamo, tuttavia, che tale versore non può essere ancora pensato come intrinseco alla superficie poiché utilizzando parametrizzazioni diverse si possono ancora produrre versori distinti, dato che

$$\frac{\partial_u(\Phi \circ \phi) \wedge \partial_v(\Phi \circ \phi) \Big|_{(s_0, t_0)}}{\left\| \partial_u(\Phi \circ \phi) \wedge \partial_v(\Phi \circ \phi) \Big|_{(s_0, t_0)} \right\|} = \frac{\partial_u \Phi \wedge \partial_v \Phi \Big|_{(u_0, v_0)}}{\left\| \partial_u \Phi \wedge \partial_v \Phi \Big|_{(u_0, v_0)} \right\|} \cdot \text{sgn}(\det(J\phi)(s_0, t_0)).$$

Non si può dunque pensare a  $\nu$  come ad un vettore associato alla sola superficie  $S$  a meno di decidere di considerare come ammissibili solo cambiamenti di variabile  $\phi$  per i quali  $\det(J\phi)$  risulti sempre positivo, ovvero a meno di utilizzare non la relazione di equivalenza  $\sim$  bensì la più restrittiva relazione  $\overset{\circ}{\sim}$ . In altre parole, abbiamo scoperto che data una superficie  $S$  possiamo associare ad essa un vettore  $\nu(\mathbf{p})$  in ogni punto  $\mathbf{p}$  di  $S^\circ$  in modo  $\overset{\circ}{\sim}$ invariante.

Osserviamo che a seguito della definizione precedente il medesimo insieme  $S$  supporta due distinte famiglie di vettori normali  $\nu$ : la prima legata ad una data parametrizzazione  $\Phi$  e la seconda legata ad una parametrizzazione  $\tilde{\Phi}$  che pur equivalente a  $\Phi$  (relazione  $\sim$ ) non sia strettamente equivalente (relazione  $\overset{\circ}{\sim}$ ) ad essa.

**Esempio 10.3** L'insieme  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  è il sostegno sia della parametrizzazione

$$\Phi : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(\vartheta, \varphi) = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)^T,$$

sia della parametrizzazione

$$\tilde{\Phi} : [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \tilde{\Phi}(\vartheta, \varphi) = (\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta)^T.$$

Il versore che in un punto  $\mathbf{p}$  del sostegno viene associato tramite la prima parametrizzazione è

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}) = (\sin \vartheta_0 \cos \varphi_0, \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0, \cos \vartheta_0)^T,$$

dove  $\vartheta_0, \varphi_0$  sono gli angoli tale che  $\mathbf{p} = (\sin \vartheta_0 \cos \varphi_0, \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0, \cos \vartheta_0)^T$  (ben definiti se  $\mathbf{p} \in \overset{\circ}{\Phi}(D)$ ). Nel medesimo punto  $\mathbf{p}$ , il versore che viene associato tramite la seconda parametrizzazione è

$$\tilde{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{p}) = (-\cos \tilde{\vartheta}_0 \cos \tilde{\varphi}_0, -\cos \tilde{\vartheta}_0 \sin \tilde{\varphi}_0, -\sin \tilde{\vartheta}_0)^T,$$

dove  $\tilde{\vartheta}_0, \tilde{\varphi}_0$  sono gli angoli tali che  $\mathbf{p} = (\cos \tilde{\vartheta}_0 \cos \tilde{\varphi}_0, \cos \tilde{\vartheta}_0 \sin \tilde{\varphi}_0, \sin \tilde{\vartheta}_0)^T$ , ben definiti se  $\mathbf{p} \in \tilde{\Phi}(\overset{\circ}{D})$ . Dato che  $\vartheta_0 = \pi/2 - \tilde{\vartheta}_0$  e  $\varphi_0 = \tilde{\varphi}_0$ , abbiamo  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}) = -\tilde{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{p})$ . ■

Come abbiamo visto, l'orientazione può essere introdotta a priori solo in  $S^\circ$  poiché solo in tale insieme siamo sicuri che  $J\Phi$  abbia rango 2 e che quindi  $\boldsymbol{\nu}$  esista. Ciò porta alla seguente definizione.

**Def. 10.2** Una superficie regolare  $S$  è detta *orientabile* quando la funzione  $\boldsymbol{\nu}$  può essere estesa per continuità a tutto  $S$ .

**Esempio 10.4** L'insieme  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  con parametrizzazione

$$\Phi : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(\vartheta, \varphi) = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)^T,$$

è una superficie orientabile poiché in  $\overset{\circ}{\Phi}(D)$  si ha  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$  che quindi può essere estesa con continuità a tutta  $S$ .

L'insieme  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  con parametrizzazione

$$\tilde{\Phi} : [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \tilde{\Phi}(\vartheta, \varphi) = (\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta)^T.$$

è una superficie orientabile poiché in  $\tilde{\Phi}(\overset{\circ}{D})$  si ha  $\tilde{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{p}) = -\mathbf{p}$  che quindi può essere estesa con continuità a tutta  $S$ . La sua orientazione è opposta alla precedente. ■

**Esempio 10.5** Un notevole esempio di superficie *non* orientabile è la superficie nota col nome di *nastro di Möbius*. La sua parametrizzazione è

$$\Phi : [0, 2\pi] \times [-1, 1], \quad \Phi(u, v) = \left( (2 - v \sin \frac{u}{2}) \sin u, (2 - v \sin \frac{u}{2}) \cos u, v \cos \frac{u}{2} \right)^T.$$

La sua descrizione parametrica non rende però l'idea geometrica di questa superficie: si tratta di un rettangolo del quale due capi opposti sono stati giuntati dopo una torsione di un angolo pari a  $\pi$  rispetto al loro asse. La verifica della non-orientabilità di questa superficie sta nel notare che il versore  $\nu$  nei punti di  $\Phi(u, 0)$  con  $u \in (0, 2\pi)$  ha limiti diversi per  $u \rightarrow 0^+$  ed a  $u \rightarrow 2\pi^-$ . Purtroppo però i punti  $(u, v) = (0, 0)$  e  $(u, v) = (2\pi, 0)$  corrispondono al medesimo punto di  $S$ , provando così l'impossibilità di estendere  $\nu(\mathbf{p})$  per continuità a tutta  $S$ .

Una interessante applicazione tecnologica di questa superficie è la seguente: nelle stampanti ad aghi il nastro inchiostroato non è una sezione cilindrica ma un nastro di Möbius. In questo modo l'inchiostro assorbito dal tessuto che compone il nastro non viene compattato dagli aghi su una sola delle due facce, ma sulla unica faccia del Möbius. Così facendo i 10 metri del nastro di Möbius si comportano come 20 metri di nastro cilindrico, con evidenti vantaggi economici e di spazio.

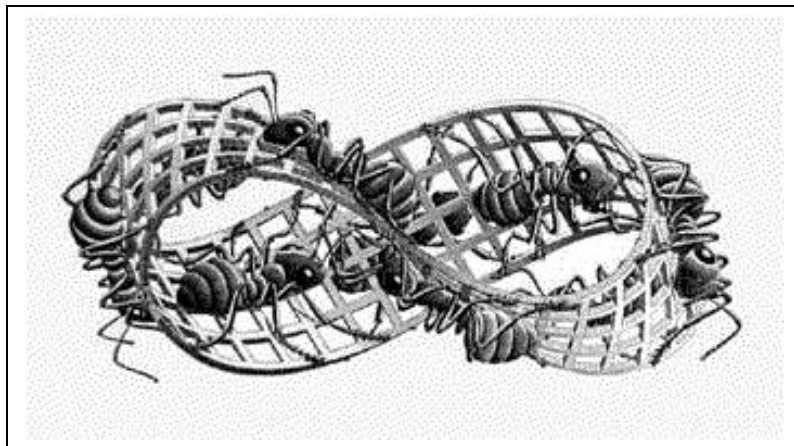


FIGURA 10.1: *il nastro di Möbius in una stampa di Escher.*

■



## 10.2. Lavoro

Supponiamo ora di aver assegnato un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  continuo in  $\mathbb{R}^n$ ; ciò significa che immaginiamo di aver assegnato una mappa  $\mathbf{F}$  definita da un aperto  $A \in \mathbb{R}^n$  a valori in  $\mathbb{R}^n$ , continua. Supponiamo che  $A$  contenga una curva regolare ed orientabile  $\gamma$ . Risulta ben definito il versore tangente  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{p})$  e di conseguenza è ben definito pure il prodotto scalare  $\langle \mathbf{F}(\cdot), \boldsymbol{\tau}(\cdot) \rangle$ , che è una funzione a valori reali e continua in  $\gamma$ . Ha così senso considerare l'integrale:

$$(10.1) \quad \int_{\gamma} \langle \mathbf{F}(\cdot), \boldsymbol{\tau}(\cdot) \rangle ds,$$

che per definizione è

$$\begin{aligned} \int_a^b \langle \mathbf{F}(\boldsymbol{\Phi}(t)), \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\Phi}(t)) \rangle \|\boldsymbol{\Phi}'(t)\| dt &= \int_a^b \langle \mathbf{F}(\boldsymbol{\Phi}(t)), \frac{\boldsymbol{\Phi}'(t)}{\|\boldsymbol{\Phi}'(t)\|} \rangle \|\boldsymbol{\Phi}'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \langle \mathbf{F}(\boldsymbol{\Phi}(t)), \boldsymbol{\Phi}'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \sum_{j=1}^n F_j(\boldsymbol{\Phi}(t)) \Phi'_j(t) dt. \end{aligned}$$

**Oss. 10.1** La continuità di per sé non basta a garantire l'esistenza di questo integrale a meno di non assumere anche che  $a, b$  siano in  $\mathbb{R}$  (così che il dominio di integrazione è un compatto). Non sempre però quest'ultima condizione sarà soddisfatta quindi semplicemente assumiamo l'esistenza (secondo Lebesgue) di questo integrale.

**Def. 10.3** Nelle ipotesi precedenti su  $\mathbf{F}$  e  $\gamma$ , l'integrale in (10.1) è detto *lavoro* di  $\mathbf{F}$  lungo la curva  $\gamma$ .

**Oss. 10.2** La funzione  $\boldsymbol{\tau}$  è ben definita perché per ipotesi  $\gamma$  è orientabile. Essa tuttavia è  $\overset{\circ}{\sim}$  invariante ma non è  $\sim$  invariante. Di conseguenza l'integrale precedentemente introdotto è anch'esso  $\overset{\circ}{\sim}$  invariante ma non è in generale  $\sim$  invariante: utilizzando una parametrizzazione diversa  $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}$  che sia  $\sim$  equivalente ma non  $\overset{\circ}{\sim}$  equivalente alla precedente, l'integrale calcolato cambia segno perché in ogni punto risulta  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{p}) = -\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{p})$ . Ciò in accordo con il ben noto fatto secondo cui il lavoro di un campo lungo una curva dipende dal verso di percorrenza della curva. È quindi importante, quando si calcola tale integrale, tenere traccia della orientazione con cui  $\gamma$  viene percorsa.

**Esempio 10.6** Calcolare il lavoro di  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, y, z)^T$  lungo la curva  $\gamma$  ottenuta intersecando la sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  con il piano  $\pi : x + y + z = 1$  e percorsa nel verso seguente: osservando la sfera da un punto con coordinate positive e maggiori di 1 (così si è all'esterno della sfera), si vede la curva orientata in senso orario.

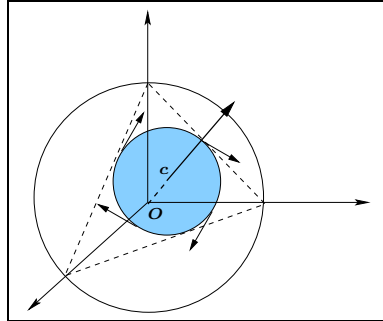


FIGURA 10.2

Anzitutto ci serve una parametrizzazione della curva: essa è l'intersezione di una sfera con un piano, quindi sarà una circonferenza (vd. Fig. 10.2). Il centro  $\mathbf{c}$  di tale circonferenza è il punto del piano  $\pi$  a distanza minima dall'origine degli assi; data la simmetria del problema le tre coordinate di  $\mathbf{c}$  dovranno anche essere uguali tra loro e quindi  $\mathbf{c} = (1/3, 1/3, 1/3)$ . La distanza di  $\mathbf{c}$  da  $\mathbf{O}$  è  $\|(1/3, 1/3, 1/3)\| = 1/\sqrt{3}$  quindi il raggio di  $\gamma$  è  $\sqrt{1^2 - (1/\sqrt{3})^2} = \sqrt{2/3}$ . I punti  $\mathbf{p}$  di  $\gamma$  sono quindi tutti i punti dello spazio per i quali

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{c}\| = \sqrt{2/3}, \quad \langle \mathbf{p} - \mathbf{c}, (1, 1, 1) \rangle = 0.$$

La forma delle equazioni precedenti suggerisce di determinare prima il vettore  $(u, v, w)^T$  tale che

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2/3, \quad u + v + w = 0,$$

e successivamente di descrivere  $\mathbf{p}$  come  $\mathbf{c} + (u, v, w)^T$ . Per risolvere il sistema precedente osserviamo che ricavando  $w = -u - v$  la prima equazione diventa

$$u^2 + v^2 + uv = 1/3.$$

Un po' di algebra lineare mostra che si tratta di una ellisse con gli assi diretti come le bisettrici del piano  $u, v$  e centrata in  $(0, 0)$ . Ruotando quindi tali assi di

$\pi/4$ , ovvero posto  $u = u'/\sqrt{2} + v'/\sqrt{2}$  e  $v = u'/\sqrt{2} - v'/\sqrt{2}$ , nelle nuove coordinate  $u', v'$  l'equazione diventa

$$\frac{9}{2}u'^2 + \frac{3}{2}v'^2 = 1.$$

Parametrizziamo tale ellisse utilizzando le coordinate polari, dilatate lungo gli assi per tener conto della ellitticità, ottenendo quindi  $u' = \frac{\sqrt{2}}{3} \cos \vartheta$ ,  $v' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin \vartheta$ , con  $\vartheta \in [0, 2\pi]$ . Di conseguenza

$$u = \frac{1}{3} \cos \vartheta + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \vartheta, \quad v = \frac{1}{3} \cos \vartheta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \vartheta, \quad w = -\frac{2}{3} \cos \vartheta.$$

I punti di  $\gamma$  sono quindi parametrizzati da

$$\mathbf{p} = \mathbf{c} + (u, v, w)^T = \Phi(\vartheta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cos \vartheta + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \vartheta \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cos \vartheta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \vartheta \\ \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo ora stabilire l'orientazione di  $\gamma$ , dobbiamo cioè stabilire se  $\vartheta$ , preso nell'intervallo  $[0, 2\pi]$ , assuma i suoi valori da 0 a  $2\pi$  o se, invece, vada da  $2\pi$  a 0. La prescrizione dice che quando si osserva il sistema da un punto nel primo ottante (tutte le coordinate positive) e da un punto sufficientemente lontano (fuori dalla sfera) allora si vede la curva orientata in senso orario: un po' di riflessione mostra che ciò equivale a considerare  $\vartheta : 2\pi \mapsto 0$ . Il lavoro del campo è quindi pari a:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds &= \int_{2\pi}^0 \left\langle \begin{pmatrix} x+y \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \sin \vartheta + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \vartheta \\ -\frac{1}{3} \sin \vartheta - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \vartheta \\ \frac{2}{3} \sin \vartheta \end{pmatrix} \right\rangle d\vartheta \\ &= \int_{2\pi}^0 \left\langle \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cos \vartheta \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cos \vartheta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \vartheta \\ \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cos \vartheta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \sin \vartheta + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \vartheta \\ -\frac{1}{3} \sin \vartheta - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \vartheta \\ \frac{2}{3} \sin \vartheta \end{pmatrix} \right\rangle d\vartheta \\ &= \int_{2\pi}^0 -\frac{1}{9} \sin \vartheta + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \vartheta + \frac{1}{3\sqrt{3}} \sin^2 \vartheta + \frac{1}{3\sqrt{3}} \cos^2 \vartheta - \frac{4}{9} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta \\ &= -\frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

■

### 10.3. Flusso

Sia  $A$  un insieme aperto di  $\mathbb{R}^3$  e sia  $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vettoriale continuo. Sia  $S$  una superficie regolare ed orientabile contenuta in  $A$ . Dalla definizione di orientabilità risulta ben definito il versore normale  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{p})$  e di conseguenza è ben definito pure il prodotto scalare  $\langle \mathbf{F}(\cdot), \boldsymbol{\nu}(\cdot) \rangle$ , che è una funzione a valori reali e continua in  $S$ . Ha dunque senso considerare l'integrale:

$$(10.2) \quad \int_S \langle \mathbf{F}(\cdot), \boldsymbol{\nu}(\cdot) \rangle d\sigma,$$

che per definizione è

$$\begin{aligned} & \int_D \langle \mathbf{F}(\Phi(u, v)), \boldsymbol{\nu}(\Phi(u, v)) \rangle \|\partial_u \Phi \wedge \partial_v \Phi|_{(u,v)}\| \, dudv \\ &= \int_D \left\langle \mathbf{F}(\Phi(u, v)), \frac{\partial_u \Phi \wedge \partial_v \Phi|_{(u,v)}}{\|\partial_u \Phi \wedge \partial_v \Phi|_{(u,v)}\|} \right\rangle \|\partial_u \Phi \wedge \partial_v \Phi|_{(u,v)}\| \, dudv \\ &= \int_D \langle \mathbf{F}(\Phi(u, v)), \partial_u \Phi \wedge \partial_v \Phi|_{(u,v)} \rangle \, dudv \\ &= \int_D \begin{vmatrix} F_1 & \partial_u \Phi_1 & \partial_v \Phi_1 \\ F_2 & \partial_u \Phi_2 & \partial_v \Phi_2 \\ F_3 & \partial_u \Phi_3 & \partial_v \Phi_3 \end{vmatrix} \, dudv. \end{aligned}$$

**Def. 10.4** Nelle ipotesi precedenti su  $\mathbf{F}$  e  $S$ , l'integrale in (10.2) è detto *flusso* di  $\mathbf{F}$  attraverso la superficie  $S$ .

**Oss. 10.3** La funzione  $\boldsymbol{\nu}$  è ben definita perché per ipotesi  $S$  è orientabile. Essa tuttavia è  $\overset{\circ}{\sim}$ invariante ma non è  $\sim$ invariante. Di conseguenza l'integrale precedentemente introdotto è anch'esso  $\overset{\circ}{\sim}$  invariante ma non è in generale  $\sim$ invariante: utilizzando una parametrizzazione diversa  $\tilde{\Phi}$  che sia  $\sim$ equivalente ma non  $\overset{\circ}{\sim}$ equivalente alla precedente, l'integrale calcolato cambia segno perché in ogni punto risulta  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}) = -\tilde{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{p})$ . Ciò in accordo con il ben noto fatto secondo cui il flusso di un campo attraverso una superficie dipende dal verso con cui si attraversa detta superficie. È quindi importante, quando si calcola tale integrale, tenere traccia della orientazione di  $S$ .

### 10.4. Teoremi di Gauss e Stokes

Sia  $\Omega$  un aperto limitato in  $\mathbb{R}^3$  il cui bordo  $\partial\Omega := \bar{\Omega} \setminus \Omega$  sia unione finita disgiunta di superfici regolari e orientabili. Come illustrato nel Cap. 8 (vd. Teor. 8.2 e 8.3) ad ogni  $\mathbf{p} \in \partial\Omega$  è possibile associare un suo intorno aperto  $B$ , un cilindro  $D \times (-\epsilon, \epsilon)$ , con  $D$  aperto in  $\mathbb{R}^2$  ed  $\epsilon > 0$ , ed una funzione  $\psi : D \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$  di classe  $\mathcal{C}^1$  tale che

- $\psi(D \times \{0\}) = B \cap \partial\Omega$ ,
- $\psi(D \times (0, \epsilon)) \notin \bar{\Omega}$ ,
- $\psi(D \times (-\epsilon, 0)) \in \Omega$ .

Ciò significa che la parte inferiore  $D \times (-\epsilon, 0)$  del cilindro viene mappata da  $\psi$  in punti interni ad  $\Omega$ , la parte superiore  $D \times (0, \epsilon)$  in punti esterni ad  $\Omega$  e l'insieme  $D \times \{0\}$  in punti del bordo di  $\Omega$  (vd. Fig. 10.6).

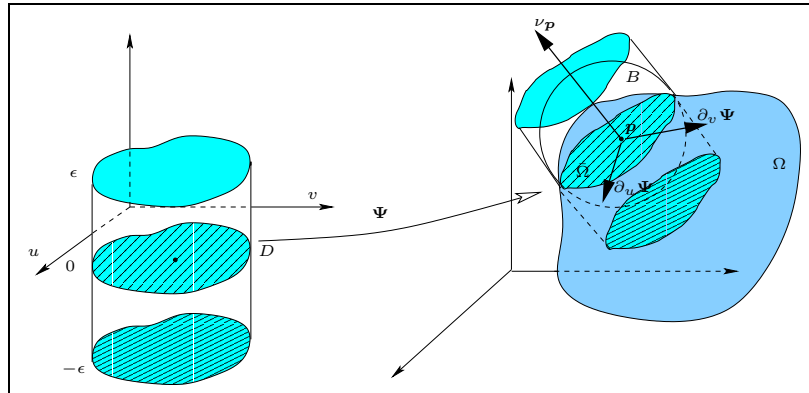


FIGURA 10.3

Tramite la mappa  $\psi$  è possibile individuare univocamente il *versore normale esterno*  $\nu_{\mathbf{p}}$  ad  $\partial\Omega$  in  $\mathbf{p}$  nel seguente modo: se  $(u, v, t)$  sono le coordinate in  $D \times (-\epsilon, \epsilon)$  rispetto ad una terna destra, direzione e verso di  $\nu_{\mathbf{p}}$  sono quelle di  $\partial_u \psi \wedge \partial_v \psi$ .

**Def. 10.5** Sia  $\mathbf{F}$  un campo vettoriale di classe  $\mathcal{C}^1$  definito in un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^3$ . La funzione  $\operatorname{div} \mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$\operatorname{div} \mathbf{F} := \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3$$

è detta *divergenza* di  $\mathbf{F}$ .

Possiamo finalmente enunciare il

**Teorema 10.1 (di Gauss o della divergenza in  $\mathbb{R}^3$ )** Sia  $\Omega$  un aperto limitato in  $\mathbb{R}^3$  il cui bordo  $\partial\Omega$  sia unione finita disgiunta di superfici regolari e orientabili. Sia  $\mathbf{F}$  un campo vettoriale di classe  $\mathcal{C}^1(A)$  con  $A$  aperto contenente  $\bar{\Omega}$ . Allora

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mu_{\Omega} = \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle \, d\sigma,$$

dove  $\boldsymbol{\nu}$  è il versore normale esterno a  $\partial\Omega$ .

**Dim.** (sketch) Dimostriamo la validità della tesi sotto alcuni ipotesi aggiuntive riguardanti il dominio  $\Omega$ , in particolare assumiamo che  $\Omega$  possa essere descritto nel seguente modo:

- i. esiste un dominio  $D_1 \subseteq \mathbb{R}^2$  il cui bordo è una curva regolare  $\gamma_1$  ed esistono due funzioni  $f_1, g_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $\mathcal{C}^1$  tali che

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f_1(x, y) \leq z \leq g_1(x, y), (x, y) \in D_1\}.$$

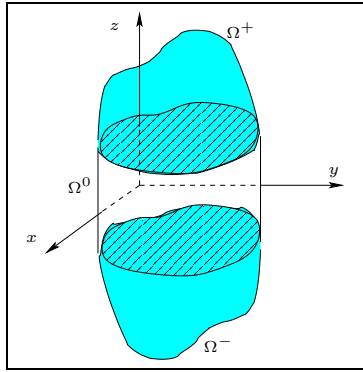


FIGURA 10.4

- ii. esiste un dominio  $D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$  il cui bordo è una curva regolare  $\gamma_2$  ed esistono due funzioni  $f_2, g_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $\mathcal{C}^1$  tali che

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f_2(x, z) \leq y \leq g_2(x, z), (x, y) \in D_2\}.$$

- iii. esiste un dominio  $D_3 \subseteq \mathbb{R}^2$  il cui bordo è una curva regolare  $\gamma_3$  ed esistono due funzioni  $f_3, g_3 : D_3 \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $\mathcal{C}^1$  tali che

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f_3(y, z) \leq x \leq g_3(y, z), (x, y) \in D_3\}.$$

Osserviamo anzitutto che la formula è evidentemente lineare nel campo vettoriale  $\mathbf{F}$ , quindi per dimostrarla in generale basta dimostrarne la validità nel caso di campi vettoriali diretti lungo gli assi. Supponiamo quindi che  $\mathbf{F} = \mathcal{F}\mathbf{e}_3$ , dove  $\mathcal{F}$  è

a valori reali ed  $\mathbf{e}_3$  è il versore diretto lungo l'asse  $z$ . Dimostrare la tesi per questo campo vettoriale significa dunque dimostrare che

$$(10.3) \quad \int_{\Omega} \partial_z \mathcal{F} d\mu_{\Omega} = \int_{\partial\Omega} \mathcal{F} \nu_3 d\sigma,$$

dove  $\nu_3$  è la componente lungo  $z$  del versore normale  $\boldsymbol{\nu}$ . Utilizzando l'ipotesi i. (vd. Fig. 10.4) ed il teorema di Fubini, abbiamo che

$$(10.4) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_z \mathcal{F} d\mu_{\Omega} &= \int_{D_1} \left[ \int_{f_1(x,y)}^{g_1(x,y)} \partial_z \mathcal{F}(x, y, z) dz \right] dxdy \\ &= \int_{D_1} [\mathcal{F}(x, y, g_1(x, y)) - \mathcal{F}(x, y, f_1(x, y))] dxdy. \end{aligned}$$

D'altra parte, la superficie  $\partial\Omega$  si decompone in tre regioni, rispettivamente:

- a. il grafico  $\partial\Omega^+$  di  $g_1$ : tenuto conto del fatto che l'orientazione deve essere quella esterna, si ha

$$\nu_3 d\sigma = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x g_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y g_1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 \right\rangle dxdy = dxdy$$

e quindi

$$\int_{\partial\Omega^+} \mathcal{F} \nu_3 d\sigma = \int_{D_1} \mathcal{F}(x, y, g_1(x, y)) dxdy.$$

- b. La superficie laterale  $\partial\Omega^0 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \gamma_1, f_1(x, y) \leq z \leq g_1(x, y)\}$ . La normale a questa superficie è parallela al piano  $xy$  e quindi ortogonale a  $\mathbf{e}_3$ , di conseguenza  $\nu_3 = 0$  e così

$$\int_{\partial\Omega^0} \mathcal{F} \nu_3 d\sigma = 0.$$

- c. Il grafico  $\partial\Omega^-$  di  $f_1$ : tenuto conto del fatto che l'orientazione deve essere quella esterna a  $\Omega$ , si ha

$$\nu_3 d\sigma = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f_1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 \right\rangle dxdy = -dxdy$$

e quindi

$$\int_{\partial\Omega^-} \mathcal{F} \nu_3 d\sigma = \int_{D_1} -\mathcal{F}(x, y, f_1(x, y)) dxdy.$$

Sommando i risultati in a., b. e c. otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} \mathcal{F}\nu_3 d\sigma &= \int_{\partial\Omega^+} \mathcal{F}\nu_3 d\sigma + \int_{\partial\Omega^0} \mathcal{F}\nu_3 d\sigma + \int_{\partial\Omega^-} \mathcal{F}\nu_3 d\sigma \\ &= \int_{D_1} \mathcal{F}(x, y, g_1(x, y)) - \mathcal{F}(x, y, f_1(x, y)) dx dy\end{aligned}$$

che confrontata con la (10.4) dimostra la correttezza di (10.3). Utilizzando le ipotesi ii. e iii. si dimostra in modo analogo la validità della tesi per campi vettoriali diretti lungo l'asse  $y$  e lungo l'asse  $x$ , rispettivamente, completando in tal modo la dimostrazione. ■

Il teorema della divergenza ha un analogo in  $\mathbb{R}^2$ . Infatti, sia  $\Omega$  un insieme aperto e limitato di  $\mathbb{R}^2$  il cui bordo  $\partial\Omega := \bar{\Omega} \setminus \Omega$  sia unione finita e disgiunta di curve regolari e orientabili (vd. Fig. 10.5).

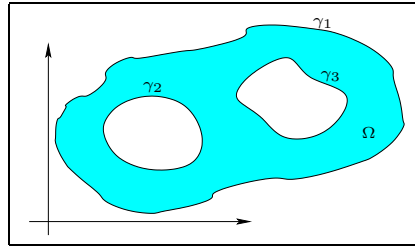


FIGURA 10.5:  $\partial\Omega = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ .

Come illustrato nel Cap. 8 (vd. Teor. 8.2 e 8.3) ad ogni  $\mathbf{p} \in \partial\Omega$  è possibile associare un intorno aperto  $B$ , un rettangolo  $D \times (-\epsilon, \epsilon)$ , con  $D$  segmento aperto in  $\mathbb{R}$  ed  $\epsilon > 0$ , ed una funzione  $\psi : D \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$  di classe  $\mathcal{C}^1$  tale che

- $\psi(D \times \{0\}) = B \cap \partial\Omega$ ,
- $\psi(D \times (0, \epsilon)) \notin \bar{\Omega}$ ,
- $\psi(D \times (-\epsilon, 0)) \in \Omega$ .

Ciò significa che la parte inferiore  $D \times (-\epsilon, 0)$  del rettangolo viene mappata da  $\psi$  in punti interni ad  $\Omega$ , la parte superiore  $D \times (0, \epsilon)$  in punti esterni ad  $\Omega$  e l'insieme  $D \times \{0\}$  in punti del bordo di  $\Omega$  (vd. Fig. 10.6).



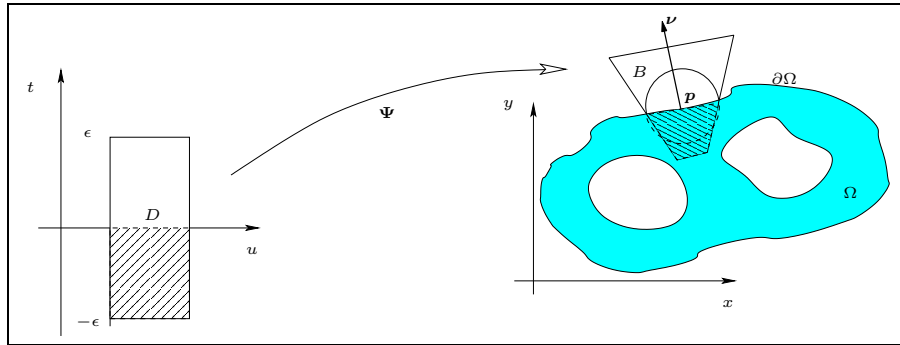
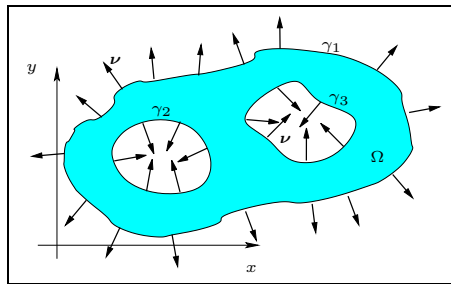


FIGURA 10.6

Tramite la mappa  $\psi$  è possibile individuare univocamente il *versore normale esterno*  $\nu_p$  ad  $\partial\Omega$  in  $p$  nel modo seguente: se  $(u, t)$  sono le coordinate in  $D \times (-\epsilon, \epsilon)$ , direzione e verso di  $\nu_p$  sono quelle di  $\partial_t \psi$ : vd. Fig. 10.7).

FIGURA 10.7: *versore normale esterno ad Ω.*

Vale il seguente risultato.

**Teorema 10.2 (di Gauss o della divergenza in  $\mathbb{R}^2$ )** Sia  $\Omega$  un insieme aperto e limitato di  $\mathbb{R}^2$  il cui bordo  $\partial\Omega := \bar{\Omega} \setminus \Omega$  sia unione finita e disgiunta di curve orientabili. Sia  $\nu$  il versore normale esterno ad  $\partial\Omega$ . Sia poi  $\mathbf{F}$  un campo vettoriale definito di classe  $C^1$  in un aperto contenente  $\bar{\Omega}$ . Allora

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mu_{\Omega} = \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \nu \rangle \, ds,$$

dove  $\operatorname{div} \mathbf{F} := \partial_x F_1 + \partial_y F_2$  è la divergenza di  $\mathbf{F}$ .

**Dim.** Dimostriamo il teorema come conseguenza di quello precedente. Consideriamo la regione  $\tilde{\Omega}$  di  $\mathbb{R}^3$  ottenuta come  $\Omega \times (0, 1)$ . Osserviamo che  $\partial\tilde{\Omega}$  è l'unione di due copie di  $\Omega$  (quella a quota  $z = 0$  e quella a quota  $z = 1$ ) con  $\partial\Omega \times [0, 1]$  che risulta essere unione disgiunta di superfici regolari ed orientabili (vd. Fig. 10.8).

La regione  $\tilde{\Omega}$  soddisfa quindi le ipotesi del Teo. 10.1. Consideriamo poi il campo vettoriale  $\tilde{\mathbf{F}}$  in  $\mathbb{R}^3$  ottenuto estendendo  $\mathbf{F}$  parallelamente a se stesso, ovvero ponendo  $\tilde{\mathbf{F}}(x, y, z) := (\mathbf{F}(x, y), 0)$ .

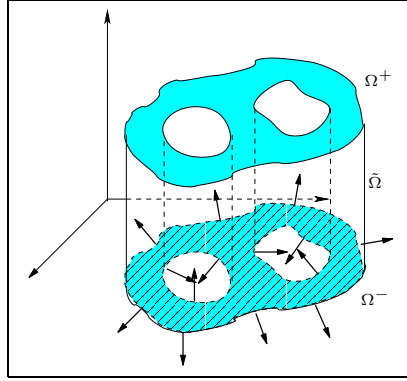


FIGURA 10.8: *il dominio  $\tilde{\Omega}$ .*

Applicando ad  $\tilde{\mathbf{F}}$  nella regione  $\tilde{\Omega}$  il teorema di Gauss già dimostrato abbiamo che

$$(10.5) \quad \int_{\tilde{\Omega}} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{F}} d\mu_{\tilde{\Omega}} = \int_{\partial\tilde{\Omega}} \langle \tilde{\mathbf{F}}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma_{\tilde{\Omega}}.$$

D'altra parte  $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{F}} = \operatorname{div} \mathbf{F}$  che è una funzione delle sole  $x, y$ , di conseguenza dal teorema di Fubini segue che

$$(10.6) \quad \int_{\tilde{\Omega}} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{F}} d\mu_{\tilde{\Omega}} = \int_{\Omega} \left[ \int_{[0,1]} \operatorname{div} \mathbf{F} dz \right] d\mu_{\Omega} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} d\mu_{\Omega}.$$

Come già detto, il bordo  $\partial\tilde{\Omega}$  si compone di tre superfici (vd. Fig. 10.8),

- il dominio  $\partial\tilde{\Omega}^+ := \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega\}$ : trattandosi di una superficie piana, il suo versore normale è diretto lungo l'asse  $z$  di conseguenza  $\langle \tilde{\mathbf{F}}, \boldsymbol{\nu} \rangle = 0$  in questa superficie.
- la superficie laterale  $\partial\tilde{\Omega}^0 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \partial\Omega, z \in [0, 1]\}$ . la normale a questa superficie è indipendente da  $z$  ed è diretta come la normale esterna a  $\partial\Omega$  nel piano  $\mathbb{R}^2$ , di conseguenza

$$\begin{aligned} \int_{\partial\tilde{\Omega}^0} \langle \tilde{\mathbf{F}}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma &= \int_{\partial\Omega \times [0,1]} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle ds dz \\ &= \int_{\partial\Omega} \left[ \int_{[0,1]} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle dz \right] ds = \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle ds. \end{aligned}$$

- c. il dominio  $\partial\tilde{\Omega}^- := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega\}$ : trattandosi di una superficie piana, il suo versore normale è diretto lungo l'asse  $z$  di conseguenza  $\langle \tilde{\mathbf{F}}, \boldsymbol{\nu} \rangle = 0$  in questa superficie.

da a., b.e c. segue dunque che

$$\int_{\partial\tilde{\Omega}} \langle \tilde{\mathbf{F}}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma = \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle ds$$

che con (10.5) ed (10.6) dimostra la tesi.  $\blacksquare$

Due notevoli conseguenze del teorema precedente sono le seguenti formule:

**Corollario 10.1 (formula di Green)** *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^2$  il cui bordo  $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$  sia una curva regolare orientabile. Siano poi  $f, g$  funzioni a valori reali e di classe  $\mathcal{C}^1$  in un aperto contenente  $\bar{\Omega}$ . Allora*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f \partial_x g \, dx dy &= \int_{\partial\Omega} f g \, dy - \int_{\Omega} g \partial_x f \, dx dy, \\ \int_{\Omega} f \partial_y g \, dx dy &= - \int_{\partial\Omega} f g \, dx - \int_{\Omega} g \partial_y f \, dx dy, \end{aligned}$$

dove il bordo è orientato in senso antiorario (vd. Fig. 10.9).

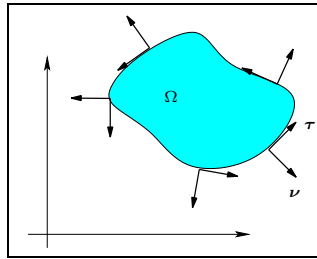


FIGURA 10.9.

**Dim.** Per la prima formula basta applicare la conclusione del teorema precedente al campo vettoriale  $\mathbf{F}(x, y) := (fg, 0)$  per ottenere che

$$\int_{\Omega} f \partial_x g + g \partial_x f \, dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle (fg, 0), \boldsymbol{\nu} \rangle ds.$$

Per ottenere la tesi basta osservare che quando il bordo  $\partial\Omega$  è orientato in senso antiorario,  $\boldsymbol{\nu} ds = (dy, -dx)$ .

Per la seconda relazione si utilizza invece il campo vettoriale  $\mathbf{F}(x, y) := (0, fg)$  e si procede come nel caso precedente.  $\blacksquare$

**Oss. 10.4** Si noti l'analogia tra queste formule e la formula di integrazione per parti. In realtà si tratta più di una analogia: la formula di Green ne è infatti la naturale generalizzazione.

**Corollario 10.2** Sia  $\Omega$  come nel teorema precedente, allora

$$\int_{\partial\Omega} x \, dy = \text{Area } \Omega = - \int_{\partial\Omega} y \, dx,$$

dove il bordo  $\partial\Omega$  è orientato in senso antiorario.

**Dim.** La prima relazione segue dalla prima formula del corollario precedente una volta scelto  $f(x, y) = 1$  e  $g(x, y) = x$ . La seconda segue in modo analogo. ■

**Oss. 10.5** Si noti come le formule precedenti generalizzino la consueta formula

$$\text{Area } \Omega = \int_D f(x) \, dx$$

per l'area della regione di piano  $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x) \forall x \in D\}$ .

**Esempio 10.7** Calcolare il flusso di  $\mathbf{F}(x, y, z) = (-x + zy^3, 2y + xz^3, 3z + xy^3)^T$  uscente dalla sfera di centro  $\mathbf{0}$  e raggio unitario.

Sia  $\Omega$  la palla unitaria centrata in  $\mathbf{0}$ . In base al teorema della divergenza abbiamo

$$\int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{F} \, d\mu_{\Omega} = 4 \int_{\Omega} d\mu_{\Omega} = \frac{16\pi}{3}.$$

Si può anche eseguire il calcolo direttamente, osservando che il versore  $\boldsymbol{\nu}$  uscente dalla sfera è il vettore  $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ , così che  $\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle = (-x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy^3z + xyz^3 + xy^3z)/\|\mathbf{x}\|$ . Parametrizzando i punti della sfera con coordinate sferiche, ovvero usando

$$\begin{cases} x = \sin \vartheta \sin \varphi \\ y = \sin \vartheta \cos \varphi \\ z = \cos \vartheta, \end{cases} \quad \text{con } (\vartheta, \varphi) \in D := [0, \pi] \times [0, 2\pi],$$

sappiamo che  $d\sigma = \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$ , per cui

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle \, d\sigma \\ &= \int_D (-\sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + 2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + 3 \cos^2 \vartheta + \sin^4 \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi \\ & \quad + \sin^2 \vartheta \cos^3 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi + \sin^4 \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cos^3 \varphi) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi. \end{aligned}$$

Usando Fubini, possiamo calcolare questo integrale come integrale iterato: gli ultimi tre termini hanno integrale in  $\varphi$  nullo (perché l'integranda è dispari rispetto alla simmetria  $\varphi \mapsto 2\pi - \varphi$  del dominio di integrazione), quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma &= \int_D (-\sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + 2\sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + 3\cos^2 \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= \int_0^\pi (-\pi \sin^2 \vartheta + 2\pi \sin^2 \vartheta + 6\pi \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \\ &= \pi \int_{-1}^1 (-(1-t^2) + 2(1-t^2) + 6t^2) dt = \frac{16\pi}{3}. \end{aligned}$$

■

**Esempio 10.8** Calcolare l'area della regione  $\Omega$  del piano che in coordinate polari  $\rho, \vartheta$  è descritta dalla relazione  $0 \leq \rho \leq \sin(\vartheta/2)$ , per  $\vartheta \in [0, 2\pi]$ .

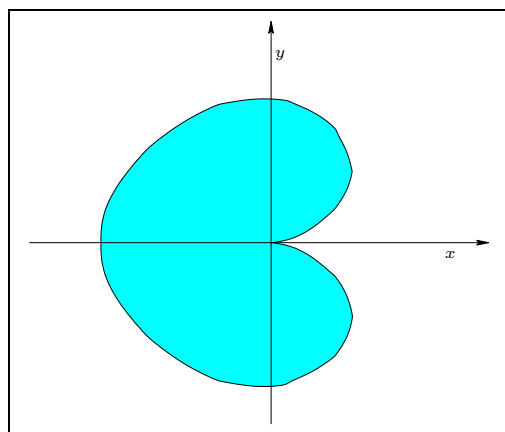


FIGURA 10.10: il cardioide  $0 \leq \rho \leq \sin(\vartheta/2)$ .

La regione proposta è nota con il nome di *cardioide* (Fig. 10.10). Possiamo affrontare il calcolo proposto utilizzando il Cor. 10.2, ovvero usando la formula

$$\text{Area } \Omega = \int_{\partial\Omega} x dy,$$

dove  $\partial\Omega$  è orientato in senso antiorario. il bordo  $\partial\Omega$ , infatti, è la curva che in coordinate polari è descritta da  $\rho = \sin \vartheta/2$  con  $\vartheta : 0 \mapsto 2\pi$ , quindi abbiamo  $x = \sin(\vartheta/2) \cos \vartheta$ ,  $y = \sin(\vartheta/2) \sin \vartheta$  per cui

$$\begin{aligned}
 \text{Area } \Omega &= \int_{\partial\Omega} x \, dy = \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos \vartheta \, d\left(\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \sin \vartheta\right) \\
 &= \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos \vartheta \left(\cos \vartheta \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin \vartheta \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right) d\vartheta \\
 &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + \frac{1}{4} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) d\vartheta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right) \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) d\vartheta = 2 \int_0^{\pi} (1 - 2 \sin^2 t) \sin^2 t \, dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t - 2 \sin^4 t) dt = \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

■

**Esempio 10.9** Sia  $\Omega$  la regione di  $\mathbb{R}^3$  ottenuta cancellando la bolla di raggio 1 e centro  $(1, 0, 0)$  dalla bolla di raggio 2 e centro  $\mathbf{0}$ . Sia  $\mathbf{F}$  il campo vettoriale radiale  $\mathbf{F} = \mathbf{x}$ . Calcolare il flusso di  $\mathbf{F}$  uscente da  $\partial\Omega$ .

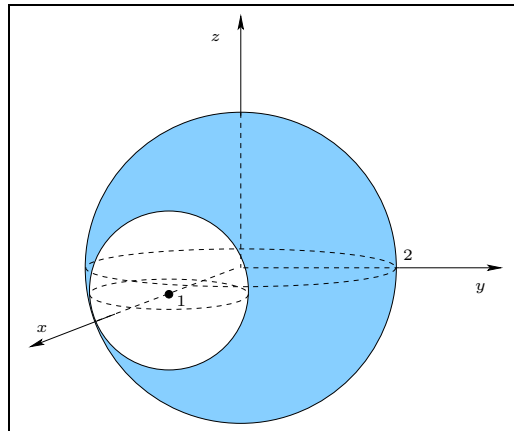


FIGURA 10.11.

Osserviamo che  $\text{div } \mathbf{F} = 3$  e che quindi dal teorema della divergenza segue immediatamente che

$$\int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma = \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{F} \, d\mu_{\Omega} = 3 \int_{\Omega} d\mu_{\Omega} = 3 \left( \frac{4\pi}{3} \cdot 2^3 - \frac{4\pi}{3} \cdot 1^3 \right) = 28\pi.$$

È però istruttivo eseguire comunque il calcolo diretto del flusso. Osserviamo che  $\partial\Omega$  è costituito da due sfere disgiunte (vd. Fig. 10.11):

$$S_1 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2^2\} \quad , \quad S_2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Osserviamo che

$$\boldsymbol{\nu}_1 := \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\| \quad , \quad \boldsymbol{\nu}_2 := (x-1, y, z)^T / \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$$

sono versori normali rispettivamente ad  $S_1$  ed  $S_2$ , entrambi uscenti; per calcolare il flusso uscente da  $\partial\Omega$  dobbiamo quindi considerare  $\boldsymbol{\nu}_1$  su  $S_1$  e  $-\boldsymbol{\nu}_2$  su  $S_2$ . Abbiamo così:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma &= \int_{S_1} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu}_1 \rangle d\sigma + \int_{S_2} \langle \mathbf{F}, -\boldsymbol{\nu}_2 \rangle d\sigma \\ &= \int_{S_1} \|\mathbf{x}\| d\sigma - \int_{S_2} x(x-1) + y^2 + z^2 d\sigma \\ &= 2 \int_{S_1} d\sigma - \int_{S_2} (x-1)^2 + y^2 + z^2 + (x-1) d\sigma \end{aligned}$$

ma su  $S_2$  la quantità  $(x-1)^2 + y^2 + z^2$  vale 1, quindi

$$= 2 \text{Area}(S_1) - \int_{S_2} x d\sigma = 32\pi - \int_{S_2} x d\sigma.$$

Passando alle coordinate polari centrate in  $(1, 0, 0)$ , ovvero posto  $(x, y, z) = (1 + \sin\vartheta \sin\varphi, \sin\vartheta \cos\varphi, \cos\vartheta)$ , con  $(\vartheta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ , abbiamo

$$\int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma = 32\pi - \int_{[0, \pi] \times [0, 2\pi]} (1 + \sin\vartheta \sin\varphi) \sin\vartheta d\vartheta d\varphi = 28\pi.$$

■

Per poter formulare il prossimo teorema abbiamo bisogno di una nuova nozione.

**Def. 10.6** È detta *superficie regolare con bordo* una mappa  $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che:

- $D$  è un dominio-connesso di  $\mathbb{R}^2$ ,
- $\partial D$  è unione finita e disgiunta di curve regolari orientabili di  $\mathbb{R}^2$ ,
- $\Phi$  è la restrizione a  $D$  di una mappa definita in un aperto  $A \supseteq D$  di classe  $\mathcal{C}^1$ ,
- il rango di  $J\Phi$  è 2 in ogni punto di  $A$ .

(Vd. Fig. 10.12) Dalla definizione segue che una superficie regolare con bordo è anzitutto una superficie regolare (secondo la Def. 9.5); per essa, però la condizione sul rango vale anche nei punti del suo bordo. Inoltre, detta  $S = \text{Img } \Phi$ , il bordo  $\partial S$  di  $S$  è l'immagine tramite  $\Phi$  del bordo di  $D$ : dato che per ipotesi  $\partial D$  è unione di curve regolari nel piano, ne segue che anche  $\partial S$  è unione di curve regolari in  $\mathbb{R}^3$  (la regolarità delle curve in  $\partial S$  segue dalla validità della condizione sul rango anche sui punti di  $\partial D$ ).

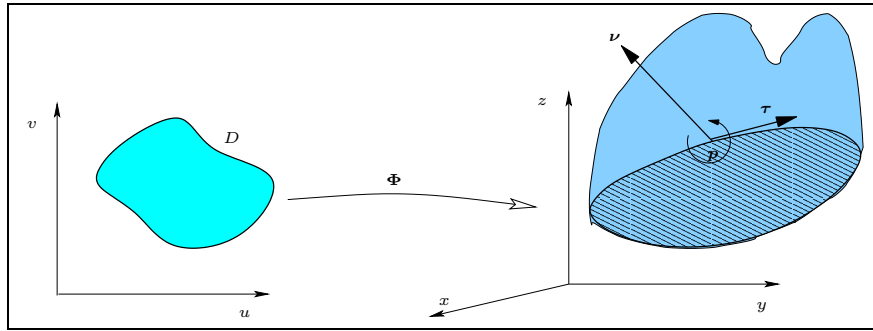


FIGURA 10.12.

Una superficie  $S$  regolare con bordo è orientabile poiché l'ipotesi che il rango di  $J\Phi$  sia 2 in tutti i punti di  $D$  fa sì che il vettore  $\partial_u \Phi \wedge \partial_v \Phi$  sia non-nullo in ogni punto di  $D$  consentendo quindi di definire il versore ortogonale  $\nu(\mathbf{p})$  in ogni punto  $\mathbf{p} \in S$  in modo continuo. Anche le curve che compongono il bordo di  $S$  sono di fatto orientabili, come conseguenza della assunta orientabilità di  $\partial D$  e dell'ipotesi  $\text{Rank}(J\Phi)(\mathbf{p}) = 2$  in  $D$ . L'orientazione di  $S$  e del suo bordo sono dette *compatibili* quando, localmente, 'sono caratterizzate dalla regola della mano destra', ovvero: se il pollice della mano destra è diretto come il versore normale alla superficie in un suo punto  $\mathbf{p}$ , le altre dita, chiuse a pugno, indicano l'orientazione della curva nei punti sufficientemente vicini a  $\mathbf{p}$  (vd. Fig. 10.12).

**Def. 10.7** Sia  $\mathbf{F}$  un campo vettoriale di classe  $\mathcal{C}^1$  definito in un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^3$ . La funzione  $\text{rot } \mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da

$$\text{rot } \mathbf{F} := \begin{pmatrix} \partial_y F_3 - \partial_z F_2 \\ \partial_z F_1 - \partial_x F_3 \\ \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \partial_u x & \partial_v x \\ \mathbf{e}_2 & \partial_u y & \partial_v y \\ \mathbf{e}_3 & \partial_u z & \partial_v z \end{vmatrix}$$

è detta *rotore* di  $\mathbf{F}$ .



**Teorema 10.3 (di Stokes o del rotore)** *Sia  $S$  una superficie regolare con bordo. Supponiamo che la funzione  $\Phi$  di parametrizzazione di  $S$  sia di classe  $\mathcal{C}^2$ . Sia  $\mathbf{F}$  un campo vettoriale di classe  $\mathcal{C}^1$  definito in un aperto contenente  $S$ . Allora*

$$\int_S \langle \text{rot } \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds,$$

dove le orientazioni di  $\partial S$  e di  $S$  sono compatibili.

**Dim.** Per semplicità dimostriamo la tesi sotto l'ipotesi che  $\partial D$  sia il sostegno di una curva regolare una cui parametrizzazione (regolare) sia data dalla funzione  $t \in [a, b] \rightarrow (u(t), v(t))$ . Sotto questa ipotesi  $\partial S$  è il sostegno di una curva di  $\mathbb{R}^3$  una cui parametrizzazione è  $(x, y, z) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$ . Osserviamo che quindi posto  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)^T$  si ha

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds &= \int_{\partial S} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \\ &= \int_a^b F_1 (u' \partial_u x + v' \partial_v x) + F_2 (u' \partial_u y + v' \partial_v y) + F_3 (u' \partial_u z + v' \partial_v z) dt \\ &= \int_{\partial D} F_1 (\partial_u x du + \partial_v x dv) + F_2 (\partial_u y du + \partial_v y dv) + F_3 (\partial_u z du + \partial_v z dv) \\ &= \int_{\partial D} (F_1 \partial_u x + F_2 \partial_u y + F_3 \partial_u z) du + (F_1 \partial_v x + F_2 \partial_v y + F_3 \partial_v z) dv. \end{aligned}$$

Applicando alla relazione precedente le formule di Green nel piano dimostrate nel Cor. 10.1, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds &= \int_D \left[ \frac{\partial}{\partial u} (F_1 \partial_v x + F_2 \partial_v y + F_3 \partial_v z) - \frac{\partial}{\partial v} (F_1 \partial_u x + F_2 \partial_u y + F_3 \partial_u z) \right] dudv. \end{aligned}$$

Nell'espressione precedente le derivate parziali miste di  $x$ ,  $y$  e  $z$  rispetto ad  $u$  e  $v$  sono uguali poiché  $\Phi$  è per ipotesi di classe  $\mathcal{C}^2$ , quindi

$$\begin{aligned} (10.7) \quad \int_{\partial S} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds &= \\ &= \int_D [(\partial_u F_1 \partial_v x + \partial_u F_2 \partial_v y + \partial_u F_3 \partial_v z) - (\partial_v F_1 \partial_u x + \partial_v F_2 \partial_u y + \partial_v F_3 \partial_u z)] dudv. \end{aligned}$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned} & \partial_u F_1 \partial_v x - \partial_v F_1 \partial_u x \\ &= (\partial_x F_1 \partial_u x + \partial_y F_1 \partial_u y + \partial_z F_1 \partial_u z) \partial_v x - (\partial_x F_1 \partial_v x + \partial_y F_1 \partial_v y + \partial_z F_1 \partial_v z) \partial_u x \\ &= -\partial_y F_1 (\partial_u x \partial_v y - \partial_v x \partial_u y) + \partial_z F_1 (\partial_u z \partial_v x - \partial_v z \partial_u x) \end{aligned}$$

ed analogamente

$$\begin{aligned} \partial_u F_2 \partial_v y - \partial_v F_2 \partial_u y &= \partial_x F_2 (\partial_u x \partial_v y - \partial_v x \partial_u y) - \partial_z F_2 (\partial_u y \partial_v z - \partial_v y \partial_u z), \\ \partial_u F_3 \partial_v z - \partial_v F_3 \partial_u z &= -\partial_x F_3 (\partial_u z \partial_v x - \partial_v z \partial_u x) + \partial_y F_3 (\partial_u y \partial_v z - \partial_v y \partial_u z). \end{aligned}$$

Sostituendo quindi queste relazioni nella (10.7) otteniamo

$$\begin{aligned} & \int_{\partial S} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds \\ &= \int_D \left[ (\partial_y F_3 - \partial_z F_2) (\partial_u y \partial_v z - \partial_v y \partial_u z) + (\partial_z F_1 - \partial_x F_3) (\partial_u z \partial_v x - \partial_v z \partial_u x) \right. \\ & \quad \left. + (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) (\partial_u x \partial_v y - \partial_v x \partial_u y) \right] dudv \\ &= \int_D \left\langle \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \partial_x & F_1 \\ \mathbf{e}_2 & \partial_y & F_2 \\ \mathbf{e}_3 & \partial_z & F_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \partial_u x & \partial_v x \\ \mathbf{e}_2 & \partial_u y & \partial_v y \\ \mathbf{e}_3 & \partial_u z & \partial_v z \end{vmatrix} \right\rangle dudv, \end{aligned}$$

dalla definizione di  $d\sigma$  segue dunque la tesi.  $\blacksquare$

**Oss. 10.6** Una conseguenza estremamente interessante del teorema precedente è che se due superfici  $S$  ed  $S'$  hanno il medesimo bordo e sono orientate in modo da dare ad esso lo stesso orientamento, allora

$$\int_S \langle \text{rot } \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma = \int_{S'} \langle \text{rot } \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma.$$

Questa formula mostra che il flusso del rotore di un campo vettoriale attraverso una superficie è in realtà indipendente dalla superficie prescelta per calcolarlo, ma dipende solamente dal bordo della superficie.

**Esempio 10.10** Sia  $\mathbf{F}$  il campo vettoriale  $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, 0)/(x^2 + y^2)$ . Siano  $S$  ed  $S'$  le due calotte sferiche  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$  e  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0\}$ , rispettivamente. Orientiamo le due calotte in modo che la componente lungo l'asse  $z$  delle loro normali sia non-negativa per la prima e non-positiva per la seconda. Calcolare il flusso del rotore di  $\mathbf{F}$  attraverso  $S$  ed  $S'$ .

Dal teorema di Stokes abbiamo l'identità

$$\int_S \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds,$$

dove l'orientazione di  $\partial S$  è fissata da quella di  $S$ . In particolare, dato che  $\partial S$  è una circonferenza la cui parametrizzazione è evidentemente  $x = \cos \vartheta$ ,  $y = \sin \vartheta$ ,  $z = 0$ , l'orientazione di  $\partial S$  corrisponde a prendere  $\vartheta \in [0, 2\pi]$ , da 0 a  $2\pi$ . Di conseguenza

$$\begin{aligned} \int_S \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma &= \int_{\partial S} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds \\ &= \int_0^{2\pi} \langle (-\sin \vartheta, \cos \vartheta, 0)^T, (-\sin \vartheta, \cos \vartheta, 0)^T \rangle d\vartheta = 2\pi. \end{aligned}$$

Osserviamo poi che il bordo di  $S'$  coincide con quello di  $S$  ma l'orientazione che i due bordi ricevono dall'orientazione sulle rispettive superfici è opposta, di conseguenza

$$\int_{S'} \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma = - \int_S \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma = -2\pi,$$

come si può facilmente verificare anche da un calcolo diretto.

Osserviamo che  $S \cup S'$  è una sfera unitaria orientata secondo la normale esterna. Stante il calcolo precedente, abbiamo che

$$\int_{S \cup S'} \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma = \int_S \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma + \int_{S'} \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma = 0.$$

Questo poteva essere previsto osservando che  $\partial(S \cup S') = \emptyset$  e che quindi, sempre in base alla formula di Stokes,

$$\int_{S \cup S'} \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma = \int_{\emptyset} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds = 0.$$

■

**Esempio 10.11** Calcolare il lavoro di  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$  lungo la curva  $\gamma$  ottenuta intersecando l'ellissoide  $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$  con il piano  $\pi : 2x + y + z = 1$  e percorsa nel verso seguente: osservando l'ellissoide da un punto con coordinate positive e maggiori di 1 (così si è all'esterno), si vede la curva orientata in senso orario.

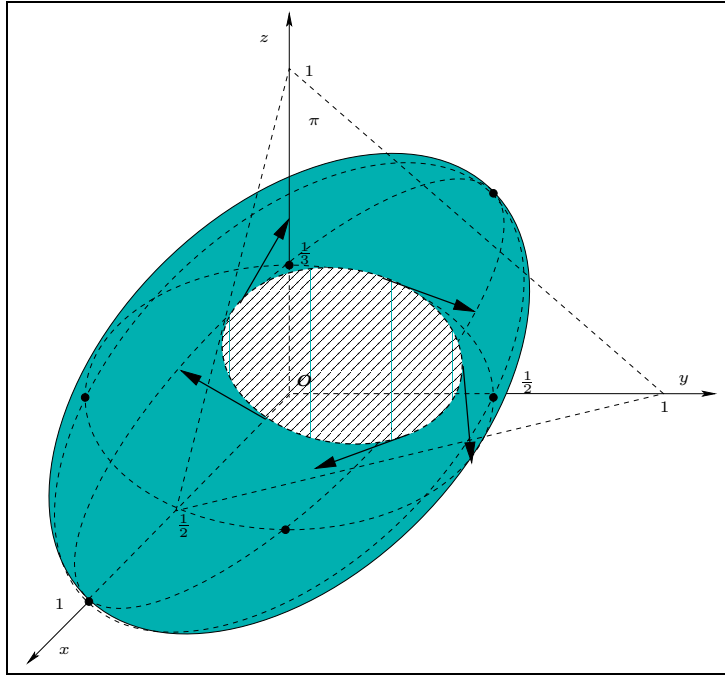


FIGURA 10.13.

La situazione è molto simile a quella già considerata in un esercizio precedente, tuttavia il calcolo è estremamente più rapido. Infatti, la curva chiusa è il bordo di una superficie (regolare con bordo)  $S$ : ad esempio la calotta ellittica (ma si può prendere anche quella parte del piano secata dall'ellissoide). Dato che  $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ , ne segue che

$$\int_{\gamma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds = \int_{\partial S} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds = \int_S \langle \text{rot } \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma = \int_S 0 d\sigma = 0.$$

■

Anche il Teorema di Stokes ha un analogo bidimensionale, vale infatti il seguente teorema.

**Teorema 10.4 (di Stokes o del rotore in  $\mathbb{R}^2$ )** *Sia  $S$  un dominio-connesso di  $\mathbb{R}^2$  il cui bordo  $\partial S$  sia unione finita e disgiunta di curve regolari (così che  $S$  sia il sostegno di una superficie regolare di  $\mathbb{R}^2$  con bordo). Sia  $\mathbf{F}(x, y) := (F_1(x, y), F_2(x, y))^T$  un campo vettoriale definito in un aperto contenente  $S$  di classe  $\mathcal{C}^1$ . Allora,*

$$\int_S (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) dx dy = \int_{\partial S} F_1 dx + F_2 dy,$$

dove le orientazioni di  $\partial S$  e di  $S$  sono compatibili.

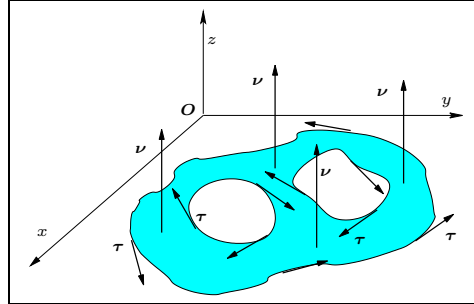


FIGURA 10.14.

**Dim.** Immergiamo  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}^3$  in modo che  $S$  risulti essere una superficie in  $\mathbb{R}^3$ , contenuta di fatto nel piano  $xOy$  (vd. Fig. 10.14). Sia  $\tilde{\mathbf{F}}(x, y, z) := (F_1(x, y), F_2(x, y), 0)$  l'estensione ad  $\mathbb{R}^3$  del campo vettoriale  $\mathbf{F}$ . Osserviamo che essendo  $S$  una superficie piana, il suo versore normale  $\boldsymbol{\nu}$  è diretto lungo l'asse  $z$  e quindi possiamo prendere  $\boldsymbol{\nu} := \mathbf{e}_3$ . La componente lungo  $z$  di  $\text{rot } \tilde{\mathbf{F}}$  è  $\partial_x F_2 - \partial_y F_1$ , inoltre  $S$  può essere parametrizzata tramite la mappa identità, così che

$$\int_S \langle \text{rot } \tilde{\mathbf{F}}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma = \int_S (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) dx dy.$$

D'altra parte, per il teorema di Stokes in  $\mathbb{R}^3$  sappiamo che l'integrale di sinistra è pari a

$$\int_{\partial S} \langle \tilde{\mathbf{F}}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds.$$

Supponiamo che il bordo sia il sostegno di un'unica curva regolare e ne sia  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = 0$  la parametrizzazione di classe  $\mathcal{C}^1$  con  $t \in [a, b]$ , allora

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \langle \tilde{\mathbf{F}}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds &= \int_a^b F_1(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}(t) + F_2(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}(t) dt \\ &= \int_{\partial S} F_1 dx + F_2 dy, \end{aligned}$$

completando così la dimostrazione del teorema in questo caso. Se poi  $\partial S$  è unione finita di più curve regolari a tratti allora la tesi segue dall'additività dell'integrale rispetto al dominio di integrazione. ■

**Oss. 10.7** Il teorema precedente segue in realtà anche dal Cor. 10.1, basta prendere  $f = 1$  e  $g = F_1$  nella prima formula ed  $f = 1$  e  $g = F_2$  nella seconda e

sommare le due relazioni così ottenute. Questo mostra che in  $\mathbb{R}^2$  il teorema di Gauss e quello di Stokes divengono il medesimo teorema.

VERSIONE PRELIMINARE 26.9.05